JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAXIMILIEN MARIE

Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 4 (1859), p. 369-388.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4__369_0>

NOUVELLE THÉORIE

DES

FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES;

PAR M. MAXIMILIEN MARIE,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

DEUXIÈME PARTIE.

DES PÉRIODES DES INTÉGRALES.

(Suite).

CHAPITRE V.

Des périodes des intégrales d'ordre quelconque.

55. On peut généraliser les théorèmes que nous avons établis dans les deux chapitres précédents, et les étendre aux intégrales d'ordre quelconque.

Mais nous devons d'abord expliquer le sens de quelques mots nouveaux que nous serons obligés d'employer.

La géométrie ne fournissant pas de moyens de figurer les solutions qui peuvent convenir à une équation

$$f(x, y, z, \ldots, t, u, v) = 0,$$

contenant plus de trois variables, nous désignerons, pour abréger, sous le nom de *champ* réel de l'équation, l'ensemble de ses solutions réelles, et, par champs imaginaires, les ensembles de ses solutions imaginaires groupées convenablement.

Toute équation aura un champ réel et une infinité de champs imaginaires conjugués, chacun de ces derniers comprenant toutes les solutions de l'équation proposée où les parties imaginaires de $x, y, z, \ldots, t, u, v$ seraient comme des nombres constants $C_1, C_2, \ldots, C_n, 1$.

Les solutions appartenant à un même champ imaginaire conjugué seront donc de la forme

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_1 + C_1\beta\sqrt{-1},\\
y &= \alpha_2 + C_2\beta\sqrt{-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u &= \alpha_n + C_n\beta\sqrt{-1},\\
v &= \alpha \;\;+ \quad\beta\sqrt{-1}.
\end{aligned}$$

Les $n+2$ variables $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, α et β étant liées entre elles par les deux équations dans lesquelles se décompose l'équation $f=0$, l'indétermination dans chaque groupe de solutions imaginaires, appartenant à un même champ conjugué, sera de l'ordre n, comme dans le groupe des solutions réelles.

54. Les solutions appartenant à un même champ imaginaire conjugué pourraient, d'une infinité de manières différentes, être rendues réelles par rapport à toutes les variables moins une, au moyen de transformations linéaires.

La plus simple de ces transformations consiste à substituer à $x, y, z, \ldots, t, u$ les variables définies par les équations

$$\begin{aligned}
x' &= x - C_1 v,\\
y' &= y - C_2 v,\\
z' &= z - C_3 v,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
u' &= u - C_n v.
\end{aligned}$$

Le champ imaginaire par rapport à v seulement de l'équation

$$f(x' + C_1 v,\ y' + C_2 v, \ldots,\ u' + C_n v,\ v) = 0,$$

remplacerait le champ imaginaire $[C_1, C_2, \ldots, C_n]$ de l'équation

$$f(x, y, z, \ldots, t, u, v) = 0.$$

55. Le champ imaginaire, par rapport à v seulement, de l'équation

$$f(x, y, z, \ldots, t, u, v) = 0,$$

touche le champ réel de la même équation par les solutions réelles communes aux équations

$$f = 0, \quad f'_v = 0.$$

Le groupe des solutions communes au champ réel et à tout autre champ imaginaire conjugué sera, au moyen de la transformation précédente, tout aussi facile à obtenir.

Le champ imaginaire conjugué $[C_1, C_2, \ldots, C_n]$ touchera évidemment le champ réel par les solutions correspondantes aux solutions réelles communes aux deux équations

$$f(x' + C_1 v, y' + C_2 v, \ldots, u' + C_n v, v) = 0$$

et

$$C_1 f'_x(x' + C_1 v, \ldots) + C_2 f'_y(x' + C_1 v, \ldots) + \ldots + f'_v(x' + C_1 v, \ldots) = 0.$$

Pour un champ imaginaire par rapport à u et v seulement, ces équations deviendraient

$$f(x, y, \ldots, t, u' + C_n v, v) = 0$$

et

$$C_n f'_u(x, y, \ldots, t, u' + C_n v, v) + f'_v(x, y, \ldots, t, u' + C_n v, v) = 0.$$

56. Si l'on ne considère d'abord que les solutions réelles d'une équation

$$f(x, y, z, \ldots, s, t, u, v) = 0,$$

l'intégrale

$$\sum_n v \,.\, dx \,.\, dy \,.\, dz \ldots\ldots dt \,.\, du$$

pourra immédiatement se mettre sous la forme

$$\int dx \int dy \int dz \ldots \int dt \int v\, du.$$

Si d'ailleurs le champ réel en question étant supposé fini, continu et unique, on veut étendre l'intégrale à tout ce champ, comme les valeurs de u et de v qui correspondront à un système de valeurs choisies pour $x, y, z, \ldots, t$, formeront elles-mêmes un lieu fermé, on

47..

prendra l'intégrale $\int v\,du$ pour le contour entier de ce lieu, c'est-à-dire, par exemple, entre les limites déterminées par $f'_v = 0$; en substituant, bien entendu, à v la différence de ses deux valeurs.

L'intégrale obtenue, qui sera une fonction de x, y, z,..., s, t, étant désignée par v_1, on prendra ensuite l'intégrale $\int v_1\,dt$ entre les limites pour lesquelles v_1 serait nul.

La nouvelle intégrale obtenue, qui sera une fonction de $x, y, z, \ldots, s$, étant désignée par v_2, on prendra de même l'intégrale $\int v_2\,ds$ entre les limites pour lesquelles v_2 serait nul.

Et l'on continuera ainsi jusqu'au bout.

Il n'y a pas lieu de poser la question de savoir si l'intégrale serait restée la même, l'ordre des intégrations venant à changer d'une manière quelconque; le résultat définitif sera toujours le même, parce qu'en fait ce sera toujours la même grandeur concrète qu'on aura calculée.

57. Supposons maintenant qu'au lieu d'un champ réel fini, continu et unique, associé à une infinité de champs imaginaires conjugués, sans limites, l'équation $f = 0$ comporte un champ réel illimité et une infinité de champs imaginaires conjugués, limités de toutes parts, et occupons-nous d'abord de celui dont le v seulement serait imaginaire; l'intégrale

$$\sum_u v\,.\,dx\,.\,dy\,.\,dz\ldots\ldots ds\,.\,dt\,.\,du,$$

étendue à tout ce champ, pourra se ramener encore immédiatement à des intégrales superposées, et les limites des intégrations partielles devront être déterminées par le groupe correspondant à l'ordre adopté, des équations à zéro des intégrales successives.

Or la propriété, dont jouit l'intégrale étendue à tout le champ réel, de conserver la même valeur, dans quelque ordre qu'on superpose les intégrations partielles, dépend essentiellement de la nature des équations qui déterminent les limites de ces intégrations.

Ces équations restant les mêmes pour le champ imaginaire dont nous parlons, que pour le champ réel, l'ordre des intégrations pourra donc encore être interverti à volonté.

58. Si l'on voulait obtenir l'intégrale

$$\sum_n v \,.\, dx \,.\, dy \,.\, dz \ldots\ldots dt \,.\, du,$$

étendue à tout un champ conjugué quelconque $[C, C_1\ C_2, \ldots, C_n]$, on pourrait substituer à $x, y, z, \ldots, t, u$ les variables réelles $x', y', \ldots, t', u'$ définies par les relations

$$\begin{aligned} x' &= x - C_1 v,\\ y' &= y - C_2 v,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ t' &= t - C_{n-1} v,\\ u' &= u - C_n v; \end{aligned}$$

et l'on formerait, au moyen de la règle donnée par M. Jacobi, la fonction de $x', y', z', \ldots, t', u'$, qu'on devrait placer sous le signe $\int$ dans la nouvelle intégrale.

Cette nouvelle intégrale se ramènerait immédiatement à des intégrations séparées, qu'on pourrait superposer dans un ordre complétement arbitraire.

59. L'intégrale

$$\sum_n v.dx.dy.dz\ldots\ldots dt.du,$$

étendue à tout un champ imaginaire conjugué, est toujours imaginaire, sans partie réelle, lorsque l'équation qui définit v est algébrique et entière, parce qu'à un système de valeurs

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 + \beta C_1 \sqrt{-1},\\ y &= \alpha_2 + \beta C_2 \sqrt{-1},\\ &\ldots\ldots\ldots\\ u &= \alpha_n + \beta C_n \sqrt{-1},\\ v &= \alpha + \beta \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

correspond, dans le même champ, son conjugué

$$x = \alpha_1 - \beta C_1 \sqrt{-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$v = \alpha - \beta \quad \sqrt{-1},$$

et qu'au système de différentielles

$$dx = d\alpha_1 + d\beta . C_1 \sqrt{-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$du = d\alpha_n + d\beta . C_n \sqrt{-1},$$

correspond aussi, dans le même champ, son conjugué

$$dx = d\alpha_1 - d\beta . C_1 \sqrt{-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$du = d\alpha_n - d\beta . C_n \sqrt{-1}.$$

60. Arrivons maintenant au théorème qui fait l'objet principal de ce chapitre.

Si l'équation

$$f(x, y, z, \ldots, u, v) = 0$$

admet une infinité de champs conjugués continus et fermés, l'intégrale

$$\int_n v . dx . dy \ldots\ldots dt . du$$

aura la même valeur, quel que soit celui de ces champs par rapport auquel on la forme; et cette valeur constante sera, en conséquence, une des périodes imaginaires de l'intégrale.

Nous avons vu, dans le chapitre III, que quel que soit le chemin fermé qu'on fasse suivre à un point $[xy]$, pourvu que ce chemin ait touché successivement deux branches voisines de la courbe réelle, dont l'équation doit rester satisfaite par ses coordonnées, l'intégrale $\int y\, dx$ prend pour valeur l'aire constante d'un quelconque des anneaux conjugués compris entre ces deux branches.

L'arbitraire dans le choix du chemin s'est de nouveau accru lorsqu'il s'est agi, dans le chapitre IV, des intégrales doubles, et il augmentera bien davantage encore, s'il s'agit d'intégrales d'ordre supérieur.

Mais nous restreindrons l'énoncé du théorème au cas où l'on prendrait toutes les valeurs des variables dans un même champ conjugué, d'ailleurs quelconque, parce qu'alors le fait acquerra, comme dans les chapitres précédents, une signification concrète, et, par suite, une importance plus grande; l'intégrale

$$\sum_n v \,.\, dx \,.\, dy \ldots\ldots dt \,.\, du,$$

représentant alors, par rapport au champ imaginaire considéré, la même grandeur concrète qu'elle représenterait par rapport au champ réel.

61. L'intégrale, relative au champ imaginaire par rapport à v seulement, peut s'écrire

$$\int dx \cdot \int dy \,.\int dz \ldots\ldots \int dt \,.\int v \,.\, du;$$

mais nous savons, d'après ce qui a été dit des intégrales simples, que la première des intégrales superposées dans cette formule, $\int v \,.\, du$, calculée comme si $x, y, \ldots, t$ étaient des paramètres, aura toujours la même valeur, quelle que soit la conjuguée de la courbe $[v, u]$ que l'on suive, au lieu de celle dont les u sont réels; on voit donc déjà qu'au champ imaginaire, par rapport à v seulement, on peut substituer un quelconque des champs imaginaires par rapport à v et à u, sans que l'intégrale complète en éprouve d'altération; et comme on aurait pu changer arbitrairement l'ordre des intégrations superposées, tant qu'il ne s'agissait que du champ imaginaire par rapport à v seulement, on voit également qu'on pourrait substituer à ce champ tout autre champ imaginaire par rapport à v et à une quelconque des autres variables.

Pour démontrer le théorème dans toute sa généralité, nous définirons, autrement que nous ne l'avons supposé jusqu'ici, les variables réelles qui doivent être substituées aux variables imaginaires.

Soient $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les caractéristiques du champ considéré que nous voulons comparer au champ imaginaire par rapport à v seulement; si nous posons

$$\begin{aligned}
x' &= x - \frac{C_1}{C_2} y,\\
y' &= y - \frac{C^2}{C_3} z,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
t' &= t - \frac{C_{n-1}}{C_n} u;
\end{aligned}$$

x', y', z', .., t' seront réels, soit que les valeurs de x, y, z,..., t, u soient prises dans un champ ou dans l'autre; en d'autres termes, la transformation étant faite et l'intégrale étant ramenée à la forme

$$\int dx' \int dy' \int dz' \ldots\ldots \int dt' \int du \,.\, F_1(x', y', \ldots, t', u);$$

elle se rapportera au champ [o, o, o,..., o], si l'on ne donne à u que des valeurs réelles, et au champ $[C_1, C_2, \ldots, C_n]$, si l'on donne à u des valeurs imaginaires convenablement choisies : or, elle aura la même valeur dans les deux cas, si les limites de toutes les intégrations successives sont ce qu'elles doivent être quand il s'agit d'un champ fermé et d'une intégrale complète.

62. *Remarque.* Si l'on faisait complétement la transformation des variables pour un champ $[C_1, C_2, \ldots, C_n]$, l'intégrale

$$\sum_n F(x, y, z, \ldots, t, u)\, dx \,.\, dy \ldots dt \,.\, du,$$

correspondante à ce champ, en supposant qu'on eût employé, pour faire la transformation, les formules

$$\begin{aligned}
x' &= x - \frac{C_1}{C_2} y,\\
y &= y - \frac{C_2}{C_3} z,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
t' &= t - \frac{C_{n-1}}{C_n} u,\\
u' &= u,
\end{aligned}$$

deviendrait, si $F_1(x', y', z', \ldots, t', u')$ désignait le résultat dé la substitution dans $F(x, y, z, \ldots, t, u)$ des valeurs de x, y, z,..., t, u tirées des équations précédentes en fonction de $x', y', z', \ldots, t', u'$ et D le déterminant

$$\begin{array}{l}
\dfrac{dx'}{dx}, \dfrac{dx'}{dy}, \dfrac{dx'}{dz}, \ldots, \dfrac{dx'}{dt}, \dfrac{dx'}{du},\\[2ex]
\dfrac{dy'}{dx}, \dfrac{dy'}{dy}, \dfrac{dy'}{dz}, \ldots, \dfrac{dy'}{dt}, \dfrac{dy'}{du},\\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\[2ex]
\dfrac{dt'}{dx}, \dfrac{dt'}{dy}, \dfrac{dt'}{dz}, \ldots, \dfrac{dt'}{dt}, \dfrac{dt'}{du},\\[2ex]
\dfrac{du'}{dx}, \dfrac{du'}{dy}, \dfrac{du'}{dz}, \ldots, \dfrac{du'}{dt}, \dfrac{du'}{du};
\end{array}$$

cette intégrale, disons-nous, deviendrait

$$\sum_n \mathrm{F}_1(x'y', \ldots, t'u') \frac{dx'.dy'.\ldots.dt'.du'}{\mathrm{D}}.$$

Or le déterminant D, dans ce cas, serait

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
1 & -\dfrac{C_1}{C_2} & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \hline
0 & 1 & -\dfrac{C_2}{C_3} & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 1 & -\dfrac{C_3}{C_4} & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 1 & \ldots\ldots & & 0 \\ \hline
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 & -\dfrac{C_{n-1}}{C_n} \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 1 \\ \hline
\end{array}$$

c'est-à-dire 1.

L'intégrale se réduirait donc à

$$\sum_n F_1(x', y', \ldots, t', u')\, dx'.dy'.dz', \ldots, dt'.du'.$$

La transformation n'affecterait donc pas essentiellement la fonction placée sous le signe $\sum$, et c'est pourquoi nous avons pu dire que l'intégrale représenterait, relativement, la même grandeur, soit qu'elle fût prise pour le champ réel ou pour un champ conjugué quelconque.

63. Le théorème que nous avions en vue est donc complétement établi; mais l'intégrale reprendrait encore la même valeur si, à l'un des champs conjugués on substituait tout autre champ fermé, défini comme on voudrait, pourvu qu'il touchât le champ réel par des solutions appartenant à un système où l'indétermination fût de l'ordre $n-1$.

En effet, à l'intégrale

$$\int dx \int dy \int dz \ldots . \int dt \int F(x, y, \ldots, t, u)\, du,$$

dont les éléments correspondraient à des valeurs réelles de $x, y, \ldots, t, u$, on pourrait substituer celle dont les éléments correspondraient à des valeurs réelles de $x, y, z, \ldots, t$, et à des valeurs imaginaires quelconques de u, pourvu que le chemin suivi par le point $[u, F]$ fût fermé et touchât sur ses deux branches la courbe réelle $[u, F]$; de même, désignant par F_1 l'intégrale

$$\int F(x, y, \ldots, t, u)\, du,$$

dont on vient de supposer la valeur obtenue, on pourrait substituer à la suivante

$$\int dx \int dy \int dz \ldots . \int dt\, F_1,$$

dont les éléments correspondraient à des valeurs réelles de $x, y, z, \ldots, t$, celle dont les éléments correspondraient à des valeurs réelles de $x, y, z, \ldots, s$, et à des valeurs imaginaires quelconques de t, pourvu que le chemin suivi par le point $[t F_1]$ fût fermé et touchât sur ses deux branches la courbe réelle $[t F_1]$; et ainsi de suite.

64. Nous n'avons nullement supposé, dans tout ce qui précède, que la fonction placée sous le signe $\int$ fût donnée explicitement; la même théorie s'appliquera donc aux intégrales des équations aux différentielles partielles qu'on peut ramener à la forme

$$f\left(x, y, z, \ldots, \frac{d^n F}{dx\, dy\, dz \ldots}\right) = 0.$$

Si, en particulier, la fonction ne dépend que de deux variables, et que, par suite, l'équation différentielle ait la forme

$$f\left(x, y, \frac{d^2 F}{dx\, dy}\right) = 0,$$

l'intégrale générale d'une pareille équation aura toujours pour périodes réelles les mesures des volumes enveloppés par les différentes nappes fermées de la surface réelle représentée par l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

et pour périodes imaginaires, les mesures des volumes compris dans l'intérieur des conjuguées fermées, de différentes catégories, de la même surface.

Cela signifie que dans l'équation intégrale

$$\varphi(x, y, F) = 0,$$

on pourra augmenter la fonction F d'une somme de multiples entiers quelconques de ces périodes, sans que cette addition change la relation qui lierait x et y après que F aurait été choisi.

Lorsque l'intégrale n'aura que deux périodes ω et ω', l'une réelle, l'autre imaginaire, l'équation

$$\varphi(x, y, F) = 0$$

pourra être formulée : on ne pourra évidemment pas la résoudre par rapport à F; mais si l'on parvient à y isoler cette variable, l'équation intégrale aura la forme

$$\mathrm{F}_1(x, y) = \psi(\mathrm{F}),$$

ψ désignant une fonction doublement périodique, mais F_1 pouvant représenter même une fonction algébrique élémentaire.

65. Nous prendrons pour exemple l'intégrale double

$$\int dy \int dx \sqrt{\frac{\frac{a^2+c^2}{a^4}x^2 + \frac{b^2+c^2}{b^4}y^2 - 1}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}},$$

qui donne l'aire de l'hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

La même intégrale, multipliée par c, représenterait le volume indéfini compris entre le plan des xy et la surface

$$\frac{z}{c} = \sqrt{\frac{\frac{a^2+c^2}{a^4}x^2 + \frac{b^2+c^2}{b^4}y^2 - 1}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}}.$$

Le contour apparent de cette surface est formé des deux ellipses

$$\frac{a^2+c^2}{a^4}x^2 + \frac{b^2+c^2}{b^4}y^2 - 1 = 0$$

et

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0:$$

la première est entourée par la seconde, par conséquent la surface réelle se projette dans l'intérieur de la première et au dehors de la seconde; elle se compose donc d'une nappe fermée de toutes parts, comprise entre les plans $z = \pm c$ et le cylindre

$$\frac{a^2+c^2}{a^4}x^2 + \frac{b^2+c^2}{b^4}y^2 - 1 = 0,$$

et d'une nappe indéfinie asymptotique au cylindre

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

qui tombe ensuite comme en forme de rideau pour s'épanouir parallèlement au plan des xy, en s'appuyant à l'infini sur le conoïde

$$y = mx,$$

$$z = c\sqrt{\frac{\frac{a^2+c^2}{a^4} + \frac{b^2+c^2}{b^4}m^2}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}m^2}},$$

qui en forme la seconde asymptote.

La conjuguée à abscisses et à ordonnées réelles touche, sur le plan des xy, le cylindre

$$\frac{a^2+c^2}{a^4}x^2 + \frac{b^2+c^2}{b^4}y^2 - 1 = 0,$$

et est asymptotique au cylindre

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Les autres conjuguées sont des anneaux compris entre les deux nappes de la surface réelle.

L'intégrale

$$c\int dy \int dx \sqrt{\frac{\frac{a^2+c^2}{a^4}x^2 + \frac{b^2+c^2}{b^4}y^2 - 1}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}}$$

aura pour période réelle le volume compris dans l'intérieur de la nappe fermée de la surface réelle, et pour période imaginaire le volume compris dans l'intérieur d'une conjuguée quelconque, ou entre la conjuguée dont les z seuls sont imaginaires et le cylindre asymptotique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

66. *Quadrature de l'enveloppe imaginaire.* — La quadrature des surfaces imaginaires donne lieu à des remarques analogues à celles que nous avons présentées à propos de la rectification des courbes imaginaires; toutefois, ce que nous pouvions affirmer alors d'une manière générale, ne se reproduira plus que dans des cas particuliers.

Quand le point $[x, y, z]$ se déplace sur l'enveloppe imaginaire des conjuguées, parallèlement aux plans des xz ou des yz, les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ sont réelles, de sorte que le cosinus de l'angle formé avec le plan des xy par le plan tangent à cette enveloppe, au point $[xyz]$, est encore exprimé par la formule

$$\frac{f'z}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + (f'_z)^2}};$$

mais $dx.dy$ ne représente généralement plus alors la projection sur le plan des xy d'un élément superficiel de l'enveloppe, de sorte que l'intégrale

$$\int\int dx.dy \cdot \frac{f'z}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + (f'_z)^2}},$$

prise entre des limites appartenant à l'enveloppe imaginaire, ne fournit généralement pas l'aire de cette enveloppe.

Cependant, pour les mêmes raisons que nous avons données en géométrie plane, les coordonnées x, y, z des différents points de l'enveloppe seront fréquemment imaginaires, sans parties réelles, ou, ce qui revient au même, composées de parties réelles constantes et de parties imaginaires seules variables.

Dans ce cas, x, y, z ayant ou pouvant recevoir la forme

$$x = \beta\sqrt{-1},$$
$$y = \beta'\sqrt{-1},$$
$$z = \beta''\sqrt{-1},$$

$dx.dy = -d\beta.d\beta'$ et représente, au signe près, la projection d'un élément superficiel de l'enveloppe, de sorte que l'intégrale

$$\int\int dx.dy \cdot \frac{f'z}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + (f'_z)^2}}$$

convient bien alors à l'expression de l'aire indéfinie de cette enveloppe.

Ainsi, si nous prenons pour exemple l'équation de l'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

l'enveloppe imaginaire sera l'hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

dont les points seront fournis par les solutions de la forme

$$x = \beta\sqrt{-1}, \quad y = \beta'\sqrt{-1}, \quad z = \beta''\sqrt{-1},$$

de l'équation proposée : l'intégrale double

$$\int\int dx\,dy\sqrt{\frac{\frac{a^2+c^2}{a^4}x^2 + \frac{b^2+c^2}{b^4}y^2 - 1}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}},$$

pourvu qu'on en détermine convenablement les limites, fournira donc également bien les aires de l'une et de l'autre des deux enveloppes, seulement la seconde aire sera affectée du signe contraire à celui qu'elle devrait avoir d'après le sens dans lequel elle aurait été engendrée.

67. J'ai cherché vainement une interprétation des périodes de l'intégrale double que je viens de prendre pour exemple; mais comme, pour y parvenir, j'étudiais de nouveau l'intégrale simple qui donne l'arc indéfini d'une hyperbole, j'ai trouvé de sa période réelle une interprétation tout aussi simple que celle que j'ai donnée dans le chapitre III de sa période imaginaire.

Le résultat où je suis parvenu pouvant servir à l'interprétation des périodes de l'intégrale double, je le rapporterai ici.

Les solutions de l'équation

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

qui fournissent les points des conjuguées dont les caractéristiques sont

$\pm\frac{b}{a}$, conjuguées qui se confondent avec les asymptotes, sont de la forme

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' \pm \beta\frac{b}{a}\sqrt{-1},$$

et doivent satisfaire aux conditions

$$a^2\alpha'^2 - b^2\alpha^2 = -a^2b^2$$

et

$$a\,\alpha' \pm b\,\alpha = 0,$$

qui exigent que α et α' restent infinis et conservent entre eux un rapport $\frac{\alpha'}{\alpha} = \pm\frac{b}{a}$; et laissent β complétement arbitraire.

J'avais obtenu la période imaginaire de l'intégrale

$$\int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

relative à l'hyperbole

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

en faisant parcourir au point $[xy]$ le chemin fermé composé des deux asymptotes et des deux branches de l'hyperbole

$$a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2,$$

considérée comme fournie par les solutions de la forme

$$x = \beta\sqrt{-1}, \quad x = \beta'\sqrt{-1}$$

de l'équation proposée

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2;$$

je déplaçais alors le point $[xy]$ sur les asymptotes, en laissant α et α' infinis, mais constants, et faisant varier β : dans ces conditions, la portion engendrée de l'intégrale indéfinie

$$\int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

était imaginaire, sans partie réelle, et représentait la longueur du chemin décrit sur l'asymptote; en même temps la portion de la même intégrale engendrée par le déplacement du point $[xy]$ sur l'hyperbole conjuguée de la proposée représentait, sous la même forme imaginaire sans partie réelle, le chemin parcouru sur cette hyperbole conjuguée.

La période imaginaire de l'intégrale se trouvait donc complète lorsque le tour entier était achevé; cette période, abstraction faite du signe $\sqrt{-1}$, représentait la différence des longueurs totales des asymptotes et de l'hyperbole conjuguée.

La période réelle s'interprète exactement de la même manière; en effet, pour déplacer le point $[xy]$ sur l'asymptote, on peut aussi bien faire varier α et α', en laissant β constant; alors dx est réel, et par conséquent la portion engendrée de l'intégrale

$$\int dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

l'est aussi, et si l'on transporte le point $[xy]$, parvenu à l'infini, de l'asymptote sur l'hyperbole proposée, l'intégrale continue de croître par valeurs réelles; la période réelle est donc complète quand le tour entier est achevé, et cette période doit être la différence des longueurs totales des asymptotes et de l'hyperbole proposée.

Il est facile de lever tous les doutes à cet égard; il ne s'agira pour cela que de vérifier que les intégrales qui serviraient à rectifier les deux hyperboles, considérées comme réelles, ont les mêmes périodes changées de réelles en imaginaires, et réciproquement. Or ces intégrales sont

$$\frac{1}{a}\int dx \sqrt{\frac{(a^2+b^2)x^2-a^4}{x^2-a^2}}$$

et

$$\frac{1}{a}\int dx \sqrt{\frac{(a^2+b^2)x^2+a^4}{x^2+a^2}};$$

si l'on y fait abstraction du facteur $\frac{1}{a}$, elles représentent les aires des courbes

$$y^2 = \frac{(a^2+b^2)x^2-a^4}{x^2-a^2}$$

et

$$y^2 = \frac{(a^2+b^2)x^2+a^2}{x^2+a^2};$$

mais, d'après notre théorie des quadratures, les intégrales

$$\int y\,dx$$

et

$$\int x\,dy$$

se rapportant à la même courbe, ont les mêmes périodes; et comme les équations précédentes donnent

$$x^2 = \frac{a^2y^2 - a^4}{y^2 - a^2 - b^2}$$

et

$$x^2 = \frac{a^2y^2 - a^4}{a^2 + b^2 - y^2},$$

les périodes des intégrales proposées sont donc respectivement égales à celles des intégrales

$$\int dy\sqrt{\frac{y^2-a^2}{y^2-a^2-b^2}}$$

et

$$\int dy\sqrt{\frac{y^2-a^2}{a^2+b^2-y^2}}.$$

Or l'une de ces deux dernières se forme de l'autre multipliée par $\sqrt{-1}$; elles ont donc les mêmes périodes changées de réelles en imaginaires, et réciproquement.

Quant aux périodes de l'intégrale double, comme je l'ai dit plus haut, je n'ai pu découvrir le rapport qu'elles doivent avoir à la question même de quadrature qui avait donné naissance à l'intégrale. Il semblerait qu'elles dussent pouvoir s'exprimer par des différences des aires illimitées des hyperboloïdes représentés par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et des aires des cônes représentés par

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0\,;$$

mais ces différences, ou du moins celles que j'ai calculées, se trouvent être infinies.

S'il ne s'agissait que d'expliquer, par les conditions mêmes du calcul soit de l'arc de l'hyperbole, soit de l'aire de l'hyperboloïde, la présence des périodes dans l'intégrale, ce serait facile.

En effet le point $[xy]$ assujetti à rester sur le lieu

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2,$$

décrivant la conjuguée $C = \infty$ de ce lieu, c'est-à-dire l'éllipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ resterait imaginaire sans partie réelle;

$$dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

serait donc réel ou imaginaire selon que $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ serait, en valeur absolue, moindre que 1 ou plus grand que 1.

D'autre part, le coefficient angulaire d'une droite représentée, dans le système $C = \infty$, par une équation

$$y = n\sqrt{-1}\,x + p + q\sqrt{-1},$$

est n; la valeur absolue de $\frac{dy}{dx}$ progresserait donc comme le coefficient angulaire de la tangente au lieu parcouru.

Ainsi les éléments de l'intégrale

$$\int dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

resteraient réels de $x = 0$ à l'abscisse

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{e}$$

du point où le coefficient angulaire de la tangente à l'ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

est 1, et deviendraient imaginaires de $x = \frac{a}{e}$ à $x = a$.

Le point $[xy]$ parcourant donc l'ellipse entière, l'intégrale acquerrait la valeur

$$4\int_0^{\frac{a}{e}} dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + 4\int_{\frac{a}{e}}^{a} dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Cette somme devait donc former une période de l'intégrale.

L'intégrale double donnerait lieu à des remarques analogues, mais il n'en résulte aucun théorème intéressant de géométrie.