JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. DE JONQUIÈRES

Solution de deux problèmes de géométrie à trois dimensions

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 4 (1859), p. 81-92.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4__81_0>

SOLUTION

DE

DEUX PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE A TROIS DIMENSIONS;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

Les deux questions que je me propose de résoudre sont comprises dans l'énoncé suivant :

*Déterminer l'*ESPÈCE *de la surface du second ordre qui passe par neuf points ou qui touche neuf plans donnés.*

Je vais les examiner successivement.

§ I. — *Neuf points de la surface sont donnés.*

I. Le problème proposé est celui-ci :

Déterminer l'espèce de la surface du second ordre qui passe par les neuf points.

Il suffit de chercher si la courbe d'intersection de la surface par le plan situé à l'infini est réelle ou imaginaire. Dans le premier cas, la surface est un hyperboloïde; dans le second cas, c'est un ellipsoïde. Enfin, si la courbe se réduit à un point, le plan à l'infini est un plan tangent, et la surface est un paraboloïde. Quand la surface s'étend à l'infini, il reste encore à déterminer si elle est réglée ou non.

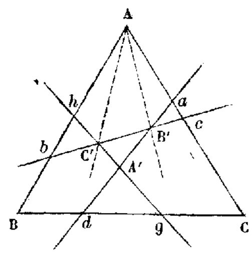
La solution que je vais développer consiste à mener, par un des points donnés, six arêtes d'un cône du second degré ayant pour base la courbe d'intersection de la surface par le plan à l'infini, et à chercher si ce cône est réel ou imaginaire.

II. Pour éviter des répétitions inutiles, je suppose ici qu'on sache résoudre la question suivante, dont le lecteur trouvera la solution dans les § IV et V d'une Note que j'ai insérée au tome III du *Journal de Mathémathiques* (1858), savoir : *Étant donnés neuf points d'une sur-*

face du second degré et une droite, trouver les points de rencontre de cette droite et de la surface.

III. Lemme. — *Connaissant les six points d'intersection imaginaires d'une conique et d'un triangle tracé dans son plan, on peut déterminer si la conique, à laquelle ces six points appartiennent, est réelle ou imaginaire, et, dans le cas où elle est réelle, on peut la construire.*

Les points d'intersection, conjugués deux à deux, sont donnés, sur chacun des côtés du triangle ABC, par leurs *éléments* réels, c'est-à-dire par leurs points milieux et par les rectangles de leurs distances à des



points fixes pris sur ces côtés, respectivement; par exemple, aux sommets du triangle. Designant ces couples de points par γ, γ' sur AB, par α, α' sur BC, et par β, β' sur AC, on aura, entre les éléments réels qui les représentent, la relation suivante, due à Carnot, qui exprime qu'ils sont tous sur une même conique, savoir :

$$\frac{A\gamma . A\gamma'}{B\gamma \;\; B\gamma'} \cdot \frac{B\alpha . B\alpha'}{C\alpha . C\alpha'} \cdot \frac{C\beta . C\beta'}{A\beta . A\beta'} = +1 \quad (\textit{Géom. sup.}, \mathbf{476}).$$

Le point A est, par hypothèse [*], extérieur à la conique. Donc, si la conique n'est pas imaginaire, ses tangentes issues du point A sont réelles. Il s'agit de les déterminer.

Pour cela on cherchera, sur les côtés AB, AC, les points b, c conjugués harmoniques du point A par rapport aux segments imaginaires $\gamma\gamma'$, $\beta\beta'$. Ces points seront toujours réels (*Géom. sup.*, n° **92**).

[*] En effet, on suppose que la conique n'est pas rencontrée par les côtés du triangle; elle ne peut donc, si elle est réelle, qu'être intérieure à ce triangle.

La droite bc sera la *polaire* du point A par rapport à la conique cherchée. On construira de même la polaire gh du point B, et la polaire ad du point C. Ces trois polaires se coupent en trois points A', B', C', qui sont, respectivement, les *pôles* des côtés BC, CA, AB. Si l'on joint le point A aux deux pôles C' et B', les droites AB et AC' seront *conjuguées* par rapport à la conique; car le pôle de l'une se trouve sur l'autre (*Géom. sup.*, n° **687**). Les droites AC, AB' seront également deux droites conjuguées, et les rayons doubles de l'involution déterminée par les deux angles BAC', CAB', seront les tangentes à la conique issues du point A (*Géom. sup.*, n° **690**). Si ces tangentes sont réelles, la conique sera réelle, mais elle sera imaginaire, si ces tangentes sont imaginaires, et l'une ou l'autre de ces circonstances sera immédiatement indiquée par la figure; car, dans le premier cas, les angles BAC', CAB' seront complétement intérieur ou extérieur l'un à l'autre; et, dans le second cas, ils empiéteront au contraire l'un sur l'autre. Si la conique est réelle, on déterminera, comme on vient de le dire, ses quatre autres tangentes issues des sommets B et C, ce qui permettra de la construire, soit par enveloppes, soit par points. Ainsi, la question est résolue.

IV. Cela posé, soient a, b, c, d quatre quelconques des neuf points donnés de la surface du second degré.

Dans le plan abc, on mène, par le point a, deux droites arbitraires ai, aj, dont on détermine les points d'intersection i et j avec la surface (II). La conique, suivant laquelle le plan abc coupe la surface, est déterminée par les cinq points a, b, c, i, j; il faut trouver ses points, réels ou imaginaires, situés à l'infini. Pour cela, on mène les droites ac, ai, aj; puis les droites ac', ai', aj' parallèles à bc, bi, bj, respectivement. Les rayons doubles des deux faisceaux homographiques déterminés par ces deux systèmes de trois droites, sont parallèles aux asymptotes de la conique (*Géom. sup.*, n° **646**). Si ces rayons doubles sont réels ou coïncidents, il est inutile d'aller plus loin. La courbe, et par conséquent la surface elle-même, ayant à l'infini deux points réels, distincts ou réunis en un seul, celle-ci est un hyperboloïde ou un paraboloïde. Mais si les rayons doubles sont imaginaires, on n'en peut encore tirer aucune conclusion, parce qu'une surface du second ordre qui s'étend à l'infini, peut, aussi bien qu'une surface limitée, être coupée par un plan suivant une courbe fermée. Il faut donc, dans ce cas, procéder à une recherche plus approfondie.

V. Afin d'éviter l'emploi des formules trigonométriques, on coupera le plan *abc*, suivant une droite AB, par un plan arbitraire M, et l'on cherchera, sur AB, les deux points imaginaires $\gamma\gamma'$, suivant lesquels cette droite est coupée par les deux rayons doubles imaginaires dont il vient d'être question [*].

On fera la même série de constructions dans le plan *abd*, et l'on obtiendra, sur la droite BC suivant laquelle ce plan est coupé par le plan transversal M, deux points α, α' (que je suppose encore imaginaires) [**], qui sont les points de rencontre de BC par les droites $a\alpha$, $a\alpha'$, menées, du point a, parallèlement aux asymptotes imaginaires de la conique d'intersection de la surface par le plan *abd*.

Enfin, dans le plan *acd*, coupé par le plan M suivant la droite CA, on trouvera de même, sur cette droite, deux points imaginaires β, β' [**], déterminés par les droites $a\beta$, $a\beta'$, menées, du point a, parallèlement aux asymptotes de la conique d'intersection de la surface par ce plan *acd*.

VI. Par cette série de constructions, dont chacune n'exige l'emploi que de la règle et du compas, on a déterminé six arêtes imaginaires, savoir : $a\gamma$, $a\gamma'$, $a\alpha$, $a\alpha'$, $a\beta$, $a\beta'$, appartenant à un cône du second degré, qui a son sommet au point a, et qui a pour base la courbe d'intersection de la surface par le plan situé à l'infini. Il ne s'agit plus que de savoir si ce cône est réel, et, pour cela, il suffit de savoir si la courbe, suivant laquelle il est coupé par le plan M, est elle-même réelle. Or on connaît, dans le plan M, six points imaginaires appartenant à cette conique, savoir : γ, γ' sur AB, α, α' sur BC et β, β' sur CA. Donc on peut aisément, d'après le lemme (III), déterminer si cette

---

[*] Ces points γ, γ' sont les points doubles des deux divisions homographiques marquées sur la droite AB par les rayons homologues ac, ac'; ai, ai'; aj, aj'.

[**] Si ces points étaient réels, on se trouverait dans le cas du § IV, sur lequel il n'y a plus lieu de revenir.

courbe est réelle ou imaginaire, circonstances dont l'une ou l'autre entraîne celle de la réalité ou de l'imaginarité de la courbe d'intersection de la surface par le plan à l'infini, et par suite (I) l'*espèce* de cette surface.

VII. Dans le cas où la surface est illimitée, il reste encore à reconnaître si elle est réglée ou non.

Pour cela, il suffit de s'assurer si le plan tangent en l'un de ses points contient deux droites appartenant à la surface, ou simplement si une droite, tracée arbitrairement dans ce plan tangent et ne passant pas par le point de contact, rencontre la surface en deux points réels.

On mènera donc le plan tangent à la surface en son point a, par lequel passent des coniques que les constructions précédentes ont déjà déterminées, et dont les tangentes au point a sont contenues dans ce plan. Puis, menant à volonté une droite dans le plan tangent, on cherchera, par la méthode indiquée au § V de la Note précitée (II), si les deux points d'intersection de cette droite et de la surface sont réels ou imaginaires. Dans le premier cas, la surface est réglée, et, dans le second cas, elle ne l'est pas.

Ainsi, le problème est résolu.

§ II. — *Neuf plans tangents de la surface sont donnés.*

VIII. La question qu'il s'agit actuellement de résoudre est celle-ci :

*Déterminer l'*ESPÈCE *de la surface du second ordre qui touche neuf plans donnés.*

Il suffit, comme dans le premier cas, de déterminer la courbe d'intersection de la surface par le plan situé à l'infini. Si cette courbe est imaginaire, la surface est un ellipsoïde; si elle est réelle, c'est un hyperboloïde, et si elle se réduit à un point, c'est un paraboloïde. Dans ces deux derniers cas, il y aura lieu de rechercher, en outre, si la surface est réglée ou non.

Pour faire concevoir plus clairement comment cette courbe peut être déterminée, je supposerai d'abord que le plan sécant est à distance finie. Qu'on prenne arbitrairement trois points dans ce plan, et qu'on les regarde comme étant les sommets de trois cônes du second ordre circonscrits à la surface. Chacun de ces cônes aura, dans le plan sécant, deux arêtes (réelles ou imaginaires) qui sont évidemment des tangentes à la courbe d'intersection cherchée. On déterminera ces deux droites, et l'on obtiendra ainsi, dans le plan sécant, six tangentes issues, deux à deux, de trois points fixes, et qui enveloppent la conique cherchée. Si ces trois groupes de tangentes sont réelles, ou si l'un d'eux seulement est réel, la courbe d'intersection l'est aussi. Mais si les six tangentes sont imaginaires, il faudra rechercher, en outre, si la conique qu'elles déterminent est imaginaire ou réelle; car une conique réelle peut avoir trois couples de tangentes imaginaires issues de trois points fixes.

Quand le plan sécant est à l'infini, les cônes deviennent des cylindres; mais les mêmes conclusions subsistent. C'est le cas qui se présente dans la question proposée.

Avant d'entrer dans le détail des constructions qu'exige l'emploi de la solution qui vient d'être exposée en termes généraux, il est nécessaire de traiter quelques questions préliminaires, qui d'ailleurs offrent par elles-mêmes un certain intérêt, et qui peuvent être utiles dans d'autres circonstances. Ces questions font le sujet des quatre paragraphes suivants.

IX. *Une génératrice rectiligne et six plans tangents d'un hyperboloïde à une nappe étant donnés, construire les autres génératrices de la surface.*

Soit a la droite donnée, et A, B, C, D, E, F les six plans. Appelons α, β, γ, δ les droites d'intersection du plan F par les quatre A, B, C, D. On déterminera, dans le plan F, la conique enveloppe des tangentes dont chacune coupe ces quatre droites en quatre points formant un rapport anharmonique constant et égal à celui des quatre points (a, A), (a, B), (a, C), (a, D) où la droite a coupe les quatre mêmes plans (*Géom. sup.*, n° 552).

On déterminera pareillement, dans le plan F, la conique dont les tangentes coupent les quatre droites fixes α, β, γ, ε (intersections du plan F par les plans A, B, C, E), en quatre points, dont le rapport anharmonique soit constamment égal à celui des quatre points (a, A), (a, B), (a, C), (a, E).

Ces deux coniques, ayant déjà trois tangentes communes, en auront une quatrième réelle, qui jouira évidemment de la propriété, que les points où elle coupera les cinq plans A, B, C, D, E formeront une division homographique à celle des cinq points (a, A), (a, B), (a, C), (a, D), (a, E).

Il en résulte que les droites de jonction des points homologues de ces deux divisions homographiques seront les génératrices d'un hyperboloïde à une nappe, passant par la droite a et touchant les six plans donnés, puisque chacun de ces plans contient une droite située tout entière sur la surface. Ainsi le problème est résolu.

X. *Étant donnés neuf plans tangents d'une surface du second ordre* S, *et une droite* a *contenue dans l'un* A *de ces plans, on demande de construire le second plan tangent de la surface qui passe par cette droite.*

Qu'on imagine deux des vingt-huit hyperboloïdes à une nappe qui touchent les huit plans B, C, D, E, F, G, H, I; par exemple, celui qui passe par la droite (B, I), et qui touche les six autres plans; et celui qui passe par la droite (C, I) en touchant les six autres plans. Appelons-les U et U'.

Les trois surfaces S, U et U' ont huit plans tangents communs. Donc, d'après un théorème connu, les trois couples de plans tangents qu'on peut leur mener par une droite a, savoir : A, A'; M, M'; et N, N', sont en involution. Le plan A est connu; les quatre M, M', N, N' se déterminent aisément, comme on va le voir. Ainsi A' est déterminé; ce qui résout le problème proposé.

Pour trouver M et M' (ou N et N'), on prendra, sur la droite a, un point arbitraire α. On déterminera, par le problème précédent (IX), cinq génératrices de l'hyperboloïde U, lesquelles, avec le point α, détermineront cinq plans tangents d'un cône du second degré. Enfin, on cherchera les deux plans tangents à ce cône qui passent par la droite a [*]. Ce sont précisément les plans cherchés M, M'.

---

[*] Pour les obtenir, on coupera le cône par un plan arbitraire L. Les cinq plans tangents du cône y intercepteront cinq tangentes d'une conique, à laquelle on mènera

XI. *Étant donnés neuf plans tangents d'une surface du second degré* S, *déterminer les deux plans tangents* A, A′ *de la surface, qui passent par une droite donnée* a.

Soient U et U′ les deux hyperboloïdes à une nappe dont il s'agit dans le problème précédent (X), et soient W, W′ deux autres hyperboloïdes à une nappe, menés, l'un par la droite (D, I), tangentiellement aux six plans B, C, E, F, G, H; l'autre, par la droite (E, I), tangentiellement aux six plans B, C, D, F, G, H.

Soient M, M′; N, N′; P, P′; Q, Q′ les quatre couples de plans tangents menés, par la droite a, aux quatre hyperboloïdes respectivement.

Chacune de ces quatre surfaces a huit plans tangents communs avec S. Donc les trois angles dièdres (A, A′), (M, M′), (N, N′) sont en involution. Et, pareillement, les trois angles dièdres (A, A′), (P, P′), (Q, Q′) sont en involution. Donc les deux plans A, A′, qui font partie à la fois des deux involutions, se construiront sans difficulté (*Géom. sup.*, n° **271**). Ce sont les plans tangents demandés.

XII. *Etant donnés, dans un plan, trois points* α, β, γ *et six tangentes imaginaires d'une même conique, issues, par couples, de ces trois points, déterminer la conique, et la construire si elle est réelle.*

Ces tangentes, que j'appellerai $\alpha\varepsilon$, $\alpha\varepsilon'$; $\beta\varphi$, $\beta\varphi'$; $\gamma\psi$, $\gamma\psi'$ sont données par leurs *éléments* réels (*Géom. sup.*, n° **98**), et la condition qu'elles enveloppent une même conique est exprimée par la relation suivante, où n'entrent que des produits réels (*Géom. sup.*, n° **497**), savoir :

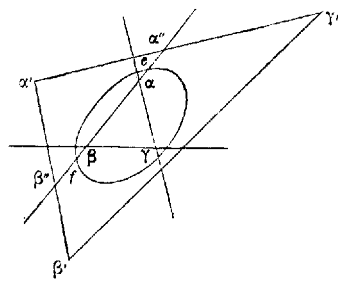
$$\frac{\sin\beta\alpha\varepsilon.\sin\beta\alpha\varepsilon'}{\sin\gamma\alpha\varepsilon.\sin\gamma\alpha\varepsilon'}\cdot\frac{\sin\alpha\gamma\psi.\sin\alpha\gamma\psi'}{\sin\beta\gamma\psi.\sin\beta\gamma\psi'}\cdot\frac{\sin\gamma\beta\varphi.\sin\gamma\beta\varphi'}{\sin\alpha\beta\varphi.\sin\alpha\beta\varphi'}=+1.$$

Les sommets α, β, γ du triangle donné étant, par hypothèse, intérieurs à la conique, chaque côté, tel que $\alpha\beta$, rencontrera nécessaire-

---

deux tangentes par le point où la droite a perce le plan L. Ces deux tangentes et la droite a déterminent les deux plans M, M′.

ment cette courbe en deux points réels e, f, à moins qu'elle ne soit



elle-même imaginaire. Ce sont les deux points e, f qu'on va déterminer.

Que, par chacun des points α, β, γ, on mène les droites conjuguées harmoniques des côtés du triangle par rapport aux deux tangentes imaginaires qui s'y croisent. Ces droites, toujours réelles (*Géom. sup.*, n° **92**), se coupent, deux à deux, aux points α', β', γ', sommets du triangle *polaire* du triangle donné; et si l'on désigne par α'' et β'' les points de rencontre du côté $\alpha\beta$ par les deux droites $\alpha'\beta'$, $\alpha'\gamma'$, issues du pôle α' de $\alpha\beta$, il est visible que les points α, α'' seront *conjugués* par rapport à la conique, parce que la polaire de l'un passe par l'autre, et, pareillement, les points β, β'' seront deux points conjugués. Donc les points cherchés e, f sont les points doubles de l'involution $\alpha\alpha''$, $\beta\beta''$ (*Géom. sup.*, n° **688**). Si ces points sont réels, ce qui aura lieu si les deux segments n'empiètent pas l'un sur l'autre, la conique sera réelle, et l'on en déterminera quatre autres points sur les deux autres côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$. Mais la conique sera imaginaire dans le cas contraire.

XIII. *Étant donnés neuf plans tangents d'une surface du second ordre, déterminer la courbe d'intersection (réelle ou imaginaire) de cette surface par un plan donné.*

Soient S la surface, O le plan sécant, et A, B, C,..., I les neuf plans tangents. On prendra, comme il a été dit ci-dessus (VIII), trois points dans le plan O, et, pour abréger les constructions, on choisira de préférence ceux où viennent se croiser les droites d'intersection de ce plan par trois quelconques des plans tangents donnés; par exemple, les trois points (O, A, B), (O, A, C) et (O, B, C), que je désignerai par les lettres α, β, γ. Il s'agit d'abord de mener, par chacun de ces points, un cône tangent à la surface. Ne nous occupons que de celui qui a son sommet en α, et que nous désignerons par la notation $\widehat{\alpha}$. On connaît déjà deux de ses plans tangents, savoir, A et B; on va en trouver quatre autres. Pour cela, on tracera arbitrairement, dans le plan O, deux droites passant par le point α, et, par chacune de ces droites, on conduira deux plans tangents à la surface S (XI). On aura ainsi six plans tangents du cône $\widehat{\alpha}$, lequel est nécessairement réel, puisque son sommet est extérieur à la surface. Il s'agit de trouver les deux arêtes, réelles ou imaginaires, d'intersection de ce cône par le plan O. Pour cela, on coupera toute la figure par un plan arbitraire L; les six plans tangents au cône y intercepteront six tangentes réelles d'une conique, dont on cherchera les points d'intersection ε, ε' par la droite suivant laquelle le plan O coupe ce plan transversal. Les deux droites $\alpha\varepsilon$, $\alpha\varepsilon'$ (qui peuvent être imaginaires) sont les deux arêtes cherchées. Ce sont évidemment deux droites du plan O tangentes à la courbe d'intersection de ce plan et de la surface S. Si elles sont réelles, cette courbe d'intersection l'est aussi; et, si cette réalité est le seul objet qu'on se propose de constater, il ne sera pas nécessaire de pousser plus loin les investigations. Si elles sont imaginaires, on déterminera pareillement les deux tangentes à la surface $\beta\varphi$, $\beta\varphi'$, issues du point β, et les deux $\gamma\psi$, $\gamma\psi'$, issues du point γ. Ces six droites déterminent la conique cherchée, qu'on construira, s'il y a lieu, comme il a été dit ci-dessus (XII).

XIV. *Déterminer l'espèce de la surface du second ordre qui touche neuf plans donnés.*

Il suffit, comme on l'a dit ci-dessus (VIII), de supposer que le plan sécant du problème précédent est à l'infini. Voyons ce que deviennent les constructions indiquées.

Les points α, β, γ sont alors les points infiniment éloignés dans les directions (A, B), (A, C), (B, C), respectivement. Les couples de plans tangents, menés par les droites issues de l'un de ces points dans le plan sécant, deviennent parallèles, deux à deux, et parallèles respectivement aux droites (A, B), (A, C), (B, C). Enfin, les trois cônes auxiliaires dégénèrent en cylindres.

On coupera ces trois cylindres par un plan arbitraire L. Ne nous occupons, pour abréger, que de celui dont les génératrices sont parallèles à (A, B). Soit α la trace de cette droite sur le plan L. On mènera, par ce point, des parallèles $\alpha\varepsilon$, $\alpha\varepsilon'$ aux asymptotes de la conique d'intersection du plan L et du cylindre. On aura pareillement, dans ce plan, deux autres couples de droites $\beta'\varphi$, $\beta'\varphi'$ et $\gamma'\psi$, $\gamma'\psi'$, relatives aux deux autres cylindres. Le plan L peut être regardé, quel qu'il soit, comme étant parallèle au plan situé à l'infini : il s'agit de déterminer, dans ce plan L, les éléments d'une conique homothétique à la conique d'intersection de la surface par le plan à l'infini. Pour cela il suffit, par un point quelconque de la droite (A, B), de mener deux droites, l'une parallèle à (A, C) et l'autre parallèle à (B, C); puis, par les points β et γ où ces parallèles coupent le plan L, de mener des droites $\beta\varphi$, $\beta\varphi'$ et $\gamma\psi$, $\gamma\psi'$, parallèles respectivement aux droites $\beta'\varphi$, $\beta'\varphi'$ et $\gamma'\psi$, $\gamma'\psi'$.

Il est évident, d'après cette construction, que la conique déterminée dans le plan L, par les trois couples de tangentes $\alpha\varepsilon$, $\alpha\varepsilon'$; $\beta\varphi$, $\beta\varphi'$; $\gamma\psi$, $\gamma\psi'$ est homothétique à celle qu'il y aurait lieu de considérer dans le plan à l'infini. Donc il suffit de constater la réalité ou l'imaginarité de cette conique (XII). L'*espèce* de la surface en sera une conséquence immédiate.

XV. Cependant, si la surface est illimitée (hyperboloïde ou paraboloïde), il reste encore à reconnaître si elle est réglée. Pour cela, on déterminera le point de contact avec la surface de l'un quelconque des plans tangents donnés. Si la surface est réglée, il passe par ce point deux génératrices rectilignes. Donc si l'on mène, par ce point, une droite quelconque non située dans le plan tangent, on pourra dans ce cas mener, par cette droite, deux plans tangents réels à la surface, savoir, les deux plans passant par cette droite et par les deux génératrices. Si, au contraire, la surface n'est pas réglée, ces deux plans seront imaginaires. On mènera donc une droite par le point de contact, dans une direction quelconque, mais non située dans le plan tangent, et l'on déterminera les deux plans tangents à la surface issus de cette droite (XI). S'ils sont réels, la surface est réglée; s'ils sont imaginaires, la surface est un hyperboloïde à deux nappes ou un paraboloïde elliptique.

Ainsi, le problème est résolu.

XVI. La question qui vient d'être traitée aurait également pu se résoudre en cherchant les points de contact des neuf plans tangents donnés. Elle aurait ainsi été ramenée à celle où il s'agit de déterminer l'*espèce* d'une surface du second ordre déterminée par neuf points (I); mais il était plus direct et plus élégant de la traiter sans le secours de cet intermédiaire.