JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WOEPCKE

Sur une classe de fonctions qui peuvent s'exprimer rationnellement les unes par les autres

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 4 (1859), p. 339-346.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4__339_0>

SUR

UNE CLASSE DE FONCTIONS
QUI PEUVENT S'EXPRIMER RATIONNELLEMENT LES UNES PAR LES AUTRES;

PAR M. WOEPCKE.

Désignant par N le nombre des termes d'une fonction du $n^{ième}$ degré à m variables diminué d'une unité, ou le nombre des coefficients de cette fonction; désignant pareillement par P, Q, R, etc., le même nombre pour des fonctions de degré p, q, r, etc., et supposant

$$p+q+r+\ldots=n,$$

on a

$$\mathrm{N}>\mathrm{P}+\mathrm{Q}+\mathrm{R}+\ldots,$$

ce qui sera démontré ci-après. Donc si l'on identifie une fonction du $n^{ième}$ degré à m variables à un produit de plusieurs fonctions à m variables de degrés inférieurs p, q, r, etc., où

$$p+q+r+\ldots=n,$$

on pourra d'abord exprimer

$$\mathrm{P}+\mathrm{Q}+\mathrm{R}+\ldots=\mathrm{S}$$

coefficients de la fonction du $n^{ième}$ degré au moyen des S coefficients des fonctions de degrés inférieurs. Cela fait, les $\mathrm{N}-\mathrm{S}=\mathrm{D}$ autres coefficients de la fonction du $n^{ième}$ degré dépendent des S premiers au moyen de D équations de condition qui doivent avoir lieu pour que l'identification soit possible. Si au moyen de ces équations, soit immédiatement, soit en les combinant entre elles, on ne pouvait pas exprimer un quelconque des N coefficients rationnellement par les autres, il s'ensuivrait que différentes valeurs de ce coefficient seraient compatibles avec un seul et même système de valeurs de tous les autres coefficients. Par conséquent un produit quelconque de fonctions à m variables de degrés p, q, r, etc., étant donné, on pourrait en déterminer un second de telle sorte qu'après l'effectuation de la multiplication l'un des produits ne différât de l'autre que par un seul terme. Désignant le produit proposé par F, celui qu'il s'agirait de déterminer par F', et les m variables respectivement par $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$, on aurait donc

$$\text{(1)} \qquad F' = F + \lambda . x_1^{e_1} x_2^{e_2} x_3^{e_3} \ldots x_m^{e_m},$$

où les exposants e peuvent prendre aussi la valeur zéro et où

$$e_1 + e_2 + e_3 + \ldots \overline{\overline{<}}\, n.$$

Il faut remarquer que le produit $x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_m^{e_m}$ doit être considéré comme une fonction à m variables aussi dans le cas où des exposants e prendraient la valeur zéro; car on pourrait dans ce cas, par une substitution linéaire, faire reparaître toutes les variables, comme on peut dans l'équation du plan $x = 0$ faire reparaître les deux autres variables par un changement de coordonnées. De même ce produit doit être considéré comme étant du degré n; car si la somme des e était inférieure à n, on n'aurait qu'à rendre l'équation (1) homogène en remplaçant les m variables par leurs rapports à une $(m+1)^{ième}$ variable. Cette addition d'une unité au nombre des variables ne change en rien les raisonnements suivants en tant qu'il y entre le nombre des variables des fonctions que l'on considère, parce que la fonction homogène à $m+1$ variables et la fonction non homogène à m variables dépendent du même nombre de constantes.

Il s'agit donc d'examiner si l'on peut avoir

$$F' = F + \lambda . \varphi,$$

où F et φ sont deux fonctions données du $n^{ième}$ degré à m variables. Or N étant le nombre des coefficients de la fonction du $n^{ième}$ degré à m variables (ou de la fonction homogène du $n^{ième}$ degré à $m+1$ variables), quelle que soit la fonction $\mathfrak{F} = F + \lambda\varphi$, elle sera déterminée par N systèmes de valeurs des variables qui la rendent égale à zéro, et l'on voit qu'un seul de ces systèmes de valeurs pourra l'annuler sans annuler simultanément F et φ; ce système, substitué dans l'équation

$$F + \lambda\varphi = 0,$$

détermine λ; mais les autres $N - 1$ systèmes de valeurs qui satisfont à $\mathfrak{F} = 0$ doivent nécessairement annuler simultanément F et φ.

Un produit quelconque F de plusieurs fonctions à m variables de degrés p, q, r, etc., étant proposé, pour qu'un autre produit semblable F' pût être de la forme $F + \lambda\varphi$, il faudrait donc pouvoir l'assujettir à s'annuler pour $N - 1$ systèmes de valeurs des variables qui annulent simultanément F et φ. Mais cela est impossible, parce que le nombre des constantes dont on peut disposer pour F', à savoir le nombre des coefficients de toutes les fonctions de degrés inférieurs au $n^{\text{ième}}$ dont F' est le produit, est plus petit que $N - 1$.

En effet, on a

$$N = m.n + \frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots,$$

formule qu'on obtient immédiatement en remarquant que dans la fonction générale du $n^{\text{ième}}$ degré à m variables le nombre des groupes de termes affectés de k variables doit être celui des combinaisons de m éléments k à k, que chacun de ces groupes renferme autant de termes qu'il y a de sommes de k nombres entiers égales aux nombres depuis k jusqu'à n, et que le nombre de ces sommes est celui des combinaisons de n éléments k à k [*].

Cela posé, supposons d'abord que F' soit le produit de deux fonctions à m variables de degré p et $n - p$; il faudra démontrer que

$$-1 + mn + \frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots$$

[*] M. Plucker a trouvé cette formule par d'autres considérations (*Journal* de Crelle, t. XVI, p. 56).

$$
\begin{aligned}
> mp &+ \frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{p(p-1)}{1.2} \\
&+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}+\ldots \\
+ m(n-p) &+ \frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{(n-p)(n-p-1)}{1.2} \\
&+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot\frac{(n-p)(n-p-1)(n-p-2)}{1.2.3}+\ldots.
\end{aligned}
$$

Si m est égal au plus petit des deux nombres p et $n-p$, ou plus petit, les trois suites seront d'un même nombre de termes (en faisant abstraction du terme -1 de la première). Si m est plus grand que ce nombre, le nombre des termes de la première suite dépassera celui de l'une des deux autres suites ou de toutes les deux. Il suffira donc de prouver que

$$
\begin{aligned}
& n(n-1)(n-2)\ldots(n-\nu) \\
&\quad > p(p-1)(p-2)\ldots(p-\nu) \\
&\quad + (n-p)(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-p-\nu).
\end{aligned}
$$

Désignant ces trois produits respectivement par

$$
\mathrm{P}(n-\nu),\quad \mathrm{P}(p-\nu),\quad \mathrm{P}(n-p-\nu),
$$

si

$$
\mathrm{P}(n-\nu) > \mathrm{P}(p-\nu) + \mathrm{P}(n-p-\nu),
$$

on aura aussi

$$
\mathrm{P}(n-\nu-1) > \mathrm{P}(p-\nu-1) + \mathrm{P}(n-p-\nu-1);
$$

car

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{P}(n-\nu)\times\{n-\nu-1\} \\
& > \{\mathrm{P}(p-\nu)+\mathrm{P}(n-p-\nu)\}\{n-\nu-1\} \\
& > \{\mathrm{P}(p-\nu)+\mathrm{P}(n-p-\nu)\}\{n-2\nu-2\} \\
& = \{\mathrm{P}(p-\nu)+\mathrm{P}(n-p-\nu)\}\{(p-\nu-1)+(n-p-\nu-1)\} \\
& > \mathrm{P}(p-\nu)\times\{p-\nu-1\}+\mathrm{P}(n-p-\nu)\times\{n-p-\nu-1\};
\end{aligned}
$$

mais on a

$$n(n-1) > p(p-1) + (n-p)(n-p-1),$$

donc

$$P(n-\nu) > P(p-\nu) + P(n-p-\nu).$$

Le terme -1 de la première des trois suites fait qu'il faut exclure le cas $m=2$, $n=2$.

Le nombre des coefficients (moins un) d'une fonction à m variables de degré n étant plus grand que celui des coefficients de deux fonctions à m variables de degrés p et q, où $p+q=n$, et le nombre des coefficients d'une de ces dernières fonctions, par exemple de celle de degré p, étant de même plus grand que celui de deux fonctions de degrés r et s, où $r+s=p$, et ainsi de suite, il résulte que le nombre des coefficients (moins un) d'une fonction à m variables de degré n est plus grand que celui des coefficients d'un nombre quelconque (mais non supérieur à n) de fonctions de degré r, s, t, etc., où

$$r+s+t+\ldots=n.$$

Il est donc démontré qu'un produit quelconque de fonctions à m variables étant proposé, il n'est pas possible d'en déterminer un autre semblable et tel, qu'après l'effectuation des multiplications il ne diffère du premier que par le coefficient d'un seul terme.

Il suit de là que *si l'on effectue la multiplication d'un produit d'un nombre quelconque de fonctions à m variables de degrés* r, s, t, *etc.*, *où* $r+s+t+\ldots=n$, *que l'on ordonne le résultat suivant les puissances des variables de manière à avoir* $N+1$ *termes et* N *coefficients qui sont des fonctions des coefficients des fonctions de degrés inférieurs, et que l'on égale ces* N *coefficients à* N *quantités* A, B, C, etc.; *chacune de ces dernières quantités peut s'exprimer rationnellement par les autres.*

Considérons en particulier le cas où la fonction de degré n est le produit de n fonctions linéaires de la forme

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_m x_m + 1,$$

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \ldots + \beta_m x_m + 1,$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3 + \ldots + \nu_m x_m + 1.$$

Il ne serait pas difficile d'établir une formule qui montrât la forme sous laquelle se présente le produit effectué pour un nombre n quelconque. Mais je préfère donner cette formule pour un cas déterminé, en prenant $n = 5$. Cet exemple suffira pour faire connaître la loi d'après laquelle sont formés les termes du produit effectué pour une valeur quelconque de n; il aura l'avantage, tout en occupant déjà beaucoup de place, d'en prendre moins que la formule générale, et, en outre, de faire voir tous les termes du produit effectué, tandis que dans la formule générale il faudrait passer des séries de termes placés au milieu, ce qui dans le cas actuel n'est pas sans inconvénients.

Dans la formule en question (page 345), j'ai placé au-dessous de chaque signe de somme le nombre des termes auxquels il donne lieu, en désignant par c_q^p le nombre des combinaisons de p éléments q à q, et par $r!$ le produit $1.2.3\ldots r$.

Les signes de somme intérieurs indiquent qu'il faut former d'abord au moyen des n lettres α, β, γ, etc., la somme des combinaisons indiquées par le signe c_q^n placé au-dessous du signe de sommation, et remplacer ensuite chaque terme de cette somme par la somme qu'on obtient en permutant de toutes les manières possibles les indices de ces lettres.

Les signes de somme extérieurs indiquent qu'il faut donner aux indices des α, β, γ, etc., et des x toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à m, en excluant les cas qui rendraient quelques-uns des nombres k, i, h, g, etc., égaux.

Voici donc la formule dont il s'agit :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{c_1^m}\left\{\sum_{c_5^5}\alpha_k\beta_k\gamma_k\delta_k\varepsilon_k\right\}x_k^5
&&+\sum_{2.c_2^m}\left\{\sum_{\frac{5!}{4!}c_5^5}\alpha_i\beta_k\gamma_k\delta_k\varepsilon_k\right\}x_i x_k^4+\sum_{2.c_2^m}\left\{\sum_{\frac{5!}{2!\,3!}c_5^5}\alpha_i\beta_i\gamma_k\delta_k\varepsilon_k\right\}x_i^2 x_k^3\\
& &&+\sum_{3.c_3^m}\left\{\sum_{\frac{5!}{3!}c_5^5}\alpha_h\beta_i\gamma_k\delta_k\varepsilon_k\right\}x_h x_i x_k^3+\sum_{3.c_3^m}\left\{\sum_{\frac{5!}{2!\,2!}c_5^5}\alpha_h\beta_i\gamma_i\delta_k\varepsilon_k\right\}x_h x_i^2 x_k^2\\
& &&+\sum_{4.c_4^m}\left\{\sum_{\frac{5!}{2!}c_5^5}\alpha_g\beta_h\gamma_i\delta_k\varepsilon_k\right\}x_g x_h x_i x_k^2+\sum_{c_5^m}\left\{\sum_{5!\,c_5^5}\alpha_f\beta_g\gamma_h\delta_i\varepsilon_k\right\}x_f x_g x_h x_i x_k\\
&+\sum_{c_1^m}\left\{\sum_{c_4^5}\alpha_k\beta_k\gamma_k\delta_k\right\}x_k^4
&&+\sum_{2.c_2^m}\left\{\sum_{\frac{4!}{3!}c_4^5}\alpha_i\beta_k\gamma_k\delta_k\right\}x_i x_k^3+\sum_{c_2^m}\left\{\sum_{\frac{4!}{2!\,2!}c_4^5}\alpha_i\beta_i\gamma_k\delta_k\right\}x_i^2 x_k^2\\
& &&+\sum_{3.c_3^m}\left\{\sum_{\frac{4!}{2!}c_4^5}\alpha_h\beta_i\gamma_k\delta_k\right\}x_h x_i x_k^2+\sum_{c_4^m}\left\{\sum_{4!\,c_4^5}\alpha_g\beta_h\gamma_i\delta_k\right\}x_g x_h x_i x_k\\
&+\sum_{c_1^m}\left\{\sum_{c_3^5}\alpha_k\beta_k\gamma_k\right\}x_k^3
&&+\sum_{2.c_2^m}\left\{\sum_{\frac{3!}{2!}c_3^5}\alpha_i\beta_k\gamma_k\right\}x_i x_k^2+\sum_{c_3^m}\left\{\sum_{3!\,c_3^5}\alpha_h\beta_i\gamma_k\right\}x_h x_i x_k\\
&+\sum_{c_1^m}\left\{\sum_{c_2^5}\alpha_k\beta_k\right\}x_k^2
&&+\sum_{c_2^m}\left\{\sum_{2!\,c_2^5}\alpha_i\beta_k\right\}x_i x_k\\
&+\sum_{c_1^m}\left\{\sum_{c_1^5}\alpha_k\right\}x_k
&&+1.
\end{aligned}
$$

Il est facile maintenant de former le groupe de termes que l'on voudra pour une valeur de n supérieure à 5. Soit, par exemple, $n = 24$, et proposons-nous de former le groupe des termes affectés de huit variables, dans lesquels trois de ces variables sont élevées au premier degré, une au second, deux au troisième, une au quatrième et une au cinquième; on aura

$$\sum_{\frac{8!}{2!\,3!}c'''_8} \left(\sum_{\frac{20!}{2!\,3!\,3!\,4!\,5!}c^{24}_{20}} \alpha_c \beta_d \gamma_e \delta_f \varepsilon_f \zeta_g \eta_g \theta_g \iota_h \varkappa_h \lambda_h \mu_i \nu_i \xi_i o_i \pi_k \rho_k \sigma_k \tau_k \upsilon_k \right) x_c x_d x_e x_f^2 x_g^3 x_h^3 x_i^4 x_k^5.$$

Les signes de somme intérieurs sont ceux qui déterminent la formation des coefficients du produit effectué; ce sont les fonctions dont chacune s'exprime rationnellement par les autres. On voit que parmi ces fontions se trouvent les coefficients de m équations du $n^{\text{ième}}$ degré à une inconnue qui ont pour racines respectivement les $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots, \nu_1$, les $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots, \nu_2$, etc., et enfin les $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m, \ldots, \nu_m$.