JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Note à l'occasion d'un théorème de M. Kronecker

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 127-128.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5__127_0>

NOTE

A L'OCCASION D'UN THÉORÈME DE M. KRONECKER;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soit n un nombre premier de la forme $4s+3$. Il suit du théorème de Wilson, que toujours

$$1.2.3\ldots(2s+1) \equiv \pm 1 \pmod{n};$$

mais il reste à décider quel signe on doit prendre dans chaque cas particulier donné. En proposant ce problème dans le Journal de Crelle, Dirichlet ajoute que la question revient à chercher si le produit $1.2.3\ldots(2s+1)$ est ou n'est pas résidu quadratique de n; ce qui se conclut immédiatement de ce que 1 est résidu et -1 non-résidu de tout nombre premier $4s+3$. Donc, en appelant B le nombre des non-résidus quadratiques de n contenus dans la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ldots,\ 2s+1,$$

on devra prendre le signe $+$ si B est pair, le signe $-$ si B est impair. Dès lors tout se réduit à trouver la valeur de B (mod. 2); mais il faut ici une méthode abrégée : le calcul direct serait impraticable pour un nombre n un peu grand.

Parmi les règles plus ou moins simples que l'on a données à ce sujet, on distingue celle de M. Kronecker. Considérons la suite

$$n-2^2,\quad n-4^2,\quad n-6^2,\ldots,\quad n-(2\omega)^2,$$

où $(2\omega)^2$ est le plus grand carré pair contenu dans n. Soit ν le nombre des termes de cette suite qui sont de la forme

$$p^{4l+1}r^2,$$

p étant un nombre premier qui ne divise pas r. M. Kronecker nous apprend que l'on a

$$B \equiv \nu \pmod{2}.$$

Des recherches entreprises dans un tout autre but m'ont conduit pour le cas de s pair, c'est-à-dire pour les nombres premiers n de la forme $8k+3$, à une règle nouvelle, qui a quelque analogie avec la précédente, mais où les carrés retranchés de n sont impairs au lieu d'être pairs. Soit i le plus grand carré impair contenu dans n. Considérons les divers termes de la suite

$$n-1^2,\quad n-3^2,\quad n-5^2,\ldots,\quad n-i^2,$$

et soit τ le nombre de ceux d'entre eux qui peuvent se mettre sous la forme

$$2q^{4\alpha+1}t^2,$$

q étant un nombre premier qui ne divise pas t. D'un autre côté, décomposons n sous la forme

$$n = a^2 + 2b^2,$$

ce qu'on peut toujours faire (d'une seule manière) pour un nombre premier $8k+3$, et cherchons le nombre σ des facteurs premiers égaux ou inégaux de la forme $4g+1$ qui entrent dans la composition de b. Notre théorème consiste en ce que l'on a

$$B \equiv \sigma + \tau \pmod{2}.$$

Pour le nombre 11, par exemple, on trouve aisément $B=1$, $\nu=1$, $\sigma=0$, $\tau=1$, et la double congruence

$$B \equiv \nu \equiv \sigma + \tau \pmod{2}$$

est vérifiée. Pour $n=19$, il vient $B=3$, $\nu=1$, $\sigma=0$, $\tau=1$: même conclusion.