JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant le double d'un nombre premier contenu dans l'une ou l'autre des deux formes linéaires $16\kappa + 7, 16\kappa + 11$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 103-104.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5__103_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

THÉORÈME

CONCERNANT

LE DOUBLE D'UN NOMBRE PREMIER CONTENU DANS L'UNE OU L'AUTRE DES DEUX FORMES LINÉAIRES $16k+7$, $16k+11$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

D'après un théorème, bien connu, de M. Bouniakowsky, tout nombre premier m de la forme $16k + 7$ vérifie au moins une fois, et toujours un nombre impair de fois, l'équation

$$m = 2x^2 + Q^{4l+1}y^2,$$

où Q est un nombre premier $8\nu + 5$, x et y des entiers impairs, positifs et premiers à Q. J'ai donné dans ce Journal (*cahier de mars* 1858) une démonstration de ce beau théorème, différente de celle de M. Bouniakowsky, quoique tirée du même principe, et je pourrais en ajouter d'autres. Mais nos lecteurs préféreront sans doute à ces démonstrations multipliées un théorème nouveau qu'il me sera facile d'énoncer nettement, même dans le peu d'espace que je trouve libre à la fin de cette feuille.

Considérons le double $2m$ d'un nombre premier donné m, qui peut être indifféremment de la forme $16k + 7$ employée par M. Bouniakowsky, ou de la forme $16k + 11$. Je dis qu'il existe au moins un couple (p, q) de nombres premiers *inégaux*, de la forme $8\nu + 3$, laissant vérifier l'équation

$$2m = p^{4\alpha+1}x^2 + q^{4\beta+1}y^2,$$

en prenant pour x, y des entiers positifs, impairs, premiers à p et q. De plus s'il y a divers couples (p, q) jouissant de cette propriété, le nombre en est impair, pourvu, bien entendu, que l'on ne regarde pas comme distincts les couples (p, q) et (q, p), ou, si l'on veut, pourvu que l'on impose la condition $p < q$. Nous admettons pour α et pour β la valeur zéro. Il est bon de remarquer que p et q étant inégaux, on ne peut avoir ni $p = m$, ni $q = m$. Enfin je rappelle que, m étant un nombre premier, l'équation

$$2m = p^{4\alpha+1}x^2 + q^{4\beta+1}y^2$$

n'a jamais, pour chaque couple (p, q) qu'une seule solution.

Les deux plus petits nombres premiers contenus dans les deux formes

$$16k + 7, \quad 16k + 11$$

sont 7 et 11. Or on a effectivement

$$2.7 = 3.1^2 + 11.1^2, \qquad 2.11 = 3.1^2 + 19.1^2.$$

C'est 23 qui vient ensuite, et l'on a encore

$$2.23 = 3.1^2 + 43.1^2.$$

L'expression que fournit pour 2.23 l'équation

$$2.23 = 3^3.1^2 + 19.1^2$$

ne doit pas être comptée ici, parce que l'exposant 3 n'est pas de la forme $4\alpha + 1$.