JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur le double d'un nombre premier $4\mu + 1$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 119-120.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5__119_0>

SUR

LE DOUBLE D'UN NOMBRE PREMIER $4\mu+1$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soit m un nombre premier donné $4\mu+1$. Nous allons rapprocher du double de m les nombres premiers p de la forme $8n+1$. A cet effet, je pose de toutes les manières possibles l'équation

$$2m = x^2 + p^{4l+1}.y^2,$$

où l'on doit prendre successivement tous les nombres p cités, et où x et y sont des entiers impairs non divisibles par p : on admet pour l la valeur zéro. J'ai trouvé et je vais donner une règle simple pour décider si le nombre N des décompositions de $2m$ sous la forme indiquée est pair ou impair, zéro étant regardé comme un nombre pair. Le cas de N impair offre surtout de l'intérêt, car alors on peut affirmer qu'il y a au moins un nombre premier p de la forme $8n+1$ lié à m par notre équation.

Comme on a $m=4\mu+1$, on peut décomposer le double du nombre premier m en une somme de deux carrés impairs, et cela d'une seule manière. Soit donc

$$2m = a^2 + b^2.$$

Cherchons combien de facteurs premiers, égaux ou inégaux, de la forme $4s+1$, entrent dans la composition de a et de b, ou, si l'on veut, dans la composition du produit ab. Soit σ le nombre ainsi obtenu, dans lequel on pourrait, sans inconvénient pour l'usage que nous en ferons, supprimer les multiples de 2.

Je me suis assuré que l'on a toujours

$$N \equiv \mu + \sigma + 1 \pmod{2}.$$

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que N soit impair, c'est que σ soit pair quand μ est pair, impair quand μ est impair, ou, en d'autres termes, que σ soit pair quand $m = 8\nu + 1$, impair quand $m = 8\nu + 5$.

Les plus petits nombres premiers de la forme $8\nu + 5$ sont 5 et 13. On a

$$2.5 = 1^2 + 3^2, \quad 2.13 = 1^2 + 5^2,$$

de sorte que $\sigma = 0$ pour $m = 5$, mais $= 1$ pour $m = 13$. Ainsi N est pair pour $m = 5$, mais impair pour $m = 13$. Or on peut aisément vérifier que les valeurs de N relatives à ces deux nombres sont respectivement 0 et 1, la dernière valeur provenant de ce que

$$2.13 = 3^2 + 17.1^2.$$

Quant à la forme $8\nu + 1$, le plus petit nombre premier qu'elle fournit est 17. On a

$$2.17 = 3^2 + 5^2,$$

d'où $\sigma = 1$, partant N pair; or il est aisé de voir que, dans ce cas, $N = 0$.

Voici une autre règle tout aussi commode pour déterminer la nature de N. Conservons les notations précédentes, et cherchons combien dans la composition du produit ab il entre de facteurs premiers, égaux ou inégaux, de la forme $8g + 1$ et de la forme $8g + 3$. En désignant par τ le nombre ainsi obtenu, on aura cette seconde congruence

$$N \equiv \tau + 1 \pmod{2};$$

en sorte que N est impair quand τ est pair et *vice versâ,* comme on peut le vérifier sur les exemples ci-dessus. On remarquera ce corollaire, que toujours $\tau \equiv \mu + \sigma \pmod{2}$, chose aisée, du reste, à établir directement.