JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres; douzième article

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 1-8.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

DOUZIÈME ARTICLE.

Les formules que nous donnons dans ce douzième article sont très générales : elles contiennent une fonction arbitraire $F(x, y, z)$ de trois variables; et nous avertissons une fois pour toutes que cette fonction $F(x, y, z)$ est impaire, c'est-à-dire change de signe avec chaque variable, et de plus s'évanouit quand une des variables se trouve égale à zéro. En un mot, il faudra constamment se rappeler que l'on a

$$F(-x, y, z) = -F(x, y, z),$$
$$F(x, -y, z) = -F(x, y, z),$$
$$F(x, y, -z) = -F(x, y, z),$$

pour tous les systèmes de valeurs de x, y, z employés dans le calcul. De plus, si une des variables prend une valeur nulle, la fonction devra alors s'annuler, en sorte que si l'on peut avoir, par exemple, $x = 0$, il faudra admettre que $F(0, y, z) = 0$.

I.

La première formule dont nous allons nous occuper, renferme comme cas particulier la formule (ε) de notre huitième article : elle se rapporte à un nombre m quelconque, pair ou impair, dont le mode de partition est défini par les deux équations

$$m = m'^2 + m'', \quad m'' = 2^{\alpha''} d'' \delta'',$$

ou, si l'on veut, par l'équation unique

$$m = m'^2 + 2^{\alpha''} d'' \delta'',$$

d'' et δ'' étant impairs et positifs, tandis que l'entier m' peut être indifféremment positif ou négatif, ou même zéro : on a $\alpha'' = 0$ quand m'' est impair, ce qui arrive toutes les fois que m étant impair, m' est pair, ou que m étant pair, m' est impair. On forme la somme double

$$\sum\sum \mathrm{F}\left(2^{\alpha''} d'' + m', \delta'' - 2m', 2^{\alpha''+1} d'' + 2m' - \delta''\right),$$

dans laquelle la première sommation s'applique aux valeurs de $2^{\alpha''} d''$ et δ'' pour chaque nombre déterminé m'', tandis que la deuxième sommation concerne les groupes successifs (m', m''). Notre théorème consiste en ce que la somme double indiquée est généralement égale à zéro : il n'y a exception que quand m est un carré, et alors la somme double a pour valeur la somme simple que voici :

$$\sum \mathrm{F}(\sqrt{m}, 2s - 1, 2s - 1),$$

s entier et variant de 1 à $\sqrt{m}$.

En d'autres termes, on a, suivant que m n'est pas ou est un carré,

$$(\upsilon) \left\{ \begin{array}{ll} \sum\sum \mathrm{F}\left(2^{\alpha''} d'' + m', \delta'' - 2m', 2^{\alpha''+1} d'' + 2m' - \delta''\right) = 0, & \\ \text{ou} \qquad = \mathrm{F}(\sqrt{m}, 1, 1) + \mathrm{F}(\sqrt{m}, 3, 3) + \mathrm{F}(\sqrt{m}, 5, 5) + \ldots\ldots & \\ \qquad + \mathrm{F}(\sqrt{m}, 2\sqrt{m} - 1, 2\sqrt{m} - 1). & \end{array} \right.$$

Soit, par exemple, $m = 3$; les valeurs de m', $2^{\alpha''}d''$, δ'' à employer seront

$$m' = 0, \quad 2^{\alpha''}d'' = 3, \quad \delta'' = 1; \quad m' = 0, \quad 2^{\alpha''}d'' = 1, \quad \delta'' = 3;$$
$$m' = 1, \quad 2^{\alpha''}d'' = 2, \quad \delta'' = 1; \quad m' = -1, \quad 2^{\alpha''}d'' = 2, \quad \delta'' = 1.$$

La somme double sera donc ici

$$F(3, 1, 5) + F(1, 3, -1) + F(3, -1, 5) + F(1, 3, 1),$$

et, comme on a, par la nature de la fonction F, qui est impaire,

$$F(1, 3, -1) = - F(1, 3, 1), \quad F(3, -1, 5) = - F(3, 1, 5),$$

on trouve zéro, comme il le faut.

Soit encore $m = 4$. On devra trouver, 4 étant un carré,

$$F(2, 1, 1) + F(2, 3, 3).$$

Or les valeurs de m', $2^{\alpha''}d''$ et δ'' à employer sont

$$m' = 0, \quad 2^{\alpha''}d'' = 4, \quad \delta'' = 1,$$

puis

$$m' = 1, \quad 2^{\alpha''}d'' = 3, \quad \delta'' = 1; \quad m' = 1, \quad 2^{\alpha''}d'' = 1, \quad \delta'' = 3;$$
$$m' = -1, \quad 2^{\alpha''}d'' = 3, \quad \delta'' = 1; \quad m' = -1, \quad 2^{\alpha''}d'' = 1, \quad \delta'' = 3.$$

De là, pour la somme double,

$$F(4, 1, 7) + F(4, -1, 7) + F(2, 1, 1) + F(2, 3, 3) + F(0, 5, -3),$$

ce qui se réduit bien aux deux termes écrits plus haut, parce que l'on a

$$F(4, -1, 7) = - F(4, 1, 7), \quad F(0, 5, -3) = 0.$$

Nous n'entrerons dans aucun détail sur les applications de la formule (υ); mais nous devons montrer comment on en déduit la formule (ε) de notre huitième article. Il faut observer que les valeurs de y et de z étant essentiellement impaires, on remplira les conditions imposées à la fonction $F(x, y, z)$ en la réduisant à la forme

$$(-1)^{\frac{1-z}{2}} F(x, y),$$

pourvu que l'on ait toujours

$$F(-x, y) = -F(x, y) = F(x, -y)$$

et

$$F(0, y) = 0.$$

Or cette valeur particulière de $F(x, y, z)$ conduit immédiatement à la formule (ε).

II.

Continuons à désigner par m un nombre entier positif donné, pair ou impair, et posons

$$m = m'^2 + d''\delta'',$$

m' étant un entier positif, nul ou négatif, tandis que d'' et δ'' sont des entiers essentiellement positifs, mais d'ailleurs pairs ou impairs. Puis considérons la somme double

$$S = \sum\sum F(d'' + m', \delta'' - 2m', 2d'' + 2m' - \delta''),$$

où les sommations s'étendent à toutes les valeurs de m', d'', δ'' que comporte notre équation fondamentale

$$m = m'^2 + d''\delta'',$$

d'après ce qui vient d'être dit.

Le théorème que nous voulons donner au sujet de cette somme double S consiste en ce que l'on a généralement

$$S = 0.$$

Il n'y a exception que quand m est un carré, et alors S s'exprime par la différence des deux sommes simples que voici :

$$F(\sqrt{m}, 1, 1) + F(\sqrt{m}, 2, 2) + F(\sqrt{m}, 3, 3) + \ldots\ldots$$
$$+ F(\sqrt{m}, 2\sqrt{m} - 1, 2\sqrt{m} - 1)$$

et

$$F(1, 2\sqrt{m}, 2) + F(2, 2\sqrt{m}, 4) + F(3, 2\sqrt{m}, 6) + \ldots\ldots + F(\sqrt{m}-1, 2\sqrt{m}, 2\sqrt{m}-2).$$

Comme on peut représenter la somme

$$F(\sqrt{m}, 1, 1) + F(\sqrt{m}, 2, 2) + F(\sqrt{m}, 3, 3) + \ldots\ldots + F(\sqrt{m}, 2\sqrt{m}-1, 2\sqrt{m}-1)$$

par

$$\sum F(\sqrt{m}, s, s),$$

où l'on prend successivement $s = 1, 2, 3, \ldots, 2\sqrt{m}-1$, et la somme

$$F(1, 2\sqrt{m}, 2) + F(2, 2\sqrt{m}, 4) + F(3, 2\sqrt{m}, 6) + \ldots\ldots + F(\sqrt{m}-1, 2\sqrt{m}, 2\sqrt{m}-2),$$

par

$$\sum F(t, 2\sqrt{m}, 2t),$$

où l'on fera $t = 1, 2, 3, \ldots, \sqrt{m}-1$, notre théorème revient à dire que l'on a, suivant que m n'est pas ou est un carré,

$$(\varphi)\qquad \left\{\begin{array}{ll} & \sum\sum F(d''+m', \delta''-2m', 2d''+2m'-\delta'') = 0, \\ \text{ou} & \qquad = \sum F(\sqrt{m}, s, s) - \sum F(t, 2\sqrt{m}, 2t), \end{array}\right.$$

la double sommation au premier membre se rapportant, je le répète, au mode de partition marqué par $m = m'^2 + d''\delta''$, avec $d'' > 0$, $\delta'' > 0$, les sommations simples aux entiers s et t variant, l'un de 1 à $2\sqrt{m}-1$, l'autre de 1 à $\sqrt{m}-1$, enfin la fonction $F(x, y, z)$ étant impaire, chose convenue pour toutes les formules du présent article.

La formule (υ), si générale qu'elle soit, pourrait être regardée comme contenue dans la formule (φ). Il n'y a qu'à regarder la fonction $F(x, y, z)$ comme nulle quand une des deux dernières variables y, z est un nombre pair Mais je n'insisterai pas là-dessus pour le moment. Je me contenterai d'appliquer la formule (φ) à deux exemples, en prenant $m=3$, puis $m=4$.

Pour $m=3$, les couples de valeurs de m', d'', δ'' compatibles avec l'équation

$$m = m'^2 + d''\delta'',$$

sont

$$m'=0,\quad d''=1,\quad \delta''=3;\quad m'=1,\quad d''=1,\quad \delta''=2;$$
$$m'=-1,\quad d''=1,\quad \delta''=2;$$
$$m'=0,\quad d''=3,\quad \delta''=1;\quad m'=1,\quad d''=2,\quad \delta''=1;$$
$$m'=-1,\quad d''=2,\quad \delta''=1;$$

et, puisque m n'est pas un carré, il s'ensuit que la somme

$$\begin{gathered}F(1,3,-1)+F(2,0,2)+F(0,4,-2)\\ +F(3,1,5)+F(3,-1,5)+F(1,3,1)\end{gathered}$$

doit être égale à zéro; or cela a lieu effectivement puisque, d'après la nature de la fonction F, on a

$$F(2,0,2)=0,\quad F(0,4,-2)=0,$$

et de plus

$$F(1,3,-1)=-F(1,3,1),\quad F(3,-1,5)=-F(3,1,5).$$

Pour $m=4$, les couples de valeurs de m', d'', δ'' sont, d'une part,

$$m'=0,\quad d''=1,\quad \delta''=4;$$
$$m'=0,\quad d''=2,\quad \delta''=2;$$
$$m'=0,\quad d''=4,\quad \delta''=1;$$

et, d'autre part,

$$m'=1,\quad d''=1,\quad \delta''=3;\qquad m'=-1,\quad d''=1,\quad \delta''=3;$$
$$m'=1,\quad d''=3,\quad \delta''=1;\qquad m'=-1,\quad d''=3,\quad \delta''=1;$$

ce qui, réduction faite d'après la nature de la fonction $F(x, y, z)$, donne, pour premier membre de l'équation (φ), l'expression suivante

$$F(2, 1, 1) + F(2, 2, 2) + F(2, 3, 3) - F(1, 4, 2).$$

Or c'est bien là ce que donne aussi le second membre, m étant ici un carré, et les valeurs à employer étant

$$\sqrt{m} = 2, \quad s = 1, \quad s = 2, \quad s = 3, \quad t = 1.$$

Maintenant, sans sortir, au fond, de la même analyse et des mêmes procédés *élémentaires* de démonstration dont il ne sera question que plus tard, passons à une autre formule.

III.

Nous supposerons désormais que l'entier donné m, auquel nos calculs se rapportent, est un entier impair, du reste quelconque, et nous l'assujettirons au mode de partition marqué par l'équation

$$m = 2m'^2 + d''\delta'',$$

où d'' et δ'' seront des entiers impairs et positifs, tandis que m' sera indifféremment un nombre entier positif ou négatif, ou zéro. C'est à tous les groupes (m', d'', δ'') ainsi définis que s'appliquera la somme double

$$\sum\sum F(d'' + 2m', \delta'' - 2m', 2m' + d'' - \delta'').$$

Le théorème que nous avons à donner à ce sujet est on ne peut plus simple; car il consiste en ce que la somme double indiquée est égale à zéro, sans qu'il y ait aucune exception.

Ainsi, pour tout nombre entier impair m, et pour toute fonction algébrique ou numérique $F(x, y, z)$ remplissant les conditions exigées au début de cet article, on a toujours, sous le mode de partition indiqué,

$$(\chi) \qquad \sum\sum F(d'' + 2m', \delta'' - 2m', 2m' + d'' - \delta'') = 0.$$

Soit, par exemple, $m = 1$, ce qui donne uniquement

$$m' = 0, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 1;$$

il viendra

$$F(1, 1, 0) = 0;$$

ce qui a lieu effectivement d'après la nature de la fonction $F(x, y, z)$.

Soit ensuite $m = 3$. On pourra faire

$$m' = 0, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 3; \qquad m' = 0, \quad d'' = 3, \quad \delta'' = 1;$$

et de plus

$$m' = 1, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 1; \qquad m' = -1, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 1.$$

De là l'équation

$$F(1, 3, -2) + F(3, 1, 2) + F(3, -1, 2) + F(-1, 3, -2) = 0,$$

qui est exacte, puisque le premier et le quatrième terme du premier membre sont égaux au signe près, de même que le second et le troisième terme.

Je m'arrête ici : le lecteur voit assez que la formule (χ) est susceptible d'applications intéressantes.