J. LIOUVILLE

Égalités entre des sommes qui dépendent de la fonction numérique E (x)

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 287-288.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5__287_0>

ÉGALITÉS

ENTRE DES SOMMES QUI DÉPENDENT DE LA FONCTION NUMÉRIQUE $E(x)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Je désigne ici par $E(x)$ l'entier contenu dans x, en sorte que si l'on pose

$$x = E(x) + r,$$

le reste r se réduira à zéro quand x sera un entier, mais dans tous les autres cas aura une valeur positive essentiellement plus petite que 1.

Cela posé, soit m un nombre impair donné. Désignons par s un entier impair qui prenne les valeurs successives 1, 3, 5, 7,..., m, et formons la somme

$$\sum (-1)^{\frac{s-1}{2}} E\left(\frac{m+s}{2s}\right),$$

relative à ces diverses valeurs de s. Il est clair que dans cette somme les termes sont alternativement positifs et négatifs : quant aux quantités placées sous le signe E, ce sont des fractions rationnelles.

Au contraire, les termes sont tous positifs, et il entre sous le signe E, un radical carré, dans la somme

$$\sum E\left(\frac{1+\sqrt{2m-t^2}}{2}\right),$$

où t est un entier impair auquel on donne les valeurs successives 1, 3, 5, 7,..., en ayant soin de s'arrêter au moment où l'on cesserait d'avoir

$$2m - t^2 > 0 :$$

la dernière valeur de t est donc la racine du plus grand carré impair contenu dans $2m$.

Cela posé, le premier des deux théorèmes que je veux énoncer ici consiste en ce que les deux sommes indiquées sont égales, à savoir :

$$\sum(-1)^{\frac{s-1}{2}} \mathrm{E}\left(\frac{m+s}{2s}\right) = \sum \mathrm{E}\left(\frac{1+\sqrt{2m-t^2}}{2}\right).$$

Soit comme exemple $m = 9$: notre équation exprime que les deux quantités

$$\mathrm{E}\left(\frac{9+1}{2}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{9+3}{6}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{9+5}{10}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{9+7}{14}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{9+9}{18}\right)$$

et

$$\mathrm{E}\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{1+\sqrt{9}}{2}\right)$$

ont la même valeur, ce qui est vrai, la valeur commune étant 4.

Maintenant désignons par n un entier quelconque pair ou impair, puis supposons encore s impair et prenant les valeurs 1, 3, 5, etc., sans dépasser n. D'un autre côté soit θ un entier prenant toutes les valeurs paires ou impaires 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc., sans que jamais son carré dépasse ni même atteigne ce même nombre n. On aura cette seconde égalité

$$\sum(-1)^{\frac{s-1}{2}} \mathrm{E}\left(\frac{n}{s}\right) = \sum \mathrm{E}\left(\sqrt{m-\theta^2}\right).$$

Ainsi, pour $n = 4$, il vient

$$\mathrm{E}\left(\frac{4}{1}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{4}{3}\right) = \mathrm{E}(\sqrt{4}) + \mathrm{E}(\sqrt{3}),$$

ce qui est exact.

La démonstration des deux égalités ci-dessus s'offrira d'elle-même à tous ceux qui sont un peu au courant de la théorie des nombres, en particulier de ce qui concerne les décompositions d'un entier en deux carrés. Aussi ne les ai-je données que comme un sujet d'exercices pour les jeunes géomètres. Il serait, en effet, à désirer qu'on les établît directement sans recourir à la théorie des nombres.