JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HOUSEL

Surfaces de révolution du second degré

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 129-138.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5__129_0>

SURFACES DE RÉVOLUTION DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. HOUSEL.

Les traités élémentaires sur les surfaces du second degré indiquent à quels caractères on peut reconnaître si elles sont de révolution, quand les axes donnés sont rectangulaires. Il serait bon, je crois, de formuler *explicitement* ces conditions dans le cas général des axes obliques. Je viens donc, après d'autres auteurs, proposer mes vues à ce sujet. Rappelons d'abord quelques résultats connus.

I. Soit, en coordonnées obliques,

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + F = 0$$

l'équation d'une surface du second degré rapportée à son centre; soit R le rayon d'une sphère concentrique, ayant avec la surface un point commun représenté par ses coordonnées x', y', z', et en ce point un plan tangent commun; si nous posons

$$\frac{x'}{z'} = \mu, \quad \frac{y'}{z'} = \nu \quad \text{et} \quad s = -\frac{F}{R^2},$$

nous aurons

$$s = \frac{A\mu + B''\nu + B'}{\mu + \nu\cos xy + \cos xz} = \frac{A'\nu + B''\mu + B}{\nu + \mu\cos xy + \cos yz} = \frac{A'' + B\nu + B'\mu}{1 + \mu\cos xz + \nu\cos yz};$$

d'où l'on tire

$$\mu = \frac{(s\cos xz - B')(s - A') - (s\cos yz - B)(s\cos xy - B'')}{(s\cos xy - B'')^2 - (s - A)(s - A')},$$

$$\nu = \frac{(s\cos yz - B)(s - A) - (s\cos xz - B')(s\cos xy - B'')}{(s\cos xy - B'')^2 - (s - A)(s - A')},$$

ainsi que l'équation du troisième degré en s, qui donne les longueurs des axes principaux, mais que nous n'écrivons pas ici, parce que nous n'avons point encore à en faire usage.

Si la surface est de révolution, celui des axes principaux qui devient le rayon central a une direction indéterminée. Donc, pour la valeur correspondante de s, les valeurs de μ et de ν se présentent, en général, sous la forme $\frac{0}{0}$. On a, par conséquent,

$$(s\cos xy - B'')^2 = (s - A)(s - A'),$$
$$(s\cos xz - B')(s - A') = (s\cos yz - B)(s\cos xy - B''),$$
$$(s\cos yz - B)(s - A) = (s\cos xz - B')(s\cos xy - B'').$$

Mais ces trois équations se réduisent à deux, car le produit des deux dernières fait retrouver la première : en effet, il suffirait que l'une des quantités μ ou ν fût indéterminée.

En développant la première équation, on obtient

$$(1)\qquad s^2\sin^2 xy - s(A + A' - 2B''\cos xy) + AA' - B''^2 = 0,$$

et la symétrie donne encore deux relations analogues.

Les deux autres égalités deviennent

$$(2)\ \left\{\begin{aligned} &s^2(\cos xz - \cos xy\cos yz)\\ &- s(B' - B\cos xy - B''\cos yz + A'\cos xz) + A'B' - BB'' = 0,\end{aligned}\right.$$

$$(3)\ \left\{\begin{aligned} &s^2(\cos yz - \cos xy\cos xz)\\ &- s(B - B'\cos xy - B''\cos xz + A\cos yz) + AB - B'B'' = 0,\end{aligned}\right.$$

et la symétrie conduit aussi à une troisième équation analogue.

II. Chacune de ces six équations est satisfaite par la valeur cherchée de s, qui correspond au rayon central, mais aussi chacune d'elles a une racine étrangère. Pour trouver la racine commune, il faut éliminer s^2 entre deux de ces équations, considérées comme étant du premier degré à deux inconnues. Nous ne prendrons pas deux égalités telles que (2) et (3), d'où l'on tirerait une valeur de s qui serait indéterminée pour des axes rectangulaires, mais nous combinerons les équations (1) et (2), et nous obtiendrons, par le calcul indiqué,

$$(4)\quad s = \frac{\sin^2 xy(A'B' - BB'') - (\cos xz - \cos xy\cos zy)(AA' - B''^2)}{\sin^2 xy(B' - B\cos xy - B''\cos yz + A'\cos xz) - (\cos xz - \cos xy\cos zy)(A + A' - 2B''\cos xy)}.$$

En combinant les équations (1) et (3), on trouvera de même

$$(5)\quad s = \frac{\sin^2 xy(AB - B'B'') - (\cos yz - \cos xy \cos zx)(AA' - B''^2)}{\sin^2 xy(B - B'\cos xy - B''\cos xz + A\cos yz) - (\cos yz - \cos xy \cos zx)(A + A' - 2B''\cos xy)},$$

expression qui se déduit de la précédente, si l'on change les quantités relatives à x dans les quantités relatives à y, et réciproquement.

On aura donc une équation de condition en égalant deux valeurs de s, telles que (4) et (5).

Dans cette opération, on reconnaît d'abord que les termes qui ne contiennent pas le facteur $\sin^2 xy$ se détruisent; on peut donc supprimer ce facteur dans l'équation de condition, qui devient, en faisant quelques réductions et surtout en réunissant les termes qui ont $(AA' - B^2)\sin^2 xy$ pour facteur :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\sin^2 xy \begin{bmatrix} B(A'B' - BB'') - B'(AB - B'B'') \\ + \cos xy(AB^2 - A'B'^2) \\ + 2(AA' - B''^2)(B'\cos yz - B\cos xz) \end{bmatrix} \\ &+ (AA' - B''^2)\begin{bmatrix} \cos xy(A\cos^2 yz - A'\cos^2 xz) \\ + (A' - A)\cos xz \cos yz + B''(\cos^2 xz - \cos^2 yz) \end{bmatrix} \\ &+ (A + A' - 2B''\cos xy)\begin{bmatrix} (AB - B'B'')(\cos xz - \cos xy \cos yz) \\ - (A'B' - BB'')(\cos yz - \cos xy \cos xz) \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}\right.$$

Connaissant cette relation entre A et A', on en trouverait symétriquement deux autres (7) et (8) entre A, A'' et A', A'' : nous nous dispenserons de les écrire, mais chacune des trois doit rentrer dans les deux autres, puisqu'il n'y a en tout que deux conditions.

III. On aurait pu résoudre le même problème au moyen de l'équation du troisième degré en s, que nous avons laissée de côté et qui donne les carrés des axes diamétraux. Pour que la surface soit de révolution, il faut et il suffit que cette équation ait deux racines égales, ce qui semble ne donner qu'une condition; mais comme nous savons qu'il y en a deux, il faut nécessairement que cette unique équation de condition se décompose dans la somme de deux carrés : seulement ces calculs seraient très-pénibles.

Nous n'aurons pas non plus besoin de cette équation du troisième degré pour trouver le rayon central $R^2 = -\frac{F}{s}$, en indiquant toujours par s la valeur connue par les expressions (4) ou (5). On s'en passera encore pour trouver le plan des rayons centraux, car la troisième valeur de s, dans les formules préliminaires, nous donne

$$\mu(s\cos xz - B') + \nu(s\cos yz - B) + s - A'' = 0,$$

et comme les équations d'un rayon central quelconque sont

$$x = \mu z, \quad y = \nu z,$$

celle du plan cherché devient

$$(9) \qquad x(s\cos xz - B') + y(s\cos yz - B) + z(s - A'') = 0;$$

il suffira d'y remplacer s par l'expression (4).

Enfin l'axe de révolution est perpendiculaire à ce plan; mais, pour déterminer complétement cet axe, il vaut mieux avoir recours à l'équation du troisième degré en s, que nous allons écrire :

$$(10) \quad \left\{\begin{aligned} & s^3(1 - \cos^2 xy - \cos^2 xz - \cos^2 yz + 2\cos xy \cos xz \cos yz) \\ & - s^2 \left\{\begin{aligned} & A\sin^2 yz + A'\sin^2 xz + A''\sin^2 xy \\ & - 2B''(\cos xy - \cos xz \cos yz) \\ & - 2B'(\cos xz - \cos xy \cos yz) \\ & - 2B(\cos yz - \cos xy \cos xz) \end{aligned}\right. \\ & - s \left\{\begin{aligned} & B^2 - A'A'' + B'^2 - AA'' + B''^2 - AA' \\ & + 2\cos yz(AB - B'B'') + 2\cos xz(A'B' - BB'') \\ & + 2\cos xy(A''B'' - BB') \end{aligned}\right. \\ & + AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation ayant ici deux racines égales, son premier membre se décompose en deux facteurs, l'un du second, l'autre du premier degré. Nous aurons donc l'axe de révolution en égalant à zéro ce dernier facteur, ce qui donnera

$$(11) \qquad s_1 + p + 2s = 0.$$

Ici s représente toujours la valeur donnée par l'expression (4), s_1 correspond à l'axe de révolution, et

$$p = \frac{2B''(\cos xy - \cos xz \cos yz) + 2B'(\cos xz - \cos xy \cos yz) + 2B(\cos yz - \cos xy \cos xz) - A\sin^2 yz - A'\sin^2 xz - A''\sin^2 xy}{1 - \cos^2 xy - \cos^2 xz - \cos^2 yz + 2\cos xy \cos xz \cos yz}.$$

Connaissant s_1, on aura le carré du demi-axe de révolution, qui sera $-\frac{F}{s_1}$: pour trouver la direction de cet axe, il suffit de remplacer s par s_1 dans les valeurs de μ et de ν, ce qui donnera μ_1 et ν_1.

IV. Maintenant il faut examiner dans quelles circonstances les formules précédentes peuvent être en défaut.

Si nous indiquons, pour abréger, les formules (4) et (5) par

$$s = \frac{a}{b}, \quad s = \frac{a'}{b'},$$

l'équation de condition (6) deviendra $ab' - a'b = 0$. Or si nous avons à la fois $a = 0$, $b = 0$, cette condition sera satisfaite, ainsi que toutes celles qui pourraient être déduites de l'expression

$$s = \frac{a}{b}:$$

cependant rien ne prouve que la surface soit de révolution tant qu'on n'a pas trouvé une seconde condition qui ne soit pas nécessairement satisfaite pour $a = 0$ et $b = 0$; il faut aussi obtenir une valeur de s qui ne devienne pas alors indéterminée.

Pour y parvenir dans toutes les circonstances, nous prendrons l'équation (1)

$$s^2 \sin^2 xy - s(A + A' - 2B'' \cos xy) + AA' - B''^2 = 0,$$

et nous la combinerons, par le procédé déjà employé, avec l'une des deux autres équations analogues, telle que

$$s^2 \sin^2 xz - s(A + A'' - 2B' \cos xz) + AA'' - B'^2 = 0,$$

ce qui donnera

$$(12) \quad s = \frac{(AA'' - B'^2)\sin^2 xy - (AA' - B''^2)\sin^2 xz}{\sin^2 xy(A + A'' - 2B'\cos xz) - \sin^2 xz(A + A' - 2B''\cos xy)};$$

on aurait de même

$$(13)\quad s = \frac{(A'A'' - B^2)\sin^2 xy - (AA' - B''^2)\sin^2 yz}{\sin^2 xy\,(A' + A'' - 2B\cos yz) - \sin^2 yz\,(A + A' - 2B''\cos xy)}.$$

Égalant ces deux valeurs de s, observant que les termes indépendants de $\sin^2 xy$ se détruisent, et supprimant ce facteur commun, il reste

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\sin^2 xy\begin{bmatrix} (AA'' - B'^2)(A' + A'' - 2B\cos yz)\\ -(A'A'' - B^2)(A + A'' - 2B'\cos xz)\end{bmatrix}\\ &+\sin^2 xz\begin{bmatrix} (A'A'' - B^2)(A + A' - 2B''\cos xy)\\ -(AA' - B''^2)(A' + A'' - 2B\cos yz)\end{bmatrix}\\ &+\sin^2 yz\begin{bmatrix} (AA' - B''^2)(A + A'' - 2B'\cos xz)\\ -(AA'' - B'^2)(A + A' - 2B''\cos xy)\end{bmatrix} = 0,\end{aligned}\right.$$

équation de condition symétrique entre x, y et z, et, par suite, plus convenable que toute autre pour suppléer à l'insuffisance accidentelle des formules déjà écrites; de même on pourra recourir à une expression telle que l'équation (12), si l'équation (4) donne s sous la forme $\frac{0}{0}$.

V. Nous allons déduire, de ce qui précède, les formules relatives aux axes rectangulaires. Les expressions (4) et (5) deviennent alors

$$s = \frac{A'B' - BB''}{B'},\qquad s = \frac{AB - B'B''}{B},$$

et, par symétrie,

$$s = \frac{A''B'' - BB'}{B''};$$

d'où l'on conclut

$$s = A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{BB''}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''}.$$

Ce résultat s'accorde avec une équation de condition telle que l'équation (6) qui se réduit à

$$B(A'B' - BB'') = B'(AB - B'B'')$$

ou bien

$$BB'(A'-A)+B''(B'^2-B^2)=0,$$

et symétriquement on a

$$BB''(A''-A)+B'(B''^2-B^2)=0,$$
$$B'B''(A''-A')+B(B''^2-B^2)=0.$$

Pour trouver

$$s_1=-p-2s,$$

observons que

$$-p=A+A'+A''$$

et

$$-2s=-2A''+\frac{2BB'}{B''};$$

donc

$$s_1=A+A'-A''+\frac{2BB'}{B''}.$$

Mais

$$A'-A''=\frac{BB''}{B'}-\frac{BB'}{B''},$$

d'où

$$s_1=A+\frac{BB''}{B'}+\frac{BB'}{B''}.$$

Ainsi

$$s_1-A=\frac{B(B''^2+B'^2)}{B'B''},$$

de même

$$s_1-A'=\frac{B'(B''^2+B^2)}{BB''};$$

transportant ces valeurs dans les expressions de μ et de ν, qui deviennent alors

$$\mu_1=\frac{B'(s_1-A')+BB''}{(s_1-A)(s_1-A')-B''^2},\qquad \nu_1=\frac{B(s_1-A)+B'B''}{(s_1-A)(s_1-A')-B''^2},$$

et réduisant, il reste

$$\mu_1=\frac{B''}{B},\qquad \nu_1=\frac{B''}{B'}.$$

L'équation (9) du plan des rayons centraux devient

$$By + B'x = z(s - A''),$$

et se réduit à

$$\frac{x}{B} + \frac{y}{B'} + \frac{z}{B''} = 0.$$

Les équations (12) et (13) nous donnent alors

$$s = \frac{A(A'' - A') - B'^2 + B''^2}{A'' - A'}$$

et

$$s = \frac{A'(A'' - A) - B^2 + B''^2}{A'' - A},$$

d'où

$$s = A + \frac{B''^2 - B'^2}{A'' - A'} = A' + \frac{B''^2 - B^2}{A'' - A} = A'' + \frac{B'^2 - B^2}{A' - A};$$

enfin, l'équation (14) se réduit à

$$\begin{aligned}(A'A'' - B^2)(A' - A'') + (AA'' - B'^2)(A'' - A)\\ + (AA' - B''^2)(A - A') = 0,\end{aligned}$$

ce qui se ramène à

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}(A' - A'')(A'' - A)(A - A') + B^2(A' - A'')\\ + B'^2(A'' - A) + B''^2(A - A') = 0.\end{aligned}\right.$$

Nous pouvons appliquer ici ce que nous avons dit sur la manière de lever l'indétermination des formules.

Si un seul des trois coefficients B, B', B'' est nul, si par exemple $B = 0$, il n'y a pas encore d'indétermination, parce que la condition

$$BB'(A' - A) + B''(B'^2 - B^2) = 0,$$

déduite de l'équation (6), se réduit à $B''B'^2 = 0$, ce qui prouve que la surface n'est pas de révolution. Mais si l'on a à la fois $B = 0$, $B' = 0$, les trois conditions que nous avons écrites sont satisfaites, sans que la surface soit nécessairement de révolution, car cela tient à ce que les deux valeurs

$$s = A' - \frac{BB''}{B'} \quad \text{et} \quad s = A - \frac{B'B''}{B},$$

respectivement déduites des expressions (4) et (5), sont alors indéterminées : dans ce cas l'équation (15) nous donnera la condition

$$B''^2 = (A'' - A)(A'' - A'),$$

et la valeur

$$s = A'' + \frac{B'^2 - B^2}{A' - A}$$

devient

$$s = A''.$$

On en conclut

$$s_1 = A + A' - A'',$$

mais les valeurs de μ_1 et de ν_1, qui se présentent sous une forme infinie, montrent seulement que l'axe de révolution est alors dans le plan des xy. Son coefficient angulaire dans ce plan sera

$$\frac{y}{x} = \frac{\nu_1}{\mu_1} = \frac{B}{B'} = \frac{(s_1 - A) B''}{B''^2 + B'^2},$$

ce qui donne les équations de cet axe

$$\frac{y}{x} = \frac{A' - A''}{B''} = \frac{B''}{A - A''}, \quad z = 0.$$

VI. Il nous reste à dire un mot des surfaces de révolution qui n'ont pas de centre unique, c'est-à-dire du paraboloïde et du cylindre de révolution.

Pour le cylindre, nous appliquerons ce qui vient d'être dit jusqu'à présent. En effet, le centre de la surface représentée par l'équation générale

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + E = 0,$$

étant toujours donné par les équations dérivées prises relativement à chaque variable, et deux de ces équations étant identiques, ce qui fait que tous les points d'une même droite sont des centres, nous prendrons un quelconque de ces points pour origine, et nous retrouverons, avec toutes ses conséquences, l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + F = 0$$

d'où nous étions partis.

Seulement, comme on a ici

$$AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = 0,$$

l'équation (10) donne une valeur infinie pour le diamètre principal qui est dirigé suivant l'axe du cylindre, mais l'on trouvera encore de même les conditions nécessaires pour que la surface soit de révolution, et la valeur de s; quant au rayon central, on a toujours

$$R^2 = -\frac{F}{s} \quad \text{et} \quad F = Cx_1 + C'y_1 + C''z_1 + E,$$

en indiquant par x_1, y_1, z_1 les cooordonnées du centre pris sur l'axe du cylindre : d'après les conditions nécessaires pour que la surface soit un cylindre, cette valeur de F sera indépendante de la position de ce point sur cet axe.

Enfin les calculs faits pour les surfaces à centre s'appliquent aussi aux paraboloïdes, car en établissant les conditions nécessaires pour qu'un plan diamétral soit perpendiculaire aux cordes qu'il divise en parties égales, on trouve, quelle que soit l'origine, les valeurs de μ et de ν que nous avons écrites en commençant, d'où l'on tire comme ci-dessus les équations de condition telles que les équations (6) et (14) : mais les expressions de s ne servent à rien, puisque les valeurs de R sont infinies.