JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Addition à la note au sujet d'un théorème de M. Kronecker insérée au cahier d'avril

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 267-268.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5__267_0>

ADDITION

A LA NOTE AU SUJET D'UN THÉORÈME DE M. KRONECKER INSÉRÉE AU CAHIER D'AVRIL [*].

PAR M. J. LIOUVILLE.

Je veux ajouter ici une règle nouvelle aux deux règles que nous avons proposées M. Kronecker et moi pour la détermination du signe $\pm$ dans la congruence

$$1.2.3\ldots\frac{n-1}{2}\equiv\pm 1 \pmod{n},$$

n étant un nombre premier de la forme $8k+3$.

M. Kronecker retranche de n tous les carrés pairs de grandeur moindre $4, 16, 36, 64,\ldots, (2\omega)^2$, puis il cherche le nombre ν de ceux des restes ainsi obtenus qui peuvent se mettre sous la forme

$$p^{4l+1}r^2,$$

p étant un nombre premier qui ne divise pas r. Or on a

$$\nu=\nu'+\nu'',$$

ν' se rapportant aux carrés des nombres impairement pairs et ν'' aux carrés des nombres pairement pairs ; et ce n'est que de ν'', ou plutôt de $\nu''+k$ que la réponse à faire dépend dans la règle nouvelle que j'annonce, à savoir, il faut prendre le signe supérieur quand $\nu''+k$ est pair, et le signe inférieur quand $\nu''+k$ est impair. En remplaçant ainsi ν par $\nu''+k$, j'abrége évidemment le calcul de moitié, les carrés à retrancher de n n'étant plus que 16, 64, etc.

[*] Corrigeons en passant une faute d'impression. Page 128, ligne 8, au lieu de i, lisez i^2.

Pour donner un exemple de l'application des trois règles, je profite d'une table dressée par Jacobi (*Journal de Crelle*, t. IX, p. 189). Je vois par cette table que pour $n=43$, on doit prendre le signe inférieur.

Or par la règle de M. Kronecker, il faut retrancher de 43 les carrés pairs 4, 16, 36, d'où les trois restes 39, 27, 7, dont le dernier seul peut se mettre sous la forme $p^{4l+1}r^2$; on a ainsi $\nu=1$, d'où le signe inférieur, ce qui exact.

Avec ma nouvelle règle, on ne retranche que 16, on trouve $\nu''=0$, $\nu''+k=5$: la conclusion est donc la même.

Enfin, pour appliquer mon ancienne règle, on retranchera de 43 les carrés impairs de grandeur moindre 1, 9, 25; les restes sont 42, 34, 18 : le second seul est de la forme $2q^{4\alpha+1}t^2$, le troisième donne la décomposition $5^2+2.3^2$ de 43, et l'on en conclut $\sigma=0$, comme déjà $\tau=1$. Donc $\sigma+\tau$ est impair : même conclusion que plus haut sur le signe.

Je dois avertir que ce dernier procédé, fondé sur l'emploi des carrés impairs, pourrait aussi être simplifié : nous trouverons une occasion de revenir sur ce point.

En admettant que la règle donnée par M. Kronecker soit exacte (ce dont je ne doute nullement, quoique je n'en aie pas de démonstration) et en la rapprochant de ma nouvelle règle, on en conclura la congruence

$$\nu'\equiv k \pmod{2}.$$

Donc si k est impair, ν' le sera. De là ce théorème :

« Tout nombre premier n de la forme $16g+11$ peut être mis un » nombre impair de fois sous la forme

$$n=4u^2+p^{4l+1}r^2,$$

» p étant un nombre premier $(8h+7)$ et r, u des entiers impairs non » divisibles par p. » Exemple : $11=4\cdot1^2+7\cdot1^2$.