

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

E. PHILLIPS

**Mémoire sur le spiral réglant des chronomètres et des montres**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série*, tome 5 (1860), p. 313-366.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1860\\_2\\_5\\_313\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5_313_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

## MÉMOIRE

SUR

LE SPIRAL RÉGLANT DES CHRONOMÈTRES ET DES MONTRES [\*];

PAR M. E. PHILLIPS.

*Historique.*

On sait que, dans les appareils portatifs qui servent à mesurer le temps, l'ensemble du ressort spiral et de son balancier remplit l'office de régulateur, tout comme le pendule dans les appareils fixes.

Huyghens, qui appliqua le premier le pendule aux horloges, est aussi l'inventeur du ressort spiral communément appelé *spiral réglant*, qu'il fit construire pour la première fois en 1674 par M. Thuret, habile horloger. Cette importante découverte lui fut contestée, il est vrai, à cette époque par le D<sup>r</sup> Hook d'une part, puis par l'abbé Hautefeuille. Mais il ressort de toutes les longues discussions dont l'invention du spiral fut l'objet, que le D<sup>r</sup> Hook peut avoir eu la première idée d'un ressort droit appliqué au balancier; que l'abbé Hautefeuille l'aurait ployé en forme d'hélice agissant dans le sens de son axe, mais que Huyghens seul perfectionna ces idées informes en donnant à ce ressort la forme spirale qui, ne gênant plus les grandes vibrations du balancier, a rendu ce régulateur excessivement précis. Enfin, l'on doit à

---

[\*] Ce Mémoire, présenté à l'Académie des Sciences, a été renvoyé à l'examen d'une Commission composée de MM. Mathieu, Lamé, et Delaunay rapporteur. Voici les conclusions du Rapport lu à l'Académie dans la séance du 28 mai 1860 :

« En résumé, le travail de M. Phillips présente une heureuse application des théories de la mécanique rationnelle à une importante question de la pratique, et permet de substituer des règles simples aux tâtonnements à l'aide desquels les constructeurs de chronomètres cherchent à obtenir l'isochronisme des oscillations du balancier. La Commission propose à l'Académie de donner son approbation à ce travail et d'en ordonner l'insertion dans le *Recueil des Savants étrangers*. »

Pierre Leroy la découverte de la propriété de l'isochronisme du ressort spiral, en choisissant convenablement ses extrémités.

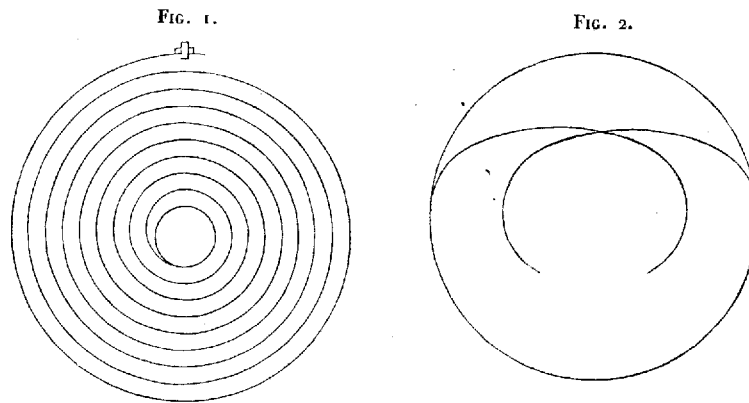
*Preliminaires.*

Quelque important que soit le régulateur dont il s'agit, sa théorie n'avait pas encore été établie, la forme essentiellement complexe de ce ressort introduisant dans l'application de la théorie de l'élasticité des équations différentielles tellement compliquées, qu'il serait absolument impossible de les intégrer. J'ai pourtant été assez heureux, par des combinaisons particulières, pour vaincre ces difficultés dans tout ce qui touche au problème, et c'est cette théorie qui fait l'objet de ce Mémoire. J'y considère la question comme un problème de mécanique, dont voici l'énoncé : « Etant donné un ressort spiral réuni à un balancier, trouver les lois de leur mouvement commun. » Dans la pratique on a évidemment à tenir compte d'influences secondaires, telles que celles des huiles, des frottements, etc. Plus loin, je reviendrai sur ces détails au point de vue des applications. Dès à présent, je me borne à dire que l'expérience est toujours venue confirmer la théorie qui fait l'objet de ce Mémoire et dont les conclusions sont toujours d'accord avec les idées reçues dans la pratique et avec tous les ouvrages qui traitent de l'horlogerie.

Qu'il s'agisse du spiral plat ou du spiral cylindrique, ses extrémités sont toujours fixées de la même manière et par des goupilles en coin, l'une à un piton fixe et l'autre soit à une virole, soit à un bras tournant avec le balancier et concentrique avec lui. Ce mode d'attache réalise la condition de l'encastrement, et l'on peut regarder l'extrémité fixe du spiral comme conservant une inclinaison invariable et son autre extrémité comme ayant une inclinaison fixe par rapport à celle du cercle de la virole à leur point d'intersection.

La différence de construction entre le spiral plat et le spiral cylindrique est la suivante : Le premier se compose, ainsi que l'indique la *fig. 1*, d'une courbe spirale plane, formée d'un certain nombre de spires, généralement de huit à douze, se rapprochant autant que possible de la forme circulaire et tracées autour du cercle de la virole.

Quant au spiral cylindrique (*fig. 2*), ses spires affectent rigoureu-



sement en projection horizontale la forme circulaire dont l'axe du balancier est le centre, et il se termine, en général, par deux courbes adoucies qui se rapprochent du centre à une distance ordinairement égale à environ la moitié du rayon. Ces spires venant se placer les unes au-dessous des autres, la forme rigoureuse du spiral est celle d'une hélice à pas extrêmement court, d'où le nom de *spiral cylindrique*.

Je prends comme point de départ, ainsi que je l'ai fait dans mon Mémoire sur les ressorts de chemins de fer, la théorie de la résistance des solides élastiques, d'après laquelle on admet l'existence d'un axe neutre central et le changement de courbure des fibres sans glissement relatif des unes par rapport aux autres. Je me hâte d'observer que, dans une Note placée à la fin du Mémoire que j'ai présenté à l'Académie des Sciences, je démontre que, dans le problème actuel, ce principe est une conséquence rigoureuse de la théorie mathématique de l'élasticité.

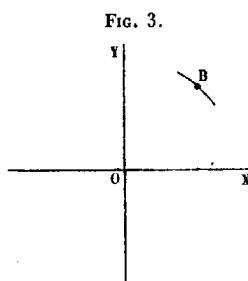
*Problème de l'équilibre du système du spiral et du balancier.*

J'entre maintenant dans les détails de la question, et d'abord je commence par résoudre le problème suivant :

» Le spiral et le balancier étant dans leur position naturelle et en

équilibre, on suppose que l'on fasse décrire au balancier un angle de rotation  $\alpha$ . On demande quel est le moment du couple qu'il faudrait appliquer au balancier pour le maintenir dans cette nouvelle position contre l'action du spiral. »

Pour résoudre ce problème, je rapporte le système à deux axes coordonnés rectangulaires, passant par le centre O du balancier (*fig. 3*)



et dont l'un OY passe aussi par celle des extrémités du spiral qui est fixe.

Si l'on considère, dans la nouvelle position d'équilibre, le balancier et le spiral comme formant un tout solide, ce système doit être en équilibre sous l'action du couple appliqué au balancier et dont le moment que j'appellerai G est précisément ce qu'il s'agit de déterminer. De plus, le centre du balancier étant fixe, rien n'empêche de le considérer comme libre, pourvu qu'on applique à ce point O une force égale et contraire à la pression qu'il peut exercer contre les parois du trou. Désignons par Y et X les composantes suivant OY et OX de la force ainsi appliquée au point O, point que je regarderai alors comme libre.

B étant la position occupée par un point quelconque du spiral dans le nouvel état d'équilibre, j'appelle  $x$  et  $y$  ses coordonnées;  $s$ , la longueur du spiral comprise entre ce point et l'extrémité fixe;  $L$ , la longueur totale du spiral;  $M$ , le moment d'élasticité de celui-ci; enfin  $\rho$  le rayon de courbure du spiral au point B dans la nouvelle position d'équilibre, et  $\rho_0$  le rayon de courbure au même point B, dans l'état naturel du spiral quand le moment G est nul.

Dans la nouvelle position d'équilibre, celui-ci ne serait pas troublé si l'on solidifiait toute la partie du spiral comprise entre le point B et

l'extrémité engagée dans le balancier, et l'on a alors à considérer l'équilibre d'un corps solide formé de l'ensemble résultant de cette partie du spiral et du balancier, et soumis d'une part au couple  $G$  qui agit sur le balancier et aux forces  $X$  et  $Y$ , et d'autre part aux actions moléculaires exercées sur la section  $B$  par la partie non solidifiée du spiral. Si l'on transporte au point  $B$  les forces  $Y$  et  $X$  ainsi que le couple  $G$ , le couple résultant doit faire équilibre à celui qui provient des actions moléculaires exercées par la partie non solidifiée du spiral. Or si, pour fixer les idées, nous supposons que l'angle de rotation  $\alpha$  soit dans un sens tel, que le rayon de courbure ait diminué au point  $B$ , le moment de ces actions moléculaires est égal à  $M \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right)$  et nous aurons

$$(1) \quad M \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) = G + Yx - Xy.$$

Cette équation convient à tous les points du spiral. On peut donc multiplier les deux membres par  $ds$  et intégrer dans toute l'étendue du spiral, ce qui donne

$$(2) \quad M \left( \int \frac{ds}{\rho} - \int \frac{ds}{\rho_0} \right) = G \int ds + Y \int xds - X \int yds.$$

Or

$$G \int ds = GL.$$

Puis, si nous appelons  $x_1$  et  $y_1$  les coordonnées du centre de gravité du spiral, il est évident que

$$\int xds = Lx_1 \quad \text{et} \quad \int yds = Ly_1;$$

par suite,

$$Y \int xds = YLx_1 \quad \text{et} \quad X \int yds = XLy_1.$$

Je passe maintenant au premier membre de l'équation (2). Or on voit que  $\frac{ds}{\rho}$  est, pour la forme naturelle du spiral, l'angle formé par

deux normales consécutives de la courbe et, par conséquent,  $\int \frac{ds}{\rho_0}$  n'est autre chose que l'angle compris entre les deux normales extrêmes. De même  $\int \frac{ds}{\rho}$  est l'angle des deux normales extrêmes dans la nouvelle forme du spiral. Mais, quand celui-ci passe de la première position à la seconde, la normale relative à l'extrémité fixe reste invariable de direction, à cause de l'encastrement qui a lieu en ce point. D'un autre côté, de ce que l'autre extrémité du spiral s'engage dans la virole du balancier sous un angle, avec le cercle de la virole, qui reste constant aussi à cause de l'encastrement, il en résulte qu'en passant de la position naturelle du spiral à sa nouvelle position d'équilibre, la normale au spiral à son extrémité correspondante au balancier tourne d'un angle  $\alpha$ . Il suit de ce qui précède qu'on a simplement

$$\int \frac{ds}{\rho} - \int \frac{ds}{\rho_0} = \alpha,$$

et l'équation (2) devient

$$(3) \quad M\alpha = GL + L(Yx_1 - Xy_1).$$

*Calcul de la durée d'une oscillation du balancier.*

Admettons, quant à présent, que le terme  $L(Yx_1 - Xy_1)$  qui se trouve dans le second membre, soit nul ou négligeable. Je traiterai ce point un peu plus loin avec tous les détails qu'il comporte et j'établirai alors les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi. Regardons par conséquent ce fait comme admis pour le moment; et alors l'équation (3) se réduit à

$$(4) \quad M\alpha = GL$$

ou

$$(5) \quad G = \frac{M\alpha}{L},$$

expression très-simple qui fait voir que le moment du couple qui tend à faire tourner le balancier est proportionnel à l'angle que celui-ci a

décrit à partir de sa position naturelle d'équilibre et qui donne de plus ce moment en fonction du moment d'élasticité et de la longueur du ressort spiral.

Dès lors il devient facile de trouver la durée des oscillations du balancier. En effet, en appelant  $A$  le moment d'inertie de celui-ci par rapport à son axe de rotation, on a à chaque instant, en faisant attention que le couple  $G$  agit comme couple résistant,

$$A \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -G,$$

ou, à cause de l'équation (5),

$$(6) \quad A \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{M\alpha}{L}.$$

Je désigne par  $\alpha_0$  l'angle d'écartement du balancier qui répond à la limite de l'oscillation, alors que sa vitesse est nulle, et l'on a, en multipliant les deux membres de l'équation (6) par  $2d\alpha$  et intégrant,

$$(7) \quad A \frac{d\alpha^2}{dt^2} = \frac{M}{L} (\alpha_0^2 - \alpha^2).$$

Puis, en intégrant de  $\alpha = \alpha_0$  à  $\alpha = -\alpha_0$ , on a, pour le temps  $T$  d'une oscillation,

$$(8) \quad T = \pi \sqrt{\frac{AL}{M}},$$

relation fort simple qui donne la durée des vibrations. Elles se trouvent isochrones, quelle que soit leur amplitude.

L'expression précédente (8) est tout à fait analogue à celle qui donne le temps des petites oscillations du pendule. On voit que la longueur  $l$  du pendule simple qui ferait ses oscillations dans le même temps que le balancier serait exprimée par la formule

$$(9) \quad l = L \frac{Ag}{M}.$$

La formule (8) est tout à fait d'accord avec l'expérience.



*Conditions relatives à l'isochronisme.*

Je reprends maintenant l'équation (3) dans laquelle j'ai négligé la partie  $L(Yx_1 - Xy_1)$  et je vais examiner à quelles conditions l'on peut effectivement ne pas tenir compte de ce terme, d'où dépendent définitivement l'isochronisme des oscillations et l'exactitude de la formule (8).

En premier lieu, ce terme serait toujours nul si l'on avait constamment  $x_1$  et  $y_1$  égaux à zéro, c'est-à-dire si le centre de gravité du spiral restait toujours sur l'axe du balancier. De là résulte aussitôt la convenance de donner aux spires une forme sensiblement circulaire et concentrique à l'axe, de façon que le centre de gravité général soit sur cet axe et qu'il s'en écarte aussi peu que possible dans le mouvement.

Deuxièmement, le terme  $L(Yx_1 - Xy_1)$  s'évanouirait encore si les composantes  $X$  et  $Y$  étaient nulles et par conséquent si la pression éprouvée par l'axe du balancier était toujours nulle, ou encore si cette pression passait constamment par le centre de gravité du spiral. En fait, dans la pratique cette pression est toujours excessivement faible dans les appareils bien faits, puisque alors, pourvu que l'huile n'ait pas manqué, on ne remarque aucune usure contre les parois du trou de l'axe, même après de nombreuses années de marche. Mais néanmoins je vais examiner, avec tous les développements que le sujet comporte, les conditions moyennant lesquelles on peut rigoureusement et mathématiquement atteindre ce but.

Je remarque à cet effet que, quand  $X$  et  $Y$  sont nuls ou tout à fait négligeables, l'équation (1) donne

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{G}{M},$$

ou, à cause de l'équation (5),

$$(10) \quad \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{z}{L}.$$

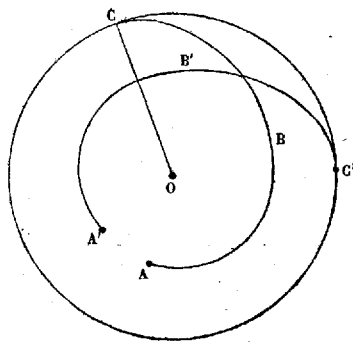
Il suit de là qu'alors le changement de courbure est uniforme. Ainsi si  $\rho_0$  est constant, il en est de même de  $\rho$ ; c'est-à-dire que si les

spires ont la forme de circonférences de cercle dans leur état naturel, elles affecteront encore, dans leurs déformations, celles de circonférences de cercle, mais d'un rayon différent; si, comme dans le spiral plat, elles ont dans leur état naturel des formes très-voisines de circonférences de cercle, il en sera de même pendant le mouvement, sauf que les rayons changeront. Quand, comme dans le spiral cylindrique, les spires ont sensiblement la forme de circonférences de même rayon venant se placer les unes au-dessus des autres, la formule (10) indique qu'alors, dans les déformations, les spires se transforment en circonférences d'un rayon unique différent du premier et qu'elles restent exactement les unes au-dessus des autres, ce qui est encore conforme à l'expérience.

Réciproquement à ce qui précède, si l'on avait continuellement pour tous les points du spiral  $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{\alpha}{L}$ , c'est-à-dire la différence  $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}$  constante, l'équation (1) montre qu'on aurait alors forcément  $Y = 0$  et  $X = 0$ , et que, par conséquent, l'équation (5) aurait lieu avec ses conséquences. Je vais donc maintenant examiner dans quelles circonstances et sous quelles conditions on peut regarder la différence  $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}$  comme constante dans toute l'étendue du spiral et pour toutes les valeurs de  $\alpha$ .

Supposons d'abord qu'il s'agisse du spiral cylindrique. Soit ABC (fig. 4) la courbe qui commence le spiral, A étant le bout fixe et C le

FIG. 4.



point de jonction et de tangence de cette courbe avec la première

spire. A l'autre extrémité du spiral, celui-ci se termine par une courbe symétrique et égale dont l'extrémité  $A'$ , correspondante à  $A$ , est encastree dans la virole du balancier. Or le problème est celui-ci : Chercher si l'on peut, pour toutes les valeurs entre lesquelles varie l'angle  $\alpha$ , déformer le spiral d'après la loi  $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{\alpha}{L}$ , de telle façon que les conditions relatives à ses extrémités soient toujours satisfaites, c'est-à-dire qu'au point  $A$ , ce point et sa tangente soient invariables et qu'en même temps, à l'extrémité opposée  $A'$ , celle-ci aboutisse toujours au cercle de la virole et vienne le rencontrer sous un angle constant et donné. Ceci posé, je vais montrer la manière de résoudre la question par certaines formes appropriées données aux courbes extrêmes qui terminent de part et d'autre le spiral.

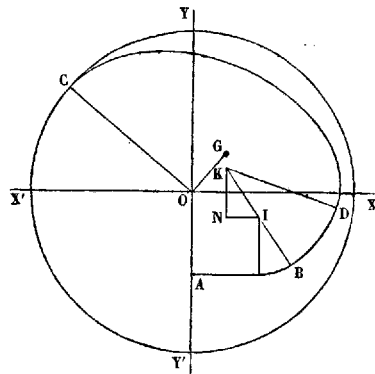
*Détermination des courbes extrêmes.*

Pour cela j'observe que, si le spiral dont il s'agit était construit de telle sorte que, en le déformant d'après la loi  $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{\alpha}{L}$ , pour toutes les valeurs exigées de  $\alpha$ , le centre des spires circulaires restât toujours dans une position invariable, la question serait résolue. En effet (voir *fig. 4*), les courbes extrêmes  $ABC$ ,  $A'B'C'$  resteraient toujours égales et symétriques après la déformation. Or le point  $A$  est sur la circonférence de la virole dont le centre est en  $O$  ; mais puisque nous admettons que le centre des spires ne s'est pas déplacé, il arrivera que, par le seul fait de la déformation exprimée par  $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{\alpha}{L}$ , le point  $A'$  supposé libre aboutira précisément sur la circonférence de la virole. Par une raison tout à fait semblable, la tangente au point  $A'$  à la courbe  $A'B'C'$  rencontrera le cercle de la virole sous le même angle que la tangente en  $A$  à  $ABC$  rencontre cette virole au point  $A$ , et comme ce dernier angle est constant et donné à cause de l'encastrement, il en sera de même de celui qui a lieu en  $A'$ . Or, en supposant maintenant le point  $A'$ , au lieu d'être libre, fixé dans la virole et encastree dans celle-ci suivant l'angle donné, rien ne sera changé, et la loi de déformation sera exprimée par la formule  $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{\alpha}{L}$ .

Je vais donc m'occuper maintenant de la détermination de la courbe extrême ABC ou de sa symétrique A'B'C', d'après la condition que, pour toutes les valeurs les plus étendues de  $\alpha$ , dans un sens ou dans l'autre, le centre des spires reste dans une position invariable, la déformation ayant lieu d'après la loi  $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{\alpha}{L}$ . J'observe tout de suite que, dans les limites les plus extrêmes de la pratique, l'angle  $\alpha$  varie entre  $\frac{3}{4}$  de tour de chaque côté.

Soient OX et OY (fig. 5) deux axes coordonnés rectangulaires menés par le centre O primitif des spires qui est l'axe du balancier.

FIG. 5.



L'axe OY est conduit par le bout fixe A de la courbe ABC de manière que ce point A soit sur la partie négative de cet axe.

Soit  $BI = r$  le rayon de courbure qui a lieu au point B pendant la déformation et soit  $r_0$  celui du même point avant la déformation. Au point D, infiniment voisin, le rayon de courbure est

$$KB = r + dr$$

et l'on a

$$dr = IK.$$

Formons le triangle rectangle IKN dont les côtés sont parallèles aux axes coordonnés. Il est clair que si  $\xi$  et  $\eta$  sont les coordonnées du centre de courbure I, on a

$$(11) \quad IN = -d\xi$$

et

$$(12) \quad KN = d\eta.$$

D'ailleurs la déformation a lieu suivant la loi

$$(13) \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{\alpha}{L},$$

d'où l'on tire

$$(14) \quad r = \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0}.$$

Maintenant j'appelle  $\theta$  l'angle IKN formé par le rayon de courbure KB avec la partie négative de l'axe de  $\gamma$ . En désignant par  $\theta_0$  l'angle correspondant au même point B avant la déformation, on trouve une relation très-simple entre  $\theta$  et  $\theta_0$ . En effet, en multipliant les deux membres de l'équation (13) par  $ds$  et intégrant depuis le point A jusqu'au point B, on a

$$\int \frac{ds}{r} = \int \frac{ds}{r_0} + \frac{\alpha s}{L};$$

mais

$$\int \frac{ds}{r} - \int \frac{ds}{r_0} = \theta - \theta_0;$$

donc

$$(15) \quad \theta = \theta_0 + \frac{\alpha s}{L},$$

formule très-simple qui indique la manière dont varie l'inclinaison de la normale ou de la tangente pendant la déformation.

Dans le triangle IKN, on a

$$IN \quad \text{ou} \quad -d\xi = IK \sin IKN, \quad \text{ou} \quad d\xi = -dr \sin \theta,$$

ou encore, à cause des équations (14) et (15), on a

$$(16) \quad d\xi = -\sin \left( \theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) d \left( \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0} \right).$$

Le même triangle IKN donne

$$(17) \quad d\eta = \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) d\left(\frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0}\right).$$

Affectons d'un accent ' les quantités qui se rapportent spécialement à l'extrémité A de la courbe ABC et de deux accents '' celles qui se rapportent à l'autre extrémité C de la même courbe. Soit, de plus,  $\delta$  la longueur absolue OA. Les coordonnées  $\xi'$  et  $\eta'$  du centre de courbure au point A pendant la déformation auront pour valeurs (en observant que la normale en A a une direction invariable)

$$\xi' = -r' \sin \theta'_0 = -\frac{r'_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r'_0} \sin \theta'_0,$$

$$\eta' = -\delta + r' \cos \theta'_0 = -\delta + \frac{r'_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r'_0} \cos \theta'_0.$$

En conséquence, on tire des formules (16) et (17) pour les coordonnées  $\xi''$  et  $\eta''$  du centre de courbure de la courbe ABC, au point C, pendant la déformation

$$(18) \quad \xi'' = -\frac{r'_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r'_0} \sin \theta'_0 - \int \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) d\left(\frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0}\right)$$

et

$$(19) \quad \eta'' = -\delta + \frac{r'_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r'_0} \cos \theta'_0 + \int \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) d\left(\frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0}\right),$$

les intégrales étant prises dans toute l'étendue de la courbe ABC.

Comme le rayon de courbure de la courbe ABC au point C sera généralement différent du rayon des spires, le centre de celles-ci ne coïncidera pas avec le centre de courbure de la courbe au point C et on passera de celui-ci au centre des spires par un triangle rectangle de dimensions finies analogue au triangle infiniment petit IKN. Donc, en appelant  $\xi'''$  et  $\eta'''$  les coordonnées du centre des spires déformées, on

aura

$$\xi''' = \xi'' - (\rho - r'') \sin \theta'' \quad \text{et} \quad \eta''' = \eta'' + (\rho - r'') \cos \theta'',$$

$\rho$  étant ce que devient, pendant la déformation, le rayon initial  $\rho_0$  des spires. Donc, à cause des équations (14) et (15), on a, en appelant  $l$  la longueur développée de la courbe ABC,

$$\xi''' = \xi'' + \frac{r'_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r'_0} \sin \left( \theta''_0 + \frac{\alpha l}{L} \right) - \frac{\rho_0}{1 + \frac{\alpha}{L} \rho_0} \sin \left( \theta''_0 + \frac{\alpha l}{L} \right)$$

et

$$\eta''' = \eta'' - \frac{r'_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r'_0} \cos \left( \theta''_0 + \frac{\alpha l}{L} \right) + \frac{\rho_0}{1 + \frac{\alpha}{L} \rho_0} \cos \left( \theta''_0 + \frac{\alpha l}{L} \right).$$

En remplaçant dans ces formules  $\xi''$  et  $\eta''$  par leurs valeurs (18) et (19) on obtient pour les coordonnées  $\xi'''$  et  $\eta'''$  du centre des spires déformées :

$$(20) \left\{ \begin{aligned} \xi''' &= - \frac{r'_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r'_0} \sin \theta'_0 + \frac{r'_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r'_0} \sin \left( \theta''_0 + \frac{\alpha l}{L} \right) \\ &\quad - \frac{\rho_0}{1 + \frac{\alpha}{L} \rho_0} \sin \left( \theta''_0 + \frac{\alpha l}{L} \right) - \int \sin \left( \theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) d \left( \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0} \right), \end{aligned} \right.$$

$$(21) \left\{ \begin{aligned} \eta''' &= - d + \frac{r'_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r'_0} \cos \theta'_0 - \frac{r'_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r'_0} \cos \left( \theta''_0 + \frac{\alpha l}{L} \right) \\ &\quad + \frac{\rho_0}{1 + \frac{\alpha}{L} \rho_0} \cos \left( \theta''_0 + \frac{\alpha l}{L} \right) + \int \cos \left( \theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) d \left( \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0} \right). \end{aligned} \right.$$

Ces formules peuvent être très-simplifiées de la manière suivante. En intégrant par parties, on a

$$\int \sin \left( \theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) d \left( \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0} \right) = \left\{ \sin \left( \theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0} \right\} \\ - \int \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0} d. \sin \left( \theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right).$$

La parenthèse  $\left\{ \right\}''$  indique qu'il faut prendre sa valeur au point C et en retrancher sa valeur au point A. Elle est donc égale à

$$\frac{r_0''}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0''} \sin\left(\theta_0'' + \frac{\alpha l}{L}\right) - \frac{r_0'}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0'} \sin \theta_0'.$$

D'un autre côté

$$\begin{aligned} d. \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) &= \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) \times \left(1 + \frac{\alpha}{L} \frac{ds}{d\theta_0}\right) d\theta_0 \\ &= \left(1 + \frac{\alpha}{L} r_0\right) \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) d\theta_0, \end{aligned}$$

puisque  $\frac{ds}{d\theta_0} = r_0$ .

Donc

$$\begin{aligned} \int \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0} d. \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) &= \int r_0 \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) d\theta_0 \\ &= \int_0^l \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} \int \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) d\left(\frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0}\right) &= \frac{r_0''}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0''} \sin\left(\theta_0'' + \frac{\alpha l}{L}\right) \\ &- \frac{r_0'}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0'} \sin \theta_0' - \int_0^l \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds. \end{aligned}$$

Enfin, en substituant dans l'équation (20), celle-ci devient simplement

$$(22) \quad \xi''' = - \frac{\rho_0}{1 + \frac{\alpha}{L} \rho_0} \sin\left(\theta_0'' + \frac{\alpha l}{L}\right) + \int_0^l \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds.$$

On transforme de même l'équation (21).



Ainsi,

$$\int \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) d\left(\frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0}\right) = \left\{ \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0} \right\}' - \int \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0} d.\cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right).$$

Mais

$$\left\{ \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0} \right\}' = \frac{r_0''}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0''} \cos\left(\theta_0'' + \frac{\alpha l}{L}\right) - \frac{r_0'}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0'} \cos\theta_0'$$

et

$$- \int \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0} d.\cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) = \int_0^l \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds.$$

Donc

$$\int \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) d\left(\frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0}\right) = \frac{r_0''}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0''} \cos\left(\theta_0'' + \frac{\alpha l}{L}\right) - \frac{r_0'}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0'} \cos\theta_0' + \int_0^l \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds,$$

et, par suite, en substituant dans l'équation (21), on a simplement

$$(23) \quad \eta''' = -\delta + \frac{\rho_0}{1 + \frac{\alpha}{L} \rho_0} \cos\left(\theta_0'' + \frac{\alpha l}{L}\right) + \int_0^l \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds.$$

Pour que le centre des spires reste invariable, il faut que  $\xi'''$  et  $\eta'''$  soient nulles pour toutes les valeurs de  $\alpha$  comprises entre les limites des oscillations. Il faut donc que les courbes extrêmes soient construites de telle façon que l'on ait [(à cause des équations (22) et (23)], pour toutes les valeurs de  $\alpha$  dont il s'agit,

$$(24) \quad \int_0^l \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\alpha}{L} \rho_0} \sin\left(\theta_0'' + \frac{\alpha l}{L}\right)$$

et

$$(25) \quad \int_0^l \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds = \delta - \frac{\rho_0}{1 + \frac{\alpha}{L}\rho_0} \cos\left(\theta_0' + \frac{\alpha l}{L}\right).$$

Il est facile de reconnaître que la forme circulaire ne convient pas pour les courbes extrêmes. En effet, pour le cercle, on a

$$\theta_0 = \frac{1}{r_0} s$$

$r_0$  étant la valeur du rayon. On a donc alors,

$$\int_0^l \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds = \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L}r_0} \sin\left(\theta_0' + \frac{\alpha l}{L}\right)$$

et

$$\int_0^l \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds = \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L}r_0} - \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L}r_0} \cos\left(\theta_0' + \frac{\alpha l}{L}\right).$$

Or ces deux relations montrent que l'on vérifie la condition de l'équation (24) en faisant  $r_0 = \rho_0$ ; mais qu'il serait impossible de satisfaire à la relation de l'équation (25) puisque  $\delta$  est constant et que

$\frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L}r_0}$  varie avec  $\alpha$ . Ainsi dans beaucoup d'anciens chronomètres où

les courbes extrêmes n'étaient autres qu'une portion des spires circulaires, cette disposition était vicieuse sous ce rapport et on y a effectivement renoncé.

Les raisonnements précédents supposent, il est vrai, que le centre de ce cercle soit sur YY' puisque j'ai fait  $\theta_0 = \frac{1}{r_0} s$ ; mais on pourrait tout aussi bien le regarder comme placé d'une manière quelconque en faisant  $\theta_0 = \frac{1}{r_0} s + \theta_0'$  et l'on arriverait encore à la même conclusion.

Je vais maintenant chercher la forme des courbes extrêmes qui satisfont aux conditions des équations (24) et (25). J'observe d'abord que les arcs  $\frac{\alpha s}{L}$  et  $\frac{\alpha l}{L}$  sont toujours assez petits pour qu'on puisse rem-

placer leur sinus par l'arc et leur cosinus par l'unité, car, dans les limites extrêmes de la pratique,  $\frac{\alpha l}{L}$  est au plus égal à  $\frac{1}{4}$ , ce qui répond à un angle de 15 degrés, et même généralement plus petit. Par une raison semblable, on peut remplacer  $\frac{1}{1 + \frac{\alpha \rho_0}{L}}$  par  $1 - \frac{\alpha \rho_0}{L}$ . De cette fa-

çon, les conditions (24) et (25) deviennent respectivement

$$(26) \quad \int_0^l \left( \cos \theta_0 - \frac{\alpha s}{L} \sin \theta_0 \right) ds = \rho_0 \left( 1 - \frac{\alpha \rho_0}{L} \right) \left( \sin \theta_0'' + \frac{\alpha l}{L} \cos \theta_0'' \right)$$

et

$$(27) \quad \int_0^l \left( \sin \theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \cos \theta_0 \right) ds = \vartheta - \rho_0 \left( 1 - \frac{\alpha \rho_0}{L} \right) \left( \cos \theta_0'' - \frac{\alpha l}{L} \sin \theta_0'' \right).$$

Pour satisfaire aux relations des équations (26) et (27), je négligerai les termes en  $\alpha^2$  qui sont infiniment petits du second ordre, et pour chacune de ces deux relations j'annulerai séparément la partie indépendante de  $\alpha$ , puis celle qui est multipliée par la première puissance de  $\alpha$ . On obtient ainsi les quatre conditions suivantes :

$$(28) \quad \int_0^l \cos \theta_0 ds = \rho_0 \sin \theta_0'',$$

$$(29) \quad \int_0^l \sin \theta_0 ds = \vartheta - \rho_0 \cos \theta_0'',$$

$$(30) \quad - \int_0^l s \sin \theta_0 ds = - \rho_0^2 \sin \theta_0'' + \rho_0 l \cos \theta_0'',$$

$$(31) \quad \int_0^l s \cos \theta_0 ds = \rho_0^2 \cos \theta_0'' + \rho_0 l \sin \theta_0''.$$

Les deux conditions des équations (28) et (29) expriment que, dans la position naturelle des spires, leur centre doit se trouver sur l'axe du balancier, condition évidente a priori. En effet, en appelant  $x$  et  $y$  les coordonnées d'un point quelconque de la courbe extrême, dans sa position naturelle, on a

$$ds \cos \theta_0 = dx \quad \text{et} \quad ds \sin \theta_0 = dy.$$

Par conséquent, en admettant que le centre O primitif des spires (*fig. 5*) soit le centre du balancier, on a

$$\int_0^l \cos \theta_0 ds = \int dx = \rho_0 \sin \theta_0''$$

et

$$\int_0^l \sin \theta_0 ds = \int dy = \delta - \rho_0 \cos \theta_0'',$$

c'est-à-dire que les conditions (28) et (29) sont satisfaites. Passons maintenant aux deux autres équations (30) et (31). Or, on a, en intégrant par parties,

$$\int s \sin \theta_0 ds = \int s dy = sy - \int y ds$$

et

$$\int s \cos \theta_0 ds = \int s dx = sx - \int x ds.$$

Prenons maintenant les intégrales définies et, en observant que si  $x_1$  et  $y_1$  sont les coordonnées du centre de gravité de la courbe ABC non déformée, on a

$$\int_0^l y ds = ly_1 \quad \text{et} \quad \int_0^l x ds = lx_1,$$

nous aurons

$$\int_0^l s \sin \theta_0 ds = -\rho_0 l \cos \theta_0'' - ly_1$$

et

$$\int_0^l s \cos \theta_0 ds = \rho_0 l \sin \theta_0'' - lx_1.$$

Enfin substituant dans les équations (30) et (31) et faisant les réductions, on obtient

$$ly_1 = -\rho_0^2 \sin \theta_0''$$

et

$$-lx_1 = \rho_0^2 \cos \theta_0'',$$

ou

$$(32) \quad \gamma_1 = -\frac{\rho_0^2}{l} \sin \theta_0'',$$

$$(33) \quad x_1 = -\frac{\rho_0^2}{l} \cos \theta_0'',$$

conditions auxquelles doit satisfaire le centre de gravité de la courbe extrême. Celles-ci, quoique fort simples, peuvent être mises sous une forme plus palpable, plus facile à énoncer et qui permet de trouver très-facilement les courbes extrêmes qui les vérifient.

Imaginons, à cet effet, que la courbe ABC (*fig. 5*) soit telle qu'elle est naturellement avant toute déformation et que G soit son centre de gravité. En divisant l'équation (32) par l'équation (33) membre à membre, on a

$$\text{tang GOX} = \text{tang } \theta_0''.$$

Mais l'angle  $\theta_0'' = 180^\circ + \text{COY}$ . Donc

$$\text{tang GOX} = \text{tang COY}$$

et

$$(34) \quad \text{GOX} = \text{COY}.$$

Par conséquent, comme OX est perpendiculaire à OY, on voit déjà qu'il faut que OG soit perpendiculaire à OC.

En second lieu, si on élève au carré les deux membres des équations (32) et (33), puis qu'on ajoute, on obtient

$$(\text{OG})^2 = \left(\frac{\rho_0^2}{l}\right)^2$$

ou

$$(35) \quad \text{OG} = \frac{\rho_0^2}{l}$$

On peut donc énoncer très-simplement de la manière suivante les deux conditions auxquelles doit satisfaire, en construction, la courbe extrême ABC :

1°. Son centre de gravité doit se trouver sur la perpendiculaire menée par le centre des spires au rayon extrême de cette courbe, là où elle se réunit aux spires.

2°. La distance de ce centre de gravité au centre des spires doit être égale à  $\frac{r_0^2}{7}$ , c'est-à-dire à une troisième proportionnelle à la longueur de la courbe et au rayon des spires.

Je donnerai plus loin de nombreux exemples de courbes extrêmes satisfaisant à cette condition, et au sujet desquelles l'expérience est venue, ainsi qu'on le verra, confirmer pleinement les déductions théoriques. Quant à présent, je me borne à faire remarquer que, d'après la loi indiquée, le point de départ A étant, ainsi que cela sa pratique ordinairement, à environ la moitié du rayon, le point C sera généralement plus facile à placer dans le troisième quadrant YOX' que dans toute autre partie de la circonférence, et l'observation a conduit généralement à faire parcourir en effet à la courbe ABC un angle de 180 à 270 degrés autour du point O.

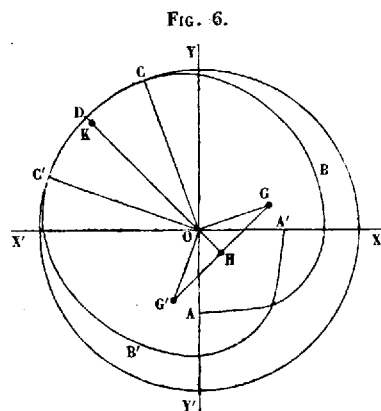
Il est à remarquer que la forme des courbes extrêmes est complètement indépendante des dimensions transversales de la lame et même de la longueur totale du spiral. Il suffit que celle-ci soit assez grande afin qu'on puisse négliger les puissances de  $\frac{\alpha s}{L}$  et de  $\frac{\alpha r_0}{L}$  supérieures à la première. Enfin, il est très-essentiel d'observer encore que cette forme est complètement indépendante de la position relative des deux courbes extrêmes l'une au-dessus de l'autre.

*Conditions relatives au centre de gravité du spiral.*

En remontant plus haut, j'ai fait voir qu'il était avantageux que le centre de gravité de tout le spiral fût, au moins en construction, placé sur l'axe du balancier. Or je vais établir que, non-seulement cette condition n'est pas incompatible avec celle d'où découle la forme des courbes extrêmes, mais qu'elle en est au contraire une conséquence directe, de sorte que, à cause de cette forme même, le terme que j'ai négligé dans le second membre de l'équation (3) devient, s'il est permis de s'exprimer ainsi, un infiniment petit du second ordre, d'une

part parce que les composantes Y et X sont infiniment petites et ensuite parce qu'il en est de même des coordonnées du centre de gravité général du spiral.

En effet, soit ABC (*fig. 6*) la courbe extrême dont le bout A est fixe et soit A'B'C' l'autre courbe extrême dont le bout A' est engagé dans



la virole du balancier. La figure suppose les choses dans l'état où elles sont avant toute déformation. Soit  $\text{COC}' = \epsilon$ ,  $\epsilon$  étant un angle quelconque.

On peut regarder le spiral comme formé de deux parties distinctes : la première, composée d'un nombre entier de spires circulaires commençant et finissant au point C et dont le centre de gravité est en O ; la seconde, comprenant les deux courbes extrêmes et l'arc CDC'. Cherchons le centre de gravité de cette seconde partie.

Or, si G et G' sont les centres de gravité respectifs des deux courbes extrêmes, lesquelles sont, comme on sait, égales et symétriques, le centre de gravité de leur ensemble se trouve au point H, milieu de GG'.

De plus, comme les angles COG, C'OG' sont droits, la ligne OH, bissectrice de GOG', prolongée jusqu'en D, est aussi la bissectrice de COC' et passe, par conséquent, par le centre de gravité K de l'arc CDC'. En outre, l'angle OGH est égal à COK ou à  $\frac{1}{2} \epsilon$ .

Appelons maintenant  $m$  le moment du poids des deux courbes extrêmes par rapport au point O et  $m'$  celui de l'arc CDC' par rapport

au même point. On a

$$m = 2l \times OH = 2l \times OG \sin \frac{1}{2}\xi,$$

ou, à cause de l'équation (35),

$$(36) \quad m = 2\rho_0^2 \sin \frac{1}{2}\xi.$$

D'un autre côté, en vertu de la loi qui donne le centre de gravité d'un arc de cercle, on a

$$m' = \rho_0 \times \text{corde } CC',$$

ou

$$(37) \quad m' = 2\rho_0^2 \sin \frac{1}{2}\xi,$$

et il résulte des équations (36) et (37) que

$$m = m',$$

et, par conséquent, que le centre de gravité de l'ensemble des deux courbes extrêmes et de l'arc CDC' est au point O, et, par suite, qu'il en est de même du centre de gravité de tout le spiral. Il est à remarquer que cette conséquence est indépendante de la grandeur de l'angle  $\xi$  ou de l'intervalle qui sépare les points C et C', ou, en d'autres termes, de la position relative des deux courbes extrêmes l'une au-dessus de l'autre.

Ainsi, grâce à la construction des courbes extrêmes, le centre de gravité du spiral non déformé se trouve sur l'axe du balancier. Mais ce n'est pas tout et l'on peut trouver, ainsi qu'il suit, les conditions nécessaires pour que, pendant la déformation, ce centre de gravité s'en éloigne le moins possible.

Supposons, pour ne pas multiplier les figures, que la *fig. 6* représente maintenant le spiral déformé et regardons encore celui-ci comme formé de deux parties : l'une, composée d'un nombre entier de spires circulaires, commençant et finissant au point C et dont le centre de gravité est toujours le centre O du balancier, puisque, d'après la forme des courbes extrêmes, le centre des spires reste invariable pendant la



déformation. L'autre portion du spiral est composée des deux courbes extrêmes et de l'arc de cercle CDC'. A cause que ces deux courbes extrêmes sont égales et symétriques, elles resteront encore égales et symétriques pendant la déformation. Par conséquent, G et G' étant leurs centres de gravité, les angles COG, C'OG' seront égaux quelle que soit d'ailleurs leur valeur; il en sera de même des deux lignes OG, OG'; le centre de gravité H de l'ensemble des deux courbes sera au milieu de GG', et la ligne OH, qui est bissectrice de l'angle GOG' étant prolongée jusqu'en D, sera aussi bissectrice de l'angle COC' et passera par conséquent aussi par le centre de gravité K de l'arc CC'.

Ce premier point établi, j'appelle  $(x_1)$ ,  $(y_1)$ , les coordonnées actuelles du centre de gravité G de la courbe ABC, lesquelles se réduisent à  $x_1$  et  $y_1$ , lorsque la déformation cesse. En conservant toutes les notations employées précédemment, on a, pour un point quelconque de la courbe ABC,

$$\int s \cos \theta ds = \int s dx = sx - \int x ds$$

et

$$(38) \quad \int_0^l s \cos \theta ds = l \rho \sin \theta'' - l(x_1).$$

D'un autre côté, en désignant par  $x_0$  ce qu'était l' $x$  de ce point avant la déformation, on a

$$\begin{aligned} \int s \cos \theta ds &= \int s \cos \left( \theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) ds = \int s \left( \cos \theta_0 - \frac{\alpha s}{L} \sin \theta_0 \right) ds \\ &= \int s dx_0 - \frac{\alpha}{L} \int s^2 \sin \theta_0 ds = sx_0 - \int x_0 ds - \frac{\alpha}{L} \int s^2 \sin \theta_0 ds. \end{aligned}$$

Les développements de cette dernière relation résultent, d'une part de la formule (15) et ensuite de ce qu'on peut négliger les puissances de  $\frac{\alpha s}{L}$  supérieures à la première. En passant aux limites, on a donc

$$(39) \quad \int_0^l s \cos \theta ds = l \rho_0 \sin \theta_0'' - lx_1 - \frac{\alpha}{L} \int_0^l s^2 \sin \theta_0 ds.$$

En égalant les seconds membres des équations (38) et (39), on en tire

$$(x_1) = x_1 + \rho \sin \theta'' - \rho_0 \sin \theta''_0 + \frac{\alpha}{Ll} \int_0^l s^2 \sin \theta_0 ds.$$

En remplaçant  $\rho$  et  $\theta''$  respectivement par  $\frac{\rho_0}{1 + \frac{\alpha \rho_0}{L}}$  et  $\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}$  et négligeant les puissances de  $\frac{\alpha \rho_0}{L}$  et de  $\frac{\alpha l}{L}$  supérieures à la première; puis mettant à la place de  $x_1$  sa valeur (33), la formule précédente devient

$$(40) (x_1) = -\frac{\rho_0^2}{L} \cos \theta''_0 - \frac{\alpha}{L} \rho_0^2 \sin \theta''_0 + \frac{\alpha}{L} \rho_0 l \cos \theta''_0 + \frac{\alpha}{lL} \int_0^l s^2 \sin \theta_0 ds.$$

Je vais maintenant chercher d'une manière tout à fait semblable la valeur de  $(y_1)$ . On a

$$\int s \sin \theta ds = \int s dy = sy - \int y ds$$

et

$$(41) \int_0^l s \sin \theta ds = -l\rho \cos \theta'' - l(y_1).$$

D'un autre côté, en désignant par  $y_0$  ce qu'était l' $y$  du point avant la déformation, on a

$$\begin{aligned} \int s \sin \theta ds &= \int s \sin \left( \theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) ds = \int s \left( \sin \theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \cos \theta_0 \right) ds \\ &= \int s dy_0 + \frac{\alpha}{L} \int s^2 \cos \theta_0 ds = sy_0 - \int y_0 ds + \frac{\alpha}{L} \int s^2 \cos \theta_0 ds. \end{aligned}$$

Il vient donc, en passant aux limites,

$$(42) \int_0^l s \sin \theta ds = -l\rho_0 \cos \theta''_0 - ly_1 + \frac{\alpha}{L} \int_0^l s^2 \cos \theta_0 ds.$$

En égalant les seconds membres des équations (41) et (42), on en

tire

$$(y_1) = y_1 - \rho \cos \theta'' + \rho_0 \cos \theta''_0 - \frac{\alpha}{lL} \int_0^l s^2 \cos \theta_0 ds.$$

En remplaçant  $\rho$  et  $\theta''$  respectivement par  $\frac{\rho_0}{1 + \frac{\alpha \rho_0}{L}}$  et  $\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}$  et négligeant les puissances de  $\frac{\alpha \rho_0}{L}$  et de  $\frac{\alpha l}{L}$  supérieures à la première, puis mettant à la place de  $y_1$  sa valeur (32), la formule précédente devient,

$$(43) (y_1) = -\frac{\rho_0^2}{l} \sin \theta''_0 + \frac{\alpha}{L} \rho_0^2 \cos \theta''_0 + \frac{\alpha}{L} \rho_0 l \sin \theta''_0 - \frac{\alpha}{lL} \int_0^l s^2 \cos \theta_0 ds.$$

D'un autre côté, au point C, la valeur de  $\theta$  avant la déformation est  $\theta''_0$  et, après la déformation,  $\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}$ . Au point C' la valeur de  $\theta$  avant la déformation est  $\theta''_0 + \xi + 2i\pi$ ,  $i$  étant un nombre entier, et après la déformation,  $\theta''_0 + \xi + 2i\pi + \frac{\alpha}{L}(L - l)$ . Donc  $\theta''_0 + \xi + \alpha - \frac{\alpha l}{L}$  est l'angle, plus petit que 360 degrés, formé par OC' avec OA, et en appelant ( $\xi$ ) la valeur de l'angle COC' pendant la déformation, on a

$$(44) \quad (\xi) = \xi + \alpha - \frac{2\alpha l}{L}.$$

De même, la valeur de l'angle plus petit que 360 degrés, formé par OA avec la bissectrice OD pendant la déformation, est la moyenne de celles relatives à OC et à OC' ou égale à

$$\theta''_0 + \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\alpha.$$

Par conséquent, comme l'angle HOA en diffère de 180 degrés, on a

$$(45) \quad \text{HOA} = \theta''_0 + \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\alpha - 180^\circ.$$

Or OH est la projection de OG sur sa direction, ou, ce qui revient au même, la projection de  $(x_1)$  moins celle de  $(y_1)$  sur cette même di-

rection OH. On a donc

$$OH = - (y_1) \cos HOA + (x_1) \sin HOA,$$

ou, à cause des équations (40), (43) et (45),

$$\begin{aligned} OH &= \cos \left( \theta''_0 + \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \alpha \right) \\ &\times \left( - \frac{\rho_0^2}{l} \sin \theta''_0 + \frac{\alpha}{L} \rho_0^2 \cos \theta''_0 + \frac{\alpha}{L} \rho_0 l \sin \theta''_0 - \frac{\alpha}{lL} \int_0^l s^2 \cos \theta_0 ds \right) \\ &- \sin \left( \theta''_0 + \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \alpha \right) \\ &\times \left( - \frac{\rho_0^2}{l} \cos \theta''_0 - \frac{\alpha}{L} \rho_0^2 \sin \theta''_0 + \frac{\alpha}{L} \rho_0 l \cos \theta''_0 + \frac{\alpha}{lL} \int_0^l s^2 \sin \theta_0 ds \right). \end{aligned}$$

Puis, en nommant (*m*) le moment du poids de l'ensemble des deux courbes extrêmes par rapport au point O, on a

$$(m) = 2l \times OH,$$

ou, à cause de la valeur précédente de OH et en faisant quelques réductions faciles,

$$\begin{aligned} (m) &= 2 \rho_0^2 \sin \left( \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \alpha \right) + \frac{2\alpha l}{L} \rho_0^2 \cos \left( \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \alpha \right) \\ &- \frac{2\alpha l}{L} \rho_0 l \sin \left( \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \alpha \right) - \frac{2\alpha}{L} \int_0^l s^2 \cos \left( \theta''_0 - \theta_0 + \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \alpha \right) ds, \end{aligned}$$

ou encore

$$(46) \left\{ \begin{aligned} (m) &= 2 \rho_0^2 \sin \left( \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \alpha \right) + \frac{2\alpha l}{L} \rho_0^2 \cos \left( \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \alpha \right) \\ &- \frac{2\alpha l}{L} \rho_0 l \sin \left( \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \alpha \right) \\ &- \frac{2\alpha}{L} \cos \left( \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \alpha \right) \int_0^l s^2 \cos (\theta''_0 - \theta_0) ds \\ &+ \frac{2\alpha}{L} \sin \left( \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \alpha \right) \int_0^l s^2 \sin (\theta''_0 - \theta_0) ds. \end{aligned} \right.$$

Maintenant, en appelant ( $m'$ ) le moment du poids de l'arc de cercle  $CC'$  par rapport à  $O$ , on a

$$(m') = \rho \times \text{corde } CC' = 2\rho^2 \sin \frac{1}{2}(\xi),$$

ou, en remplaçant  $\rho$  par  $\frac{\rho_0}{1 + \frac{\alpha\rho_0}{L}} = 1 - \frac{\alpha\rho_0}{L}$  et  $(\xi)$  par sa valeur (44),

$$(m') = 2\rho_0^2 \left(1 - \frac{\alpha\rho_0}{L}\right)^2 \sin \left(\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\alpha - \frac{\alpha l}{L}\right).$$

On a encore, en développant et négligeant, comme cela est permis, les termes qui contiennent les puissances de  $\alpha$  supérieures à la première,

$$(47) \quad (m') = 2\rho_0^2 \sin \left(\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\alpha\right) - \frac{2\alpha l}{L} \rho_0^2 \cos \left(\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\alpha\right) - \frac{4\alpha}{L} \rho_0^2 \sin \left(\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\alpha\right).$$

Pour que le centre de gravité du spiral reste au point  $O$  pendant le mouvement, il faut que pour toutes les valeurs de  $\alpha$ , ( $m$ ) et ( $m'$ ) soient égaux. Je vais donc évaluer les seconds membres des relations (46) et (47).

Or on voit tout de suite que le premier terme  $2\rho_0^2 \sin \left(\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\alpha\right)$  s'annule de part et d'autre et que le reste est divisible par  $\alpha$ , ce qui devait être, puisqu'on sait que pour  $\alpha = 0$  le centre de gravité du spiral est en  $O$ . Je divise donc de part et d'autre par  $\frac{2\alpha l}{L}$ , et il vient,

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\rho_0^2 \cos \left(\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\alpha\right) - \rho_0 l \sin \left(\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\alpha\right) \\ + \frac{2\rho_0^2}{l} \sin \left(\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\alpha\right) \\ = \frac{1}{l} \cos \left(\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\alpha\right) \int_0^l s^2 \cos(\theta'_0 - \theta_0) ds \\ - \frac{1}{l} \sin \left(\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\alpha\right) \int_0^l s^2 \sin(\theta'_0 - \theta_0) ds. \end{array} \right.$$

Or, il est à remarquer que, dans cette dernière relation, tous les termes contiennent comme facteur le sinus ou le cosinus de  $\frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\alpha$  et que l'angle  $\alpha$  n'y entre que sous la forme de ce sinus ou de ce cosinus. Pour que la relation ci-dessus soit satisfaite, quel que soit  $\alpha$ , il est donc nécessaire et suffisant que l'ensemble des termes multipliés par ce sinus et par ce cosinus soient nuls séparément, ce qui donne les deux conditions

$$(49) \quad \int_0^l s^2 \cos(\theta''_0 - \theta_0) ds = 2\rho_0^2 l$$

et

$$(50) \quad \int_0^l s^2 \sin(\theta''_0 - \theta_0) ds = \rho_0 l^2 - 2\rho_0^3.$$

Telles sont les deux conditions qui doivent être autant que possible satisfaites, afin que le centre de gravité du spiral ne s'éloigne pas du balancier. Elles dépendent de la forme des courbes extrêmes, mais nullement de leur écartement mutuel, car on voit qu'elles sont indépendantes de l'angle  $\epsilon$ .

Faute de pouvoir trouver à priori des courbes qui satisfassent aux deux conditions précédentes, on peut néanmoins indiquer la manière de vérifier assez simplement jusqu'à quel point les courbes extrêmes, déterminées d'après les règles précédemment exposées, satisfont aux relations (49) et (50).

En effet, si l'on rapporte la courbe ABC (*fig. 5*) à OC comme axe des  $y$  et à la perpendiculaire OG comme axe des  $x$  et que l'on appelle  $y'$  et  $x'$  les nouvelles coordonnées, on voit que les conditions (49) et (50) reviennent à

$$(51) \quad \int s^2 dx' = -2\rho_0^2 l,$$

$$(52) \quad \int s^2 dy' = \rho_0 l^2 - 2\rho_0^3,$$

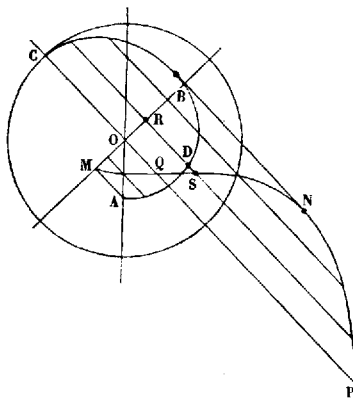
les intégrales étant prises depuis le point A jusqu'à C.

Or un premier moyen consiste à partager la courbe ABC en éléments suffisamment petits et à obtenir les valeurs approchées des intégrales en

formant pour chaque point de division les produits  $s^2 dx'$  et  $s^2 dy'$ . Mais il y a un autre moyen qui parle plus aux yeux et qui évite de longs calculs.

Supposons (*fig. 7*) que l'on projette tous les points de la courbe ABC sur l'axe des  $x$ , OB, et que sur chaque perpendiculaire DR on porte, à

Fig. 7.



partir de son pied R, une longueur RS égale à la longueur AD de la portion de la courbe ABC comprise entre l'origine A et le point D correspondant. On obtiendra ainsi une courbe MQSNP dont les ordonnées ne sont autre chose que les quantités désignées par  $s$ . Or, si l'on multiplie les deux membres de l'équation (51) par  $-\pi$ , on a

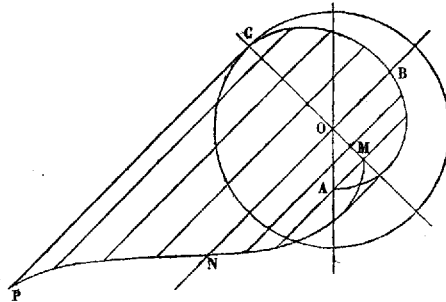
$$-\pi \int s^2 dx' = 2\pi \rho_0^2 l,$$

et il résulte de la *fig. 7* que cette condition revient à dire que le volume du solide engendré par la révolution de QNP autour de MOB moins celui engendré par la révolution de MOQ autour du même axe, doit être égal à  $2\pi \rho_0^2 l$  et, à cause du théorème de Guldin, on peut convertir cette condition en cette autre :

« La surface QNP multipliée par le rapport qui existe entre l'ordonnée de son centre de gravité et la longueur de la courbe ABC, diminuée de la surface MOQ multipliée par le rapport de l'ordonnée de son centre de gravité à la longueur de ABC, doit être égale au carré du rayon des spires. »

La condition (52) peut être transformée d'une manière analogue. Ainsi supposons (*fig. 8*) que l'on fasse pour l'axe des  $y$  ou OC ce

FIG. 8.



qui vient d'être effectué relativement à OB. On obtiendra une courbe MNP dont chaque point aura pour abscisse le  $s$  du point correspondant de la courbe ABC, et la condition exprimée par l'équation (52) reviendra à dire que le volume du solide engendré par la révolution de la surface MNPC tournant autour de MOC doit être égal à

$$\pi \rho_0 l^2 - 2\pi \rho_0^3,$$

et cette condition elle-même, à cause du théorème de Guldin, peut être convertie en cette autre :

« La surface MNPC multipliée par le rapport qui existe entre l'abscisse de son centre de gravité et le rayon des spires doit être égale à la moitié du carré dont le côté aurait pour longueur ABC, moins le carré du rayon des spires. »

En résumé, on voit que les courbes extrêmes indiquées par la théorie concourent à l'isochronisme, en satisfaisant aux deux conditions d'annuler toute pression contre l'axe du balancier et de placer le centre de gravité du spiral entier sur l'axe du balancier, et cela quelle que soit la position relative des deux courbes extrêmes l'une au-dessus de l'autre.

Mais ce n'est pas tout. Elles ont encore la propriété de faire disparaître certaines perturbations nuisibles pour l'isochronisme. Ainsi elles réalisent le spiral libre, comme on dit dans la pratique, c'est-à-dire celui dans lequel l'axe du balancier, n'éprouvant aucune pression, est



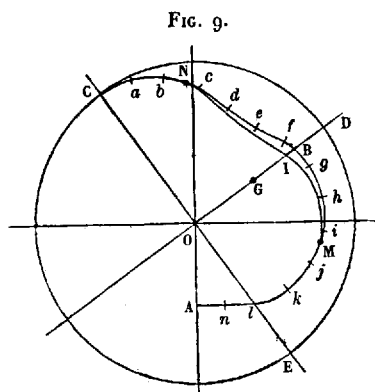
soustrait autant que possible au frottement et aux variations de celui-ci qui résultent de l'épaississement des huiles. De plus, le spiral s'ouvrant et se fermant toujours bien concentriquement à l'axe, on évite autant que possible la perturbation introduite par l'inertie du spiral.

Enfin une remarque importante trouve ici sa place. Certaines influences très-minimes, comme l'action des huiles, de l'échappement, de la résistance de l'air, etc., n'ont pu entrer dans cette théorie, et cela devait être, car on ne doit demander au calcul que ce qu'il peut donner. Mais on a vu que toutes les propriétés inhérentes à ces courbes extrêmes subsistent, quelle que soit leur position relative l'une au-dessus de l'autre. Il en résulte que, pour obtenir le dernier degré d'isochronisme pratique, on peut toujours joindre à leur emploi celui du moyen dû en principe à Pierre Leroy et qui consiste à chercher la longueur la plus favorable pour le spiral, puisqu'on peut disposer de l'angle que font entre eux les rayons où naissent les courbes extrêmes.

*Méthode pour trouver graphiquement les courbes extrêmes.*

Je vais maintenant expliquer la manière de trouver graphiquement, par un procédé simple, les courbes extrêmes qui conviennent à chaque cas.

Je suppose qu'on se donne la position du point A fixée par la quantité  $d$  et l'angle  $\theta_0$  qui détermine le point C (fig. 9).



On mène le rayon extrême OC et le rayon perpendiculaire OD sur

lequel doit se trouver le centre de gravité  $G$  de la courbe cherchée  $ABC$ .

Le dessin étant supposé à une échelle suffisamment grande, on cherchera d'abord à obtenir une courbe dont le centre de gravité soit sur  $OD$ . A cet effet on tracera une première courbe  $ABC$ , de sentiment, mais tangente en  $C$  aux spires. Puis, pour vérifier, on la partagera en éléments suffisamment petits et égaux, 10 ou 12 par exemple,  $Ca, ab, bc, cd$ , etc; le dernier  $An$  seul sera généralement plus petit que les autres. On marquera tout de suite le centre de gravité de chaque élément en le considérant comme une petite ligne droite ou, suivant les cas, comme un petit arc de cercle. Pour chaque centre de gravité on mesurera sa distance à  $OD$  et on modifiera celle relative à  $An$  en la multipliant par le rapport de  $An$  à la longueur commune de tous les autres arcs. Avec cette modification, il devra arriver que la somme des distances des centres de gravité qui sont d'un côté de  $OD$  soit égale à la somme des distances de ceux qui sont situés de l'autre côté. Si cette condition n'est pas remplie, il sera très facile de modifier l'une des deux portions de la courbe de manière à y arriver.

Ce premier point établi, il reste encore à satisfaire à la seconde condition, à savoir que la distance  $OG$  du centre de gravité au centre soit égale à  $\frac{\rho_0^2}{l}$ ,  $\rho_0$  étant le rayon des spires et  $l$  la longueur de la courbe  $ABC$ .

Or, pour obtenir l'écartement du centre de gravité de la courbe du point  $O$ , on mesurera celui des centres de gravité de tous les petits arcs,  $Ca, ab, bc$ , etc., de la ligne  $COE$ ; on modifiera celle de ces distances qui répond à  $An$  en la multipliant par le rapport de  $An$  à la longueur des autres petits arcs. On prendra la somme algébrique de toutes ces distances, en regardant comme positives celles qui sont à droite de  $CE$ , c'est-à-dire du même côté que  $B$ , et comme négatives celles qui sont de l'autre côté. On divisera cette somme par le nombre des éléments  $Ca, ab$ , etc. Ce quotient, qui donnera la distance  $OG$ , devra être égal à  $\frac{\rho_0^2}{l}$ . Si cette égalité n'a pas lieu, il sera facile de modifier la courbe de manière à y arriver, tout en continuant de satisfaire à la première condition.

En effet, supposons, pour fixer les idées, que la distance  $OG$  ainsi obtenue soit supérieure à  $\frac{r_0^2}{l}$ . On prendra de part et d'autre du point  $B$  deux arcs  $BM$  et  $BN$  tels, que le centre de gravité de leur ensemble soit sur  $OD$ , ce qu'il sera aisé de vérifier, et on remplacera l'arc  $MBN$  par un arc intérieur  $MIN$  dont le centre de gravité soit aussi sur  $OD$  et dont le moment par rapport à  $CE$  sera évidemment moindre. Il est évident qu'on arrivera ainsi très-vite au résultat cherché, et c'est en effet ainsi que j'ai déterminé tous mes types de courbes extrêmes.

On pourra ensuite réduire la courbe extrême à sa vraie grandeur par une courbe semblable tracée autour du centre.

On peut, ainsi que je l'ai fait voir, vérifier directement d'après les tracés que les courbes extrêmes ainsi déterminées satisfont en réalité à la condition que le centre des spires ne se déplace que d'une quantité tout à fait insensible, dans les limites extrêmes des oscillations du balancier. Afin de procéder à cette vérification, on tracera la courbe par arcs de cercle successifs,  $Ca$ ,  $ab$ ,  $bc$ , etc., en cherchant, pour chacun d'eux, le centre et le rayon correspondant. Cette décomposition de la courbe en arcs de cercle successifs est même toujours utile pour la tracer graphiquement d'une manière plus régulière. Puis on calculera les rayons de la courbe modifiée d'après la formule

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{\alpha}{L} \quad \text{ou} \quad r = \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r_0}.$$

A l'aide de ces nouveaux rayons, on tracera la courbe modifiée par arcs successifs à partir du point  $A$  où la tangente n'a pas changé de direction; puis, en arrivant au point  $C$ , on portera sur la normale une longueur égale au rayon modifié des spires, et ce centre devra se trouver toujours sensiblement au point  $O$ . C'est en effet ce que j'ai toujours obtenu.

Au sujet de cette vérification, il y a une remarque à faire. D'après la manière dont elle est effectuée, la courbe se trouve décomposée en une série d'arcs de cercle plus ou moins petits, dont les rayons varient brusquement de l'un à l'autre, c'est-à-dire d'une manière discontinue. Or, les calculs qui avaient conduit à la loi des courbes extrêmes expri-

mée par les formules (32) et (33) supposaient les rayons de courbure variant d'une manière continue. Dans l'espèce, cela n'a pas d'importance puisqu'il s'agit seulement d'une vérification à posteriori; mais d'ailleurs il est facile de reconnaître que la courbe décomposée en arcs de cercle de rayons variant brusquement de l'un à l'autre rentre dans les conditions qui ont servi à établir les formules (32) et (33). En effet, au point de rencontre et de tangence de deux arcs différents, les deux centres de courbure sont placés sur la normale commune. Or rien n'empêche d'échelonner sur cette normale une infinité de centres de courbure intermédiaires infiniment rapprochés les uns des autres et de substituer par la pensée au point de rencontre de deux arcs une infinité d'arcs infiniment petits décrits de chacun de ces centres de courbure intermédiaires. En opérant ainsi pour chaque rencontre de deux arcs, on aura, pour tout l'ensemble de la courbe une série de rayons de courbure et de centres de courbure variant tous d'une manière continue, et il est facile de reconnaître en revoyant tous les calculs et tous les raisonnements qui ont conduit aux formules (32) et (33) que rien n'y est contrarié par la nouvelle hypothèse dont je viens de parler. On voit, en effet, ces vérifications aboutir au résultat prévu de l'invariabilité du centre des spires.

*De l'isochronisme du spiral plat.*

Quant au spiral plat, qui est employé dans les montres, on peut appliquer, jusqu'à un certain point, les considérations qui viennent d'être développées tout au long pour le spiral cylindrique des chronomètres.

Ici il faut encore chercher si, pour toutes les valeurs par lesquelles passe l'angle  $\alpha$ , il est possible de déformer le spiral d'après la loi

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{\alpha}{L}$$

de manière que l'un des bouts restant fixe avec une inclinaison constante, l'autre extrémité, qui est celle la plus voisine du centre, satisfasse toujours comme position et inclinaison aux conditions de son encastrement dans la virole du balancier. Or, dans la pratique, cet

encastrement a toujours lieu de manière que le spiral vienne s'appliquer tangentiellement dans la virole. Le problème est alors celui-ci : « Chercher si, en déformant le spiral d'après la loi qui vient d'être énoncée et prenant sur le rayon extrême une longueur constante égale au rayon de la virole, on peut tomber sur un point ou centre occupant une position invariable quel que soit l'angle  $\alpha$ . »

Pour cela, il suffit de répéter les calculs qui ont été faits pour la courbe ABC depuis la formule (11) jusqu'aux formules (22) et (23). Ici, désignant par  $\xi'''$  et  $\eta'''$  les coordonnées du dernier centre qui doit correspondre à celui de la virole, on aura  $\xi'''$  et  $\eta'''$  par les mêmes formules (22) et (23) avec la seule modification suivante. Le dernier rayon à porter sur la normale correspondante étant celui de la virole,  $\rho_1$  par exemple, qui est d'une longueur fixe, le facteur  $\frac{\rho_0}{1 + \alpha \rho_0}$  qui

entre dans les formules (22) et (23) doit être remplacé par  $\rho_1$ ; de plus,  $l$  devient égal à  $L$ . On a alors, dans le cas actuel,

$$(53) \quad \xi''' = -\rho_1 \sin(\theta_0'' + \alpha) + \int_0^L \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds,$$

$$(54) \quad \eta''' = -\delta + \rho_1 \cos(\theta_0'' + \alpha) + \int_0^L \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds.$$

Cherchons maintenant les conditions pour que les coordonnées  $\xi'''$  et  $\eta'''$  soient nulles; soient

$$(55) \quad \int_0^L \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds = \rho_1 \sin(\theta_0'' + \alpha)$$

et

$$(56) \quad \int_0^L \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds = \delta - \rho_1 \cos(\theta_0'' + \alpha).$$

Ici nous sommes obligé d'imposer une condition, à savoir que l'angle  $\alpha$  soit suffisamment petit pour qu'on puisse remplacer son sinus par l'arc et son cosinus par l'unité. Dès lors on voit sur-le-champ que les rela-

tions (55) et (56) peuvent être mises sous la forme :

$$\int_0^L \cos \theta_0 ds - \frac{\alpha}{L} \int_0^L s \sin \theta_0 ds = \rho_1 \sin \theta_0'' + \alpha \rho_1 \cos \theta_0''$$

et

$$\int_0^L \sin \theta_0 ds + \frac{\alpha}{L} \int_0^L s \cos \theta_0 ds = \vartheta - \rho_1 \cos \theta_0'' + \alpha \rho_1 \sin \theta_0''.$$

En égalant séparément dans ces deux relations les parties indépendantes de  $\alpha$  et celles multipliées par  $\alpha$ , qui se trouvent dans les deux membres de chacune d'elles, on arrive au quatre conditions suivantes :

$$(57) \quad \int_0^L \cos \theta_0 ds = \rho_1 \sin \theta_0'',$$

$$(58) \quad \int_0^L \sin \theta_0 ds = \vartheta - \rho_1 \cos \theta_0'',$$

$$(59) \quad - \int_0^L s \sin \theta_0 ds = \rho_1 L \cos \theta_0'',$$

$$(60) \quad \int_0^L s \cos \theta_0 ds = \rho_1 L \sin \theta_0''.$$

Il est facile de reconnaître que les deux premières conditions (57) et (58) sont satisfaites par la construction même du spiral, ainsi que les formules (28) et (29) l'étaient pour le spiral cylindrique; il reste donc maintenant les deux conditions (59) et (60). Or, en intégrant par parties, on a

$$\int s \sin \theta_0 ds = \int s dy = sy - \int y ds$$

et

$$\int s \cos \theta_0 ds = \int s dx = sx - \int x ds.$$

Si donc on passe aux intégrales définies et qu'on appelle  $x_1$  et  $y_1$  les

coordonnées du centre de gravité du spiral, on a

$$- \int_0^L s \sin \theta_0 ds = \rho_1 L \cos \theta_0'' + Ly_1,$$

et

$$\int_0^L s \cos \theta_0 ds = \rho_1 L \sin \theta_0'' - Lx_1.$$

Enfin substituant dans les formules (59) et (60), on en déduit simplement

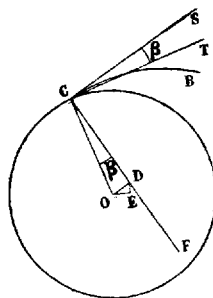
$$(61) \quad x_1 = 0 \quad \text{et} \quad y_1 = 0,$$

c'est-à-dire que le centre de gravité du spiral doit être sur l'axe du balancier.

J'ai supposé que, ainsi que cela a lieu ordinairement dans la pratique, le spiral vient se raccorder tangentiellement à la virole du balancier. Il est facile de démontrer que, lors même que cette rencontre aurait lieu sous un angle  $\epsilon$  quelconque, on arriverait toujours à la même condition  $x_1 = 0$  et  $y_1 = 0$ .

En effet, soient CB (*fig. 10*) la fin du spiral et C son extrémité. Soit

FIG. 10.



SCT =  $\epsilon$  l'angle des deux tangentes; ce sera aussi celui OCD des deux normales et l'on aura

$$(62) \quad \{ CD = \rho_1 \cos \epsilon \quad \text{et} \quad OD = \rho_1 \sin \epsilon \},$$

la ligne OD étant perpendiculaire à CD.

En appelant  $\xi_1$  et  $\eta_1$  les coordonnées du point D, elles se déduiraient des valeurs (53) et (54), en y changeant  $\rho_1$  en  $\rho_1 \cos \epsilon$ , et on aurait

$$(63) \quad \xi_1 = -\rho_1 \cos \epsilon \sin(\theta_0'' + \alpha) + \int_0^L \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds,$$

$$(64) \quad \eta_1 = -\delta + \rho_1 \cos \epsilon \cos(\theta_0'' + \alpha) + \int_0^L \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds.$$

Désignons maintenant par  $\xi'''$  et  $\eta'''$  les coordonnées cherchées du point O, et formons le triangle rectangle ODE dont le côté OE est parallèle à l'axe des  $x$  et celui DE à l'axe des  $y$ . En se reportant à la figure 5, il est facile de reconnaître que l'angle DOE, égal à EDF, est égal à  $\theta_0'' - 180^\circ$ , diminué d'un certain nombre entier de fois  $360^\circ$ .  
Donc

$$OE = -OD \cos(\theta_0'' + \alpha)$$

et

$$DE = -OD \sin(\theta_0'' + \alpha),$$

ou, à cause de la formule (62),

$$(65) \quad \begin{cases} OE = -\rho_1 \sin \epsilon \cos(\theta_0'' + \alpha) \\ \text{et} \\ DE = -\rho_1 \sin \epsilon \sin(\theta_0'' + \alpha). \end{cases}$$

Mais on a évidemment

$$\xi''' = \xi_1 - OE$$

et

$$\eta''' = \eta_1 - DE.$$

Il vient donc, en ayant égard aux formules (63), (64) et (65),

$$(66) \quad \xi''' = -\rho_1 \sin(\theta_0'' - \epsilon + \alpha) + \int_0^L \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds,$$

$$(67) \quad \eta''' = -\delta + \rho_1 \cos(\theta_0'' - \epsilon + \alpha) + \int_0^L \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds.$$



En procédant comme cela a été fait précédemment, on voit que, pour que  $\xi'''$  et  $\eta'''$  soient nulles dans les petites oscillations, il faut que les quatre conditions suivantes soient satisfaites, savoir :

$$\begin{aligned} \int_0^L \cos \theta_0 ds &= \rho, \sin(\theta_0'' - \mathfrak{E}), \\ \int_0^L \sin \theta_0 ds &= \vartheta - \rho, \cos(\theta_0'' - \mathfrak{E}), \\ - \int_0^L s \sin \theta_0 ds &= \rho, L \cos(\theta_0'' - \mathfrak{E}), \\ \int_0^L s \cos \theta_0 ds &= \rho, L \sin(\theta_0'' - \mathfrak{E}). \end{aligned}$$

Les deux premières conditions sont encore remplies par la construction même du spiral. Quant aux deux dernières, en les développant exactement comme dans le cas précédent, on est conduit à

$$x_1 = 0, \quad \gamma_1 = 0.$$

On voit par là que, pour le spiral plat ordinaire, l'isochronisme ne peut avoir lieu que pour de petites oscillations. Mais il n'en est plus de même du spiral dit *spiral ramené* parce qu'il est terminé par une courbe ramenée vers le centre que l'on peut rendre isochrone pour de grandes amplitudes dans les vibrations du balancier. En prenant pour courbe extrême une des courbes théoriques dont il a été question précédemment, le mouvement du spiral s'effectue concentriquement à l'axe; la pression contre celui-ci est sensiblement annulée et l'on obtient de bonnes conditions d'isochronisme.

#### *Allongements et raccourcissements proportionnels.*

On peut se demander quels sont les allongements et les raccourcissements proportionnels que subit le spiral pendant les déformations. Or on voit tout de suite que, en appelant  $i$  ce raccourcissement ou cet allongement, on a

$$(68) \quad i = \frac{e}{2} \frac{\alpha}{L}.$$

car il est égal à

$$\frac{e}{2} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{e}{2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Il est donc constant dans toute l'étendue du spiral, proportionnel à l'épaisseur du fil et à l'angle de rotation, et en raison inverse de la longueur de ce fil.

On obtient ici, sur le travail de déformation du spiral, des résultats tout à fait analogues à ceux auxquels j'étais parvenu dans mon Mémoire sur les ressorts en acier employés dans les chemins de fer.

En effet, soit  $a$  la largeur du fil du spiral. Considérons dans sa section transversale un élément infiniment mince, ayant pour hauteur  $a$  et sa distance à l'axe neutre égale à  $v$ ; l'épaisseur de cet élément sera  $dv$ . Soient  $\rho$  le rayon de courbure actuel correspondant à cette section et  $r$  le rayon correspondant de fabrication. La force attractive ou répulsive, agissant sur les faces latérales de cet élément, sera

$$Eavdv \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} \right).$$

L'allongement proportionnel est  $v \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} \right)$ , la longueur primitive était  $ds$ . Donc, en passant du rayon  $\rho$  à  $\rho + d\rho$ , sa longueur s'accroît de  $vd \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} \right) ds$  et le travail élémentaire développé par ce petit prisme est

$$Eav^2 dv \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} \right) d \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} \right) ds.$$

Si donc  $\rho_0$  et  $\rho_1$  sont les rayons de courbure extrêmes dans les limites de la déformation, le travail total développé par ce solide élémentaire sera

$$\frac{Eav^2 dv}{2} \left[ \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\rho_1} \right)^2 - \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\rho_0} \right)^2 \right] ds.$$

Si l'on considère la section entière du fil ayant la longueur  $ds$ , le travail aura pour expression (en faisant attention que  $\int Eav^2 dv = M$ )

$$\frac{M}{2} \left[ \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\rho_1} \right)^2 - \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\rho_0} \right)^2 \right] ds.$$

Mais on sait qu'en général

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} = \pm \frac{\alpha}{L},$$

$\alpha$  étant l'angle de rotation correspondant. Donc ce travail est égal à

$$\frac{M}{2L^2} (\alpha_1^2 - \alpha_0^2) ds,$$

$\alpha_1$  et  $\alpha_0$ , étant les angles de rotation du balancier répondant à  $\rho_1$  et  $\rho_0$

Pour avoir le travail total absorbé par le spiral, il faut intégrer par rapport à  $ds$ , depuis 0 jusqu'à  $L$ . Donc enfin ce travail total est

$$(69) \quad \frac{M}{2L} (\alpha_1^2 - \alpha_0^2).$$

Appelons  $i_1$  et  $i_0$  les allongements proportionnels répondant à  $\alpha_1$  et à  $\alpha_0$ . D'après l'équation (68) on peut substituer dans l'équation (69) à  $\alpha_1$  et  $\alpha_0$  respectivement  $\frac{2Li_1}{e}$  et  $\frac{2Li_0}{e}$ , d'où résulte cette autre expression du travail :

$$\frac{2ML}{e^2} (i_1^2 - i_0^2).$$

Remplaçons-y  $M$  par  $\frac{Eae^3}{12}$  (en supposant la section rectangulaire) et nous aurons pour le travail

$$\frac{EaeL}{6} (i_1^2 - i_0^2)$$

ou

$$\frac{EV}{6} (i_1^2 - i_0^2),$$

en appelant  $V$  le volume du spiral. Ainsi, d'une manière générale, le travail exigé pour la déformation de celui-ci dépend uniquement de son volume ou de son poids et des allongements qu'on lui fait subir, mais nullement de ses dimensions particulières.

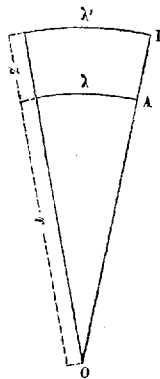
*De l'effet de la température sur le spiral.*

On sait que les variations de la température influent sur la marche d'un chronomètre ou d'une montre. On a déjà combattu cette cause d'irrégularité, quant au balancier, par l'emploi du balancier compensateur. Je vais ici m'occuper de l'influence exercée sur le spiral lui-même.

Je suppose un spiral construit suivant les lois exposées dans tout ce qui précède. Imaginons que ce spiral, fixé par une de ses extrémités comme d'habitude, soit libre de l'autre et que sa température varie. Je vais d'abord chercher ce que sera sa nouvelle forme, en admettant, comme on le fait généralement, que, dans un corps homogène libre soumis à un réchauffement ou à un refroidissement, la dilatation linéaire, positive ou négative, soit la même dans toutes les directions.

Il est facile de démontrer que les déformations seront telles, que tous les rayons de courbure varieront dans le rapport même de la dilatation linéaire que j'appellerai  $\epsilon$ , rapportée à l'unité de longueur. En effet, soient (*fig. 11*)  $\lambda_0$  et  $\lambda'_0$  les longueurs de deux éléments cor-

FIG. 11.



respondant, dans l'état primitif, à un même centre de courbure O, et dont les rayons de courbures sont

$$OA = r_0 \quad \text{et} \quad OB = r_0 + z_0.$$

On a

$$r_0 : \lambda_0 :: z_0 : \lambda'_0 - \lambda_0$$

ou

$$r_0 = \frac{\lambda_0 z_0}{\lambda'_0 - \lambda_0}$$

Après la dilatation,  $r_0, \lambda_0, \lambda'_0, z_0$  sont devenus  $r, \lambda, \lambda'$  et  $z$  et l'on a

$$r = \frac{\lambda z}{\lambda' - \lambda}$$

Mais

$$\lambda = (1 + \varepsilon) \lambda_0,$$

$$\lambda' = (1 + \varepsilon) \lambda'_0,$$

$$z = (1 + \varepsilon) z_0.$$

Donc

$$r = (1 + \varepsilon) \frac{\lambda_0 z_0}{\lambda'_0 - \lambda_0}$$

ou

$$r = (1 + \varepsilon) r_0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ce premier point établi, je vais chercher quelle doit être la forme des courbes extrêmes pour que, dans la déformation produite par la dilatation, l'extrémité que j'ai supposée libre du spiral vienne d'elle-même aboutir précisément sur le cercle de la virole et rencontre celui-ci sous l'angle primitif donné d'avance, afin que les changements de température ne produisent aucun effort contre les points d'attache. En recommençant le raisonnement qui a été fait plus haut à propos de la déformation résultant des oscillations du balancier, on reconnaît exactement de même qu'il faut et qu'il suffit que la courbe extrême soit telle, que, dans la déformation produite par la dilatation, le centre des spires reste sur l'axe du balancier. Le calcul, dans les deux cas, offre une grande analogie quant à la marche, et j'emploierai les mêmes notations et la même figure qui est la *fig. 5*. Il suffit seulement d'observer que la courbe déformée l'est d'après la loi de la dilatation et qu'en

conséquence

$$(70) \quad ds = (1 + \varepsilon) ds_0.$$

De plus, comme  $dr = (1 + \varepsilon) dr_0$ , on voit que

$$\frac{ds}{dr} = \frac{ds_0}{dr_0},$$

ou bien

$$d\theta = d\theta_0.$$

Par suite

$$\theta = \theta_0.$$

Je n'ajoute pas de constante, attendu que les valeurs de  $\theta$  et de  $\theta_0$  sont les mêmes au point fixe. Le calcul se conduit maintenant tout à fait comme dans le cas que je viens de rappeler. En appelant encore  $\xi$  et  $\eta$  les coordonnées du centre de courbure d'un point quelconque de la courbe extrême déformée, on a

$$(71) \quad \begin{cases} d\xi = -(1 + \varepsilon) dr_0 \sin \theta_0, \\ d\eta = (1 + \varepsilon) dr_0 \cos \theta_0. \end{cases}$$

$$(72) \quad \begin{cases} \xi' = -r' \sin \theta'_0 = -(1 + \varepsilon) r'_0 \sin \theta'_0, \\ \eta' = -\vartheta' + r' \cos \theta'_0 = -\vartheta' + (1 + \varepsilon) r'_0 \cos \theta'_0. \end{cases}$$

$$(73) \quad \begin{cases} \xi'' = -(1 + \varepsilon) r'_0 \sin \theta'_0 - (1 + \varepsilon) \int \sin \theta_0 dr_0, \\ \eta'' = -\vartheta' + (1 + \varepsilon) r'_0 \cos \theta'_0 + (1 + \varepsilon) \int \cos \theta_0 dr_0. \end{cases}$$

$$(74) \quad \begin{cases} \xi''' = \xi'' - (\rho - r'') \sin \theta'' \\ = \xi'' - (1 + \varepsilon) \rho_0 \sin \theta''_0 + (1 + \varepsilon) r''_0 \sin \theta''_0, \\ \eta''' = \eta'' + (\rho - r'') \cos \theta'' \\ = \eta'' + (1 + \varepsilon) \rho_0 \cos \theta''_0 - (1 + \varepsilon) r''_0 \cos \theta''_0. \end{cases}$$

Remplaçant dans  $\xi'''$  et  $\eta'''$ ,  $\xi''$  et  $\eta''$  par leurs valeurs (73) et intégrant

par parties,  $\int \sin \theta_0 dr_0$  et  $\int \cos \theta_0 dr_0$ , on a finalement

$$(75) \quad \xi''' = - (1 + \varepsilon) \rho_0 \sin \theta_0'' + (1 + \varepsilon) \int \cos \theta_0 ds,$$

$$(76) \quad \eta''' = - \delta + (1 + \varepsilon) \rho_0 \cos \theta_0'' + (1 + \varepsilon) \int \sin \theta_0 ds.$$

Il faut que  $\xi'''$  et  $\eta'''$  soient nulles, pour toutes les valeurs de  $\varepsilon$ . On doit donc évaluer à zéro les seconds membres des équations (75) et (76). En les simplifiant à l'aide des relations (28) et (29), on voit que la première condition est satisfaite d'elle-même et que la seconde conduit à

$$(77) \quad \delta = 0,$$

qui correspond à une courbe extrême partant du centre même des spires.

Ainsi, en prenant pour courbe extrême une courbe théorique partant de l'axe même du balancier, il arrivera que, par les changements de température, ses extrémités n'exerceront aucun effort contre l'axe du balancier, puisque, si un des bouts était fixe comme d'habitude et l'autre libre, celui-ci viendrait de lui-même remplir les conditions de position et d'inclinaison qui lui sont assignées.

Mais ce n'est pas tout et je vais démontrer que, le spiral étant déformé par le changement de température, les courbes extrêmes remplissent encore les conditions théoriques suivant lesquelles elles ont été construites.

En effet, appelons  $(x_1)$  et  $(y_1)$  les coordonnées du centre de gravité de la courbe extrême déformée par la dilatation et  $x_1$  et  $y_1$  celles du centre de gravité de la même courbe non déformée par la dilatation, et supposons qu'on ait pris pour axes coordonnés deux axes rectangulaires passant par le centre des spires, celui des  $x$  étant mené par le centre de gravité de la courbe non déformée et celui des  $y$  passant, par conséquent, par le point C, où la courbe extrême se raccorde avec les spires.

On a, par rapport à la courbe déformée,

$$\int s \sin \theta ds = \int s dy = sy - \int y ds,$$

et, en intégrant dans toute l'étendue de la courbe extrême,

$$(78) \quad \int_0^l s \sin \theta ds = -l\rho \cos \theta'' - l(y_1).$$

D'un autre côté, en comparant les points correspondants des deux courbes, déformée et non déformée, on a

$$s = (1 + \varepsilon)s_0; \quad ds = (1 + \varepsilon)ds_0; \quad l = (1 + \varepsilon)l_0,$$

$$\theta = \theta_0.$$

Donc

$$\int_0^l s \sin \theta ds = (1 + \varepsilon)^2 \int_0^{l_0} s_0 \sin \theta_0 ds_0$$

et

$$(79) \quad \int_0^l s \sin \theta ds = (1 + \varepsilon)^2 (-l_0 \rho_0 \cos \theta''_0 - l_0 y_1).$$

En égalant les seconds membres des équations (78) et (79) et faisant attention que  $l\rho \cos \theta'' = (1 + \varepsilon)^2 l_0 \rho_0 \cos \theta''_0$ , il reste

$$l(y_1) = (1 + \varepsilon)^2 l_0 y_1;$$

et comme  $y_1 = 0$ , on voit que

$$(80) \quad (y_1) = 0.$$

De même, on a

$$\int s \cos \theta ds = \int s dx = sx - \int x ds.$$

Donc

$$(81) \quad \int_0^l s \cos \theta ds = l\rho \sin \theta'' - l(x_1).$$

D'un autre côté,

$$(82) \quad \int_0^l s \cos \theta ds = (1 + \varepsilon)^2 \int_0^{l_0} s_0 \cos \theta_0 ds_0 = (1 + \varepsilon)^2 (l_0 \rho_0 \sin \theta''_0 - l_0 x_1).$$



Egalant les seconds membres des équations (81) et (82) et remarquant que  $l\rho \sin \theta''$  se détruit avec  $(1 + \varepsilon)^2 l_0 \rho_0 \sin \theta''_0$ , il reste

$$l(x_1) = (1 + \varepsilon)^2 l_0 x_1;$$

mais  $x_1 = \frac{\rho_0^2}{l_0}$ ; donc

$$l(x_1) = (1 + \varepsilon)^2 \rho_0^2 = \rho^2$$

ou

$$(83) \quad (x_1) = \frac{\rho^2}{l}.$$

Les relations (82) et (83) montrent donc que les courbes extrêmes remplissent les conditions relatives à l'isochronisme.

#### *De l'influence du frottement du balancier.*

Il est généralement reconnu que pour que les frottements du balancier soient négligeables, il convient que ses oscillations soient les plus grandes possibles.

Ceci résulte de la théorie. En effet, considérons le balancier alors qu'il s'éloigne de sa position d'équilibre, et soit  $\mu$  le moment par rapport à son axe des forces de frottement quelles qu'elles soient. Dans cette période, le moment  $\mu$  s'ajoute à l'action du spiral et on a

$$(84) \quad A \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = - \frac{M \alpha}{L} - \mu,$$

d'où l'on tire en multipliant par  $2 d\alpha$ , intégrant et déterminant la constante de telle sorte que la vitesse soit nulle pour  $\alpha = \alpha_0$ ,

$$A \frac{d\alpha^2}{dt^2} = \frac{M}{L} (\alpha_0^2 - \alpha^2) + 2\mu (\alpha_0 - \alpha)$$

et

$$(85) \quad dt = \sqrt{\frac{A}{\frac{M}{L} (\alpha_0^2 - \alpha^2) + 2\mu (\alpha_0 - \alpha)}} d\alpha.$$

Si l'angle  $\alpha_0$  n'est pas très-petit, le terme  $2\mu (\alpha_0 - \alpha)$  est extrêmement

inférieur à  $\frac{M}{L}(\alpha_0^2 - \alpha^2)$  et l'on peut écrire :

$$dt = \sqrt{\frac{AL}{M(\alpha_0^2 - \alpha^2)}} \left(1 - \frac{2\mu L}{M} \frac{1}{\alpha_0 + \alpha}\right)^{\frac{1}{2}} d\alpha = \sqrt{\frac{AL}{M(\alpha_0^2 - \alpha^2)}} \left(1 - \frac{\mu L}{M} \frac{1}{\alpha_0 + \alpha}\right) d\alpha$$

ou

$$(86) \quad dt = \sqrt{\frac{AL}{M}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}} - \frac{\mu L}{M} \sqrt{\frac{AL}{M}} \frac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}} \frac{1}{\alpha_0 + \alpha} d\alpha.$$

Je vais maintenant chercher le temps que le balancier emploierait à aller de sa position d'équilibre à celle qui correspond à  $\alpha = \alpha_0$ . Pour cela, il faut intégrer l'expression précédente. Or l'intégration, entre ces deux limites, de la première partie,  $\sqrt{\frac{AL}{M}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}}$ , donne, comme on sait,  $\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{AL}{M}}$ . Reste la seconde partie, savoir :

$$- \frac{\mu L}{M} \sqrt{\frac{AL}{M}} \frac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}} \frac{1}{\alpha_0 + \alpha} d\alpha,$$

laquelle s'intègre aisément en la transformant en fraction rationnelle, et l'on trouve pour son intégrale indéfinie, en négligeant la constante,

$$\frac{2\mu L}{M} \sqrt{\frac{AL}{M}} \frac{1}{\alpha_0} \frac{\alpha}{\alpha + \alpha_0 - \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}}.$$

Pour  $\alpha = 0$ , cette expression se présente sous la forme  $\frac{0}{0}$ ; mais on obtient facilement sa vraie valeur en cherchant les dérivées du numérateur et du dénominateur. On trouve ainsi, pour l'intégrale, depuis  $\alpha = 0$ , jusqu'à  $\alpha = \alpha_0$ ,

$$(87) \quad - \frac{\mu L}{M} \sqrt{\frac{AL}{M}} \frac{1}{\alpha_0},$$

ce qui montre que, dans la demi-oscillation ascendante, la durée de celle-ci est diminuée, par le fait du frottement, d'une quantité

égale à

$$\frac{\mu L}{M} \sqrt{\frac{AL}{M}} \frac{1}{\alpha_0}$$

ou d'une fraction d'elle-même égale à

$$\frac{2\mu L}{M} \frac{\pi}{\alpha_0}$$

Quand le balancier revient vers sa position d'équilibre, le frottement agit en sens inverse du spiral, et dans cette demi-oscillation descendante on doit changer  $\mu$  en  $-\mu$  et, à cette différence près, on arrive encore à la relation (85). Seulement il faut aussi, dans celle-ci, changer le signe du radical, attendu que  $d\alpha$  est négatif et que  $dt$  doit être positif.

En ayant égard à ces observations, le reste se termine de la même manière et l'on trouve que la durée de cette demi-oscillation est égale à  $\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{AL}{M}}$ , augmentée cette fois, au lieu d'être diminuée de la même quantité

$$\frac{\mu L}{M} \sqrt{\frac{AL}{M}} \frac{1}{\alpha_0}$$

Donc le temps définitif qui s'écoule entre deux passages successifs du balancier par sa position d'équilibre ou le temps d'une oscillation est égal à  $\pi \sqrt{\frac{AL}{M}}$ , c'est-à-dire le même que s'il n'y avait pas de frottement. Seulement on ne doit pas oublier qu'il faut pour cela que l'amplitude des oscillations soit assez grande et que le frottement soit suffisamment petit.

On s'explique très-bien ce fait signalé par le calcul, que la durée de la demi-oscillation ascendante soit diminuée par le frottement, tandis que celle de la demi-oscillation descendante est augmentée. En effet, quand le balancier s'éloigne de sa position d'équilibre, il est animé, à chaque instant, d'une vitesse plus grande que celle qu'il aurait s'il faisait, sans frottement, des oscillations de la même amplitude, sans quoi le frottement l'empêcherait d'arriver au même angle  $\alpha_0$ . Donc la durée de cette demi-oscillation est diminuée par le frottement. Au contraire,

quand le balancier revient à sa position d'équilibre, il a en chaque point une vitesse moindre que celle dont il serait animé s'il avait parcouru sans frottement le même angle, depuis la même limite  $\alpha_0$ , et par conséquent la durée de cette demi-oscillation est augmentée par le frottement.

A cause du frottement, s'il n'y avait pas l'influence de l'échappement, l'amplitude des oscillations irait continuellement en diminuant. Il est facile de trouver quel serait l'angle  $\alpha_1$ , qui succéderait à  $\alpha_0$ , à l'autre limite de l'oscillation. On a alors, en changeant dans la formule (84)  $\mu$  en  $-\mu$  et faisant  $\frac{d\alpha}{dt} = 0$ ,

$$\frac{M}{L}(\alpha_0^2 - \alpha_1^2) - 2\mu(\alpha_0 - \alpha_1) = 0;$$

d'où

$$(88) \quad \alpha_1 = -\alpha_0 + \frac{2\mu L}{M},$$

ou encore, comme on a

$$G = \frac{M\alpha_0}{L},$$

G étant le moment de l'action du spiral contre le balancier, on voit que

$$(89) \quad \alpha_1 = -\alpha_0 \left(1 - \frac{2\mu}{G}\right).$$

La formule (88) fait voir que le frottement diminue d'autant moins l'amplitude des oscillations, que le spiral est plus court et que son moment d'élasticité est plus grand.

La longueur déjà considérable de ce Mémoire a rendu nécessaire la suppression de ce qui restait du travail que j'ai présenté à l'Académie des Sciences. Mais je vais expliquer très-succinctement en quoi consistait cette dernière partie.

Elle comprenait : 1° la démonstration de la concordance entre les principes qui ont servi de base à la théorie du spiral et la théorie mathématique de l'élasticité; 2° les très-nombreuses expériences par les-

quelles j'ai constaté son accord, dans tous les cas possibles, avec l'observation.

Ces vérifications ont porté sur deux résultats principaux, savoir : 1° la formule qui donne la durée des oscillations du balancier et du spiral, et en particulier la proportionnalité, comme pour le pendule, entre cette durée et la racine carrée de la longueur développée du spiral; 2° l'influence exercée par la forme théorique des courbes extrêmes sur l'isochronisme.

Outre que cet accord a toujours existé d'une manière aussi parfaite qu'on pouvait le désirer, il est remarquable que les résultats de la théorie se trouvent toujours cadrer d'une manière singulière avec les notions générales qui sont admises dans la pratique.

Ainsi voici quelques citations :

D'abord un extrait du *Traité d'Horlogerie* de Moinet, ancien Président de la Société Chronométrique de Paris (1855). On y lit (t. I, p. 92) :

« L'isochronisme des vibrations ne se trouve que dans les spiraux dont les tours sont nombreux et par suite plus serrés; ils s'ouvrent et se ferment ainsi plus concentriquement et ne tendent que faiblement à porter les pivots vers un côté quelconque de leurs trous, etc. »

On lit dans le même ouvrage (t. II, p. 424) :

« En raccourcissant un spiral trop long, il convient d'en ramener les deux extrémités vers le centre par une courbe adoucie et formée peu à peu au moyen de pinces à spiraux chauffées convenablement et qu'on laisse même refroidir dans leur action, afin que la lame conserve sa courbure. Celle-ci emploie un demi-tour et même trois quarts de tour pour se rapprocher du centre à environ la moitié du rayon des autres tours restés concentriques, etc., etc.

» La courbure des extrémités du spiral a pour but de le faire développer plus cylindriquement, et d'éviter qu'il ne se jette de côté dans les vibrations, ce qui changerait l'équilibre de l'ensemble, la distribution de sa puissance et même l'isochronisme des arcs de diverses étendues, etc. »

Dans le *Traité des Échappements* de Claudius Saunier (1855), ancien Directeur de l'école d'Horlogerie de Mâcon, on lit (p. 137) :

« Plus un spiral est long, plus il est propre à donner l'isochronisme

des vibrations et moins il occasionne de frottement aux pivots du balancier, son travail se faisant bien plus concentriquement à ses pivots qu'avec un spiral court qui les repousse fortement contre les parois du trou. »

Dans le même ouvrage, p. 296, on lit :

« Deux écoles, si nous pouvons parler ainsi, se sont formées à propos de l'isochronisme du spiral: l'ancienne, qui cherche l'isochronisme dans la seule longueur de la lame; la nouvelle, qui le trouve, et plus facilement que l'ancienne, dans la longueur combinée avec la forme, c'est-à-dire par les courbes qui terminent cette lame. »

Et plus loin, p. 300, on lit :

« Les courbes intérieures et extérieures, ainsi que nous l'avons déjà recommandé à propos de l'échappement Duplex, doivent être faites avec beaucoup de soin; c'est en grande partie à la forme de ces courbes que le spiral doit son développement régulier et de n'être pas jeté de côté par les grandes vibrations. L'observation constante du jeu des spiraux, après avoir préalablement étudié leur forme, et des essais faits avec intelligence, apprennent promptement à l'ouvrier quelles sont les courbures qui régularisent le mieux ce développement. »

On lit encore dans le journal *la Tribune chronométrique*, numéro du 15 janvier 1851, p. 17 :

« Les artistes doivent s'attacher particulièrement à bien faire les courbes concentriques des deux extrémités du spiral qui doivent entrer l'une dans la virole du balancier, et l'autre dans le piton fixé sur le coq: car c'est de cette courbure que dépend en partie l'uniformité de durée dans les grandes comme dans les petites vibrations du balancier, et c'est là, comme nous l'avons dit, ce qui constitue l'isochronisme. »

On remarquera que tous ces principes généraux, qui sont éclos pour ainsi dire de l'expérience et de la pratique, sont une conséquence directe de ma théorie.

Je mentionnerai ici deux faits intéressants. Parmi les constructeurs qui ont bien voulu me demander communication de mes courbes, M. Jacob, chronométrier très-connu de Dieppe, m'a informé qu'un des types que je lui avais remis se trouvait être identique avec une forme de courbe à laquelle il avait été conduit par tâtonnements il y a une douzaine d'années et qu'il avait appliquée à un certain nombre d'ap-

pareils qu'il avait livrés à la marine. Quoique les spiraux n'eussent guère que six tours, ils avaient très-bien fonctionné, les appareils avaient satisfait à toutes les épreuves imposées par l'État et, après plusieurs années de service, leur marche qu'il avait relevée, était encore très-bonne. C'est le type qui répond à un angle de 255 degrés autour du centre.

J'ajouterai encore que, relativement aux spiraux plats à courbe extrême ramenée, M. Garnier, horloger de la Marine, m'ayant prié de lui faire, d'après la théorie, un tracé de courbe extrême dans des conditions données, celle que je lui ai remise s'est trouvée coïncider, à une différence insignifiante près, avec celle que les résultats d'une longue expérience lui avaient indiquée comme étant la plus convenable.

