JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

POINSOT

Questions dynamiques. Sur la percussion des corps. Chapitre troisième. Percussion d'un corps animé par des forces quelconques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 4 (1859), p. 421-426.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4__421_0>

QUESTIONS DYNAMIQUES.

SUR

LA PERCUSSION DES CORPS;

Par M. POINSOT [*].

CHAPITRE TROISIÈME.

Percussion d'un corps animé par des forces quelconques.

1. Nous n'avons traité jusqu'ici la question que dans quelques cas très-particuliers. Nous avons supposé que tout le mouvement du corps provenait de l'impulsion d'une *force unique* P, dirigée d'une certaine manière, et nous nous sommes borné à déterminer la percussion Q, dont le corps est capable contre un point fixe, seulement pour certains lieux où cet obstacle lui serait présenté.

Il nous reste donc à résoudre la question générale où le corps est animé par des forces *quelconques données*, et où l'on demande la percussion qu'il peut produire, par un quelconque de ses points, sur un obstacle fixe que ce point du corps viendrait à rencontrer.

Problème général.

2. *Considérons un corps solide libre, actuellement animé par des forces données, et supposons que l'un quelconque de ses points* C *rencontre tout à coup un point fixe qui force le corps à changer de*

---

[*] Cet article complète le Mémoire dont l'illustre auteur n'avait donné que les deux premiers chapitres dans le tome II de notre série actuelle (p. 281). Il sera naturel d'y joindre les deux Notes insérées dans le présent volume, cahier de mai. J. L.

mouvement; on demande la direction et la grandeur de la percussion qui sera produite sur cet obstacle.

3. La solution n'est pas difficile à découvrir : car désignons par Q la percussion qui se fera sentir au point fixe; il est évident que si, au moment du choc, on appliquait au corps une force $-$ Q parfaitement égale et contraire à Q, le point du corps qui est en C aurait tout à coup une vitesse *nulle*, ou tomberait en repos à l'instant que l'on considère.

Pour obtenir les équations du problème, il suffit donc d'exprimer que de l'ensemble des forces *données* et de la force *inconnue* $-$ Q, qu'on suppose appliquée en C, il ne doit résulter pour ce point particulier C du corps qu'une vitesse nulle; et cette seule condition étant développée, donnera tout ce qui est nécessaire pour déterminer la *grandeur*, la *direction* et le *sens* de la percussion cherchée Q.

Développement de la solution.

4. Prenons pour axes actuels des coordonneés les trois axes *principaux* du corps qui passent par son centre de gravité G. Désignons par m la masse du corps, par $m\alpha^2$, $m\beta^2$, $m\gamma^2$ ses trois moments principaux d'inertie, et par x, y, z les coordonnées du point C.

Je commence par réduire toutes les forces *données* à trois forces

$$X_0,\ Y_0,\ Z_0$$

dirigées suivant les trois axes, et à trois couples

$$L_0,\ M_0,\ N_0$$

autour des mêmes axes.

Je conçois de même que l'on ait transformé la force *inconnue* $-$ Q, qui est appliquée en C, dans les trois forces

$$X,\ Y,\ Z$$

appliquées au centre de gravité G, et dans les trois couples qu'elles donnent autour des trois axes principaux, dont les moments sont exprimés par

$$Yz - Zy,\quad Zx - Xz,\quad Xy - Yx.$$

5. De cette manière le système de toutes les forces se trouve ramené aux trois forces et aux trois couples suivants, savoir :

1°. Les trois forces

$$X_0 + X, \quad Y_0 + Y, \quad Z_0 + Z$$

appliquées suivant les axes au centre de gravité G ;

2°. Les trois couples :

$$L_0 + Zy - Yz, \quad M_0 + Xz - Zx, \quad N_0 + Yx - Xy$$

perpendiculaires aux mêmes axes.

6. Il s'agit de voir maintenant quelle est la *vitesse* qui en résulte pour le point particulier C du corps.

7. D'abord les trois forces étant appliquées au centre de gravité, donnent à tous les points du corps et, par conséquent, au point C lui-même les trois vitesses respectives :

$$(1) \qquad \frac{X_0 + X}{m}, \quad \frac{Y_0 + Y}{m}, \quad \frac{Z_0 + Z}{m}$$

suivant les coordonnées x, y, z.

8. En second lieu, les trois couples tendent à faire tourner le corps autour des trois axes avec les trois vitesses angulaires respectives p, q, r dont les valeurs sont

$$(2) \quad p = \frac{L_0 + Zy - Yz}{m\alpha^2}, \quad q = \frac{M_0 + Xz - Zx}{m\beta^2}, \quad r = \frac{N_0 + Yx - Xy}{m\gamma^2}.$$

Or il est aisé de voir que du système de ces trois rotations p, q, r, il vient pour le point C, suivant ses trois coordonnées x, y, z, les trois vitesses respectives exprimées par

$$(3) \qquad qz - ry, \quad rx - pz, \quad py - qx.$$

Donc, en ajoutant ces vitesses aux trois précédentes (1), et désignant par $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ les vitesses totales du point C suivant ses trois coordonnées

x, y, z, on aura

$$\dot{x} = \frac{X_0 + X}{m} + qr - ry,$$
$$\dot{y} = \frac{Y_0 + Y}{m} + rx - pz,$$
$$\dot{z} = \frac{Z_0 + Z}{m} + py - qx;$$

ce qui donne (en y mettant, au lieu de p, q, r, leurs valeurs ci-dessus (2) et réduisant), les trois équations suivantes :

$$(\mathrm{A}) \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{X_0 + X}{m} + \frac{z(M_0 + Xz - Zx)}{m\beta^2} - \frac{y(N_0 + Yx - Xy)}{m\gamma^2}, \\ \dot{y} &= \frac{Y_0 + Y}{m} + \frac{x(N_0 + Yx - Xy)}{m\gamma^2} - \frac{z(L_0 + Zy - Yz)}{m\alpha^2}, \\ \dot{z} &= \frac{Z_0 + Z}{m} + \frac{y(L_0 + Zy - Yz)}{m\alpha^2} - \frac{x(M_0 + Xz - Zx)}{m\beta^2}. \end{aligned} \right.$$

9. Voilà donc les équations qui donnent immédiatement les trois composantes $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ de la vitesse j que prendrait le point C du corps en vertu des forces données qui l'animent combinées avec la force inconnue $-$ Q qui lui serait appliquée en C.

10. Or si la force $-$ Q est bien choisie, il faut que la vitesse du point C se trouve ici nulle, ce qui exige que ses trois composantes rectangulaires $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ soient nulles chacune en particulier.

Il suffit donc, pour obtenir les équations cherchées, de faire $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ toutes trois nulles dans les formules (A) qui précèdent, ce qui donne les trois équations suivantes :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 + \beta^2\gamma^2)X - \beta^2 xy\,Y - \gamma^2 xz\,Z = -\beta^2\gamma^2 X_0 - \gamma^2 z M_0 + \beta^2 y N_0, \\ &\alpha^2 xy\,X - (\alpha^2 x^2 + \gamma^2 z^2 + \alpha^2\gamma^2)Y + \gamma^2 yz\,Z = \alpha^2\gamma^2 Y_0 - \gamma^2 z L_0 + \alpha^2 x N_0, \\ &\alpha^2 xz\,X + \beta^2 yz\,Y - (\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2\beta^2)Z = \alpha^2\beta^2 Z_0 + \beta^2 y L_0 - \alpha^2 x M_0, \end{aligned} \right.$$

qui détermineront les composantes X, Y, Z de la force $-$ Q, et, par conséquent (en changeant le signe) celles de la percussion cherchée Q. Ce qu'il fallait trouver.

Résolution des trois équations précédentes (1).

11. Ces trois équations étant du premier degré en X, Y, Z peuvent être résolues sur-le-champ par les formules connues. Ainsi en représentant X, Y, Z par les trois fractions

$$X = \frac{N_x}{D}, \quad Y = \frac{N_y}{D}, \quad Z = \frac{N_z}{D},$$

on trouvera, toute réduction faite, et par un calcul qui n'a d'autre difficulté que sa longueur :

1°. Pour le commun dénominateur D de ces trois fractions, la valeur suivante

$$\begin{aligned}\frac{D}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} = {} & (x^2+y^2+z^2\ (\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2) + \alpha^2(\beta^2+\gamma^2)x^2 + \beta^2(\alpha^2+\gamma^2)y^2 \\ & + \gamma^2(\alpha^2+\beta^2)z^2 + \alpha^2\beta^2\gamma^2;\end{aligned}$$

2°. Pour les numérateurs N_x, N_y, N_z de ces mêmes fractions, les valeurs

$$\begin{aligned}\frac{N_x}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} = {} & -[x^2(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2)+\gamma^2(\alpha^2x^2+\beta^2y^2)+\beta^2(\alpha^2x^2+\gamma^2z^2)+\alpha^2\beta^2\gamma^2]\,X_0 \\ & - xy(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2+\alpha^2\beta^2)\,Y_0 - xz(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2+\alpha^2\gamma^2)\,Z_0 \\ & + xyz(\beta^2-\gamma^2)\,L_0 - z(\alpha^2x^2+\gamma^2y^2+\gamma^2z^2+\alpha^2\gamma^2)\,M_0 \\ & + y(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\beta^2z^2+\alpha^2\beta^2)\,N_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{N_y}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} = {} & - xy(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2+\alpha^2\beta^2)\,X_0 \\ & -[y^2(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2)+\alpha^2(\beta^2y^2+\gamma^2z^2)+\gamma^2(\alpha^2x^2+\beta^2y^2)+\alpha^2\beta^2\gamma^2]\,Y_0 \\ & - yz(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2+\beta^2\gamma^2)\,Z_0 \\ & + z(\gamma^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2+\beta^2\gamma^2)\,L_0 + xyz(\gamma^2-\alpha^2)\,M_0 \\ & - x(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\alpha^2z^2+\alpha^2\beta^2)\,N_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{N_z}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} = {} & - xz(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2+\alpha^2\gamma^2)\,X_0 - yz(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2+\beta^2\gamma^2)\,Y_0 \\ & -[z^2(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2)+\alpha^2(\beta^2y^2+\gamma^2z^2)+\beta^2(\alpha^2x^2+\gamma^2z^2)+\alpha^2\beta^2\gamma^2]\,Z_0 \\ & - y(\beta^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2+\beta^2\gamma^2)\,L_0 + x(\alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\gamma^2z^2+\alpha^2\gamma^2)\,M_0 \\ & + xyz(\alpha^2-\beta^2)\,N_0.\end{aligned}$$

12. Si donc, dans l'expression

$$Q = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = \frac{\sqrt{N_x^2+N_y^2+N_z^2}}{D},$$

on met, à la place de N_x, N_y, N_z et D, les valeurs précédentes, on aura la percussion cherchée Q en fonction des données du problème, savoir : les trois *bras* α, β, γ de l'inertie du corps, les forces et couples X_0, Y_0, Z_0, L_0, M_0, N_0 qui l'animent, et les trois coordonnées x, y, z du point de ce corps où le point fixe est présenté.

13. On voit, par la forme de ces expressions, que la percussion actuelle du corps, en vertu des forces et des couples qui lui sont appliqués, se compose des percussions qui seraient produites sur le même point, si chacune de ces forces et chacun de ces couples donnés agissait séparément, et il est évident que cela doit être.

On peut d'ailleurs vérifier l'exactitude de toutes ces formules générales en les appliquant aux différents cas particuliers que nous avons traités dans les deux chapitres précédents : c'est une application que j'avais développée sur plusieurs exemples, mais que je supprime ici et laisse à faire au lecteur qui se pourra convaincre du parfait accord de nos résultats.

Je me contenterai donc d'ajouter ici deux mots sur le sens bien précis qu'on doit attacher, dans le problème dont nous venons de donner la solution, à la nature de l'obstacle qu'on y considère. C'est dans ce problème ce que l'on nomme un *point fixe* que l'on suppose capable d'arrêter tout à coup et en tous sens le point C du corps qui vient le frapper, c'est-à-dire de le retenir au même lieu de l'espace comme si ce point C du corps était tombé, et *pour un instant*, dans l'intérieur d'une sphère creuse et résistante d'un rayon infiniment petit. Il faut bien remarquer qu'après le choc cet obstacle disparaît comme s'il n'existait plus : car le corps, dans le mouvement nouveau qui lui reste et qui n'est autre chose qu'une rotation autour d'un axe spontané passant par le point C, devient incapable de frapper par le même point C.

Mais dans ce nouveau mouvement on pourrait chercher la nouvelle percussion que le corps est capable de produire par tout autre point C′, et on trouverait cette percussion exactement par les mêmes formules, en y changeant les premières forces données et les remplaçant par les nouvelles, ce qui conduit naturellement à la théorie de ces mouvements singuliers qu'on appelle des *ricochets*.