JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WOEPCKE

Sur l'équation générale du n^{ieme} degré à deux variables dans laquelle on fait varier un des coefficients

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 4 (1859), p. 329-338.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4__329_0>

SUR

L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU $n^{ième}$ DEGRÉ A DEUX VARIABLES DANS LAQUELLE ON FAIT VARIER UN DES COEFFICIENTS;

Par M. WOEPCKE.

I.

Soit

$$(1) \qquad C_n = 0$$

l'équation d'une courbe du $n^{ième}$ degré renfermant $\frac{n(n+3)}{2}$ coefficients, et soit $cx^\mu y^\nu$, où $\mu+\nu \overline{\gtrless} n$, un des termes de cette équation, c étant une quantité variable, tandis que tous les autres coefficients de l'équation (1) sont des quantités données.

Parmi toutes ces courbes C_n fixons-en une

$$(2) \qquad C'_n = 0,$$

où l'on a donné à c une valeur déterminée k, de sorte que C'_n est une fonction parfaitement déterminée.

Nous pourrons considérer c comme composé de k et d'une partie variable γ, et nous aurons

$$(3) \qquad C_n = C'_n + \gamma x^\mu y^\nu .$$

Cette équation montre que l'équation (1), où le coefficient c reste indéterminé, représente une infinité de courbes du $n^{ième}$ degré passant toutes par n mêmes points situés sur l'axe des y, par n mêmes points situés sur l'axe des x, et par n mêmes points situés sur la droite à l'infini, et ayant chacune avec chacune des autres un contact de l'ordre $\mu - 1$ en chacun des n points de l'axe des y, un contact de l'ordre $\nu - 1$ en chacun des n points de l'axe des x, et un contact de l'ordre $n - (\mu + \nu) - 1$ en chacun des n points situés à l'infini. On connaît ainsi d'avance tous les n^2 points d'intersection communs aux courbes

C_n; cela doit être, parce que l'on connaît $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ coefficients de l'équation, ce qui revient à connaître $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ points de la courbe, et qu'alors on a aussi tous les autres points d'intersection du faisceau de courbes passant par ces premiers points.

On pourra en particulier déterminer k, en prenant pour C'_n une fonction du $n^{ième}$ degré dépendante de $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ constantes, par exemple,

$$C''_n = P_n + C_{n-2},$$

où P_n est un produit de n droites quelconques, et C_{n-2} la courbe générale du $n - 2^{ième}$ degré. Égalant les coefficients de la fonction $P_n + C_{n-2}$ à ceux de la fonction C_n pour déterminer les premiers, on aura une équation de condition entre les coefficients donnés de la fonction C_n et le coefficient variable c. On prendra pour k une des valeurs de c qui satisfont à cette condition. Si alors on échange une de ces valeurs de c contre une autre, on voit que cela revient à faire varier c d'une quantité déterminée, et que les courbes C''_n font partie des courbes C_n. Il suit de là que les différentes courbes

$$(4) \qquad P_n + C_{n-2} = 0$$

correspondant aux différentes valeurs k qui satisfont à l'équation de condition, passent toutes par les mêmes points des deux axes et de la droite à l'infini, et ont en chacun de ces points des contacts de l'ordre $\mu - 1$, $\nu - 1$ et $n - (\mu + \nu) - 1$ respectivement.

On sait qu'il existe un nombre de manières, toujours limité, mais d'autant plus grand que le degré de la courbe est plus élevé, de donner à la courbe une forme dépendante de $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ constantes. Toutes les courbes C''_n qu'on obtient ainsi, et dont on détermine les coefficients au moyen des coefficients connus de C_n et de l'équation de condition qui renferme la variable c, passent par les mêmes points des axes et de la droite à l'infini en y ayant les contacts qu'on vient de dire.

Il faut cependant remarquer que chacune des formes C''_n dépendantes de $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ constantes n'est pas compatible avec chacun des coefficients de C_n considéré comme variable. Ainsi soit proposée une courbe du troisième degré

$$C_3 = x^3 + ax^2y + bxy^2 + cy^3 + dx^2 + exy + fy^2 + gx + hy + i = 0,$$

et qu'on prenne pour C''_n la forme

$$(5)\ C''_3 = (x + \alpha y + \alpha')(x + \beta y + \beta')(x + \gamma y + \gamma') - (x + \delta y + \delta');$$

si l'on veut identifier les deux formes, on aura les relations

$$\begin{aligned}
a &= \alpha + \beta + \gamma,\\
b &= \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma,\\
c &= \alpha\beta\gamma,\\
d &= \alpha' + \beta' + \gamma',\\
e &= (\alpha + \beta)\gamma' + (\alpha + \gamma)\beta' + (\beta + \gamma)\alpha',\\
f &= \alpha\beta\gamma' + \alpha\beta'\gamma + \alpha'\beta\gamma,\\
g &= \alpha'\beta' + \alpha'\gamma' + \beta'\gamma' - 1,\\
h &= \alpha\beta'\gamma' + \alpha'\beta\gamma' + \alpha'\beta'\gamma - \delta,\\
i &= \alpha'\beta'\gamma' - \delta'.
\end{aligned}$$

On voit que les six premières de ces équations déterminent α, β, γ et α', β', γ'; mais, d'après la forme adoptée ici pour C''_3, g est uniquement fonction de ces quantités, de sorte que l'équation de condition qui permet de choisir cette forme, a lieu entre les coefficients a, b, c, d, e, f, g. Par conséquent, si c'était h ou i que l'on considérait comme variable, on ne pourrait pas, par la variation d'un de ces coefficients, amener C_3 à prendre la forme C''_3.

Si l'on cherche l'équation de condition qui a lieu entre les coefficients a, b, c, d, e, f, g, on trouve

$$\begin{aligned}
&(4abc - b^3 - 9c^2)d^2 + (ab^2 - 4a^2c + 3bc)de\\
&+ (3ac - b^2)(e^2 + 2df) + (ab - 9c)ef + (-a^2 + 3b)f^2\\
&- (a^2b^2 - 4a^3c + 18abc - 4b^3 - 27c^2)(g + 1) = 0.
\end{aligned}$$

Cette équation montre que, une courbe du troisième degré étant proposée, si on la coupe par deux droites quelconques en trois points p et en trois points p', il existera trois courbes du troisième ordre de la forme (5), touchant la proposée aux points p et la coupant aux points p'; qu'il existera deux courbes de cette forme qui ont avec la proposée un contact du second ordre aux trois points p; qu'il en existe pareillement deux, ayant leurs asymptotes parallèles à celles de la proposée, et touchant celle-ci aux trois points p, ou la coupant aux six points p et p'; enfin, qu'il n'existe qu'une seule courbe de ce genre ayant les mêmes asymptotes que la proposée et la coupant aux trois points p.

Le genre de courbes du troisième ordre pour lesquelles l'équation de condition ci-dessus a lieu, est caractérisé par la propriété que le produit des segments interceptés entre un point de la courbe et ses trois asymptotes sur une transversale parallèle à l'axe des x est égal au segment compris entre le même point de la courbe et la droite qui passe par les points où la courbe coupe les asymptotes.

II.

Considérons le cas où la courbe se décompose en un système de n droites, c'est-à-dire où la fonction C_n est égalée à un produit de n facteurs de la forme $x + \alpha y + \alpha'$; ce qui exige que les coefficients de C_n satisfassent à $\frac{n(n-1)}{2}$ équations de condition. Si la courbe pouvait être identifiée de cette manière à deux systèmes distincts de n droites, les droites du premier système auraient avec les droites du second système en 3 fois n points situés respectivement sur les deux droites prises pour axes et sur la droite à l'infini des contacts de l'ordre $\lambda - 1$, $\mu - 1$, $\nu - 1$, où $\lambda + \mu + \nu = n$. Dès que $n > 2$, il n'existera donc qu'un seul système de droites. Il résulte de là le théorème algébrique suivant :

Soient $2n$ quantités $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ et $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$, et désignons par $\sum\limits_{u}^{(\nu)} n$ la somme des termes qu'on obtient en écrivant d'abord la somme des produits des n quantités $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, u à u, et remplaçant ensuite chaque terme de cette somme par la somme de termes qu'on obtient en accen-

tuant de toutes les manières possibles ν *des facteurs de ce terme* [*], *d'où il suit que le nombre des termes de la somme* $\sum\limits_{u}^{(\nu)} n$ *est égal à* $\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-u+1)}{1.2.3\ldots\nu.1.2.3\ldots(u-\nu)}$. *Cela posé, si l'on forme le système suivant.*

$$
\begin{array}{lllllll}
\sum\limits_{1}^{(0)} n, & \sum\limits_{1}^{(1)} n, & \sum\limits_{2}^{(2)} n, & \sum\limits_{3}^{(3)} n,\ldots, & \sum\limits_{n-2}^{(n-2)} n, & \sum\limits_{n-1}^{(n-1)} n, & \sum\limits_{n}^{(n)} n, \\
\sum\limits_{2}^{(0)} n, & \sum\limits_{2}^{(1)} n, & \sum\limits_{3}^{(2)} n, & \sum\limits_{4}^{(3)} n,\ldots, & \sum\limits_{n-1}^{(n-2)} n, & \sum\limits_{n}^{(n-1)} n, & \\
\sum\limits_{3}^{(0)} n, & \sum\limits_{3}^{(1)} n, & \sum\limits_{4}^{(2)} n, & \sum\limits_{5}^{(3)} n,\ldots, & \sum\limits_{n}^{(n-2)} n, & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
\sum\limits_{n-2}^{(0)} n, & \sum\limits_{n-2}^{(1)} n, & \sum\limits_{n-1}^{(2)} n, & \sum\limits_{n}^{(3)} n, & & & \\
\sum\limits_{n-1}^{(0)} n, & \sum\limits_{n-1}^{(1)} n, & \sum\limits_{n}^{(2)} n. & & & & \\
\sum\limits_{n}^{(0)} n, & \sum\limits_{n}^{(1)} n, & & & & &
\end{array}
$$

---

[*] *Exemple* : $\sum\limits_{4}^{(2)} 5 = \alpha'\beta'\gamma\delta + \alpha'\beta'\gamma\varepsilon + \alpha'\beta'\delta\varepsilon + \alpha'\gamma'\delta\varepsilon + \beta'\gamma'\delta\varepsilon$

$$
\begin{aligned}
&+ \alpha'\beta\gamma'\delta + \alpha'\beta\gamma'\varepsilon + \alpha'\beta\delta'\varepsilon + \alpha'\gamma\delta'\varepsilon + \beta'\gamma\delta'\varepsilon \\
&+ \alpha'\beta\gamma\delta' + \alpha'\beta\gamma\varepsilon' + \alpha'\beta\delta\varepsilon' + \alpha'\gamma\delta\varepsilon' + \beta'\gamma\delta\varepsilon' \\
&+ \alpha\beta'\gamma'\delta + \alpha\beta'\gamma'\varepsilon + \alpha\beta'\delta'\varepsilon + \alpha\gamma'\delta'\varepsilon + \beta\gamma'\delta'\varepsilon \\
&+ \alpha\beta'\gamma\delta' + \alpha\beta'\gamma\varepsilon' + \alpha\beta'\delta\varepsilon' + \alpha\gamma'\delta\varepsilon' + \beta\gamma'\delta\varepsilon' \\
&+ \alpha\beta\gamma'\delta' + \alpha\beta\gamma'\varepsilon' + \alpha\beta\delta'\varepsilon' + \alpha\gamma\delta'\varepsilon' + \beta\gamma\delta'\varepsilon'.
\end{aligned}
$$

Dans le produit de n facteurs linéaires, $\sum\limits_{u}^{(\nu)} n$ est le coefficient de $x^{n-u}y^{u-\nu}$; et en *où les sommes ayant pour indice supérieur* o, *et les sommes ayant les indices supérieurs et inférieurs égaux sont, comme on voit, les coefficients des deux équations du* $n^{\text{ième}}$ *degré, dont les racines sont respectivement les* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *et les* $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$; *chacune de ces* $\frac{n(n+3)}{2}$ *fonctions peut s'exprimer rationnellement par les autres.*

Il n'est peut-être pas sans intérêt de vérifier à postériori, pour une valeur déterminée de n, le théorème qu'on vient de démontrer.

Soit $n = 3$, on aura

$$a = \alpha + \beta + \gamma, \tag{1}$$
$$b = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma, \tag{2}$$
$$c = \alpha\beta\gamma, \tag{3}$$
$$d = \alpha' + \beta' + \gamma', \tag{4}$$
$$e = \alpha\beta' + \alpha'\beta + \alpha\gamma' + \alpha'\gamma + \beta\gamma' + \beta'\gamma, \tag{5}$$
$$f = \alpha\beta\gamma' + \alpha\beta'\gamma + \alpha'\beta\gamma, \tag{6}$$
$$g = \alpha'\beta' + \alpha'\gamma' + \beta'\gamma', \tag{7}$$
$$h = \alpha\beta'\gamma' + \alpha'\beta\gamma' + \alpha'\beta'\gamma, \tag{8}$$
$$i = \alpha'\beta'\gamma'. \tag{9}$$

Des équations (4), (5), (6), on tire

$$\alpha' = \frac{f - \alpha e + \alpha^2 d}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}, \quad \beta' = \frac{-f + \beta e - \beta^2 d}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)}, \quad \gamma' = \frac{f - \gamma e + \gamma^2 d}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (7), (8), (9) et remplaçant les fonctions symétriques de α, β, γ par leurs valeurs en a, b, c, on

---

passant du $(n-1)^{\text{ième}}$ produit au $n^{\text{ième}}$, le $n^{\text{ième}}$ facteur linéaire étant $x + \rho y + \rho'$, on a

$$x . \sum_{u}^{(\nu)} n - 1 . x^{n-u-1} . y^{u-\nu} + \rho y . \sum_{u-1}^{(\nu)} n - 1 . x^{n-u} . y^{u-\nu-1} + \rho' . \sum_{u-1}^{(\nu-1)} n - 1 . x^{n-u} . y^{u-\nu}$$
$$= \sum_{u}^{(\nu)} n . x^{n-u} . y^{u-\nu}.$$

obtient

$$(10)\left\{\begin{aligned}&(a^2b^2-4a^3c+18abc-4b^3-27c^2)g\\&=(4abc-b^3-9c^2)d^2+(ab^2-4a^2c+3bc)de\\&\quad+(3ac-b^2)(e^2+2df)+(ab-9c)ef+(-a^2+3b)f^2,\end{aligned}\right.$$

$$(11)\left\{\begin{aligned}&(a^2b^2-4a^3c+18abc-4b^3-27c^2)h\\&=(3ac-b^2)cd^2+(ab-9c)cde+(-a^2+3b)c(e^2+2df)\\&\quad+(a^2b+3ac-4b^2)ef+(-a^3+4ab-9c)f^2,\end{aligned}\right.$$

$$(12)\left\{\begin{aligned}&(a^2b^2-4a^3c+18abc-4b^3-27c^2)i\\&=-c^2d^3+bcd^2e-acde^2+ce^3-(b^2-2ac)d^2f\\&\quad+(ab-3c)def-be^2f-(a^2-2b)df+aef^2-f^3.\end{aligned}\right.$$

On a donc exprimé rationnellement g, h, i par a, b, c, d, e, f.

On remarque en outre que, en remplaçant dans le système des équations (1) à (9)

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \alpha',\quad \beta',\quad \gamma',$$

par

$$\alpha',\quad \beta',\quad \gamma',\quad \alpha,\quad \beta,\quad \gamma,$$

ou par

$$\frac{\alpha'}{\alpha},\quad \frac{\beta'}{\beta},\quad \frac{\gamma'}{\gamma},\quad \frac{1}{\alpha},\quad \frac{1}{\beta},\quad \frac{1}{\gamma},$$

on remplace

$$a,\quad b,\quad c,\quad d,\quad e,\quad f,\quad g,\quad h,\quad i,$$

par

$$d,\quad g,\quad i,\quad a,\quad e,\quad h,\quad b,\quad f,\quad c,$$

ou par

$$\frac{f}{c},\quad \frac{h}{c},\quad \frac{i}{c},\quad \frac{b}{c},\quad \frac{e}{c},\quad \frac{g}{c},\quad \frac{a}{c},\quad \frac{d}{c},\quad \frac{1}{c};$$

de sorte que l'on peut immédiatement écrire les équations au moyen desquelles b, c, f s'expriment rationnellement par a, d, e, g, h, i et a, d par b, c, e, f, g, h, i. Quant à e, on l'exprime rationnellement par a, b, c, d, f, g, h en éliminant e^2 entre les équations (10) et (11).

Nous avons exclu ci-dessus le cas de $n=2$. On remarque en effet que, si l'on fait varier dans l'équation du second degré à deux variables le coefficient de xy, de x, ou de y, on obtient toutes les coniques qui passent par les intersections d'une d'entre elles avec les deux axes, ou avec un axe et la droite à l'infini. Mais c'est ce qui peut se faire par un système de deux droites dans les trois cas de deux manières différentes. On voit ainsi à priori que l'équation de condition qui exprime qu'une conique se décompose en deux droites, doit être du second degré par rapport aux coefficients de xy, de x et de y, tandis qu'elle doit être du premier degré par rapport aux trois autres coefficients.

III.

Supposons actuellement que la courbe de degré n ait été décomposée en plusieurs courbes de degrés inférieurs, dont une soit du degré p. Si, par un changement du coefficient du terme en $x^\mu y^\nu$, on pouvait décomposer la courbe de degré n dans un autre système de même espèce, la courbe de degré p du nouveau système devrait passer par p des points où l'ancien système coupe l'axe des y, et avoir en chacun de ces points μ points communs avec l'ancien système; de même elle devrait avoir respectivement ν et $n-\mu-\nu$ points communs avec l'ancien système en p points où celui-ci coupe l'axe des x, et en p points où il coupe la droite à l'infini; c'est-à-dire qu'elle serait assujettie à passer par pn points donnés d'avance; mais cela est impossible, parce qu'on ne peut disposer pour la courbe de degré p que de $\frac{p(p+3)}{2}$ constantes au plus, nombre plus petit que pn dès que $n>2$. Lorsque parmi les courbes de degré inférieur il s'en trouve plusieurs de même degré et dépendant d'un même nombre de constantes, on pourrait concevoir que l'une d'elles prît la place d'une autre et réciproquement; mais cela ne produirait pas un système distinct du premier.

Il suit de là que *si l'on forme le produit de plusieurs fonctions à deux variables dont* ρ *de degré* r, σ *de degré* s, τ *de degré* t, *où*

$$\rho r+\sigma s+\tau t+\ldots=n,$$

et dans lesquelles les termes x^r, x^s, x^t, *etc., ont l'unité pour coefficient, et qu'on égale les* $\frac{n(n+3)}{2}$ *coefficients du résultat ordonné suivant* *les puissances de x et y à $\frac{n(n+3)}{2}$ quantités a, b, c, etc. : chacune de ces dernières quantités pourra s'exprimer rationnellement par les autres.*

Il n'est peut-être pas entièrement sans intérêt de voir aussi pour ce théorème comment il pourra se vérifier à postériori dans un cas déterminé, choisi comme exemple. Identifions la fonction du troisième degré à deux variables avec le produit

$$(x^2 + \alpha xy + \beta y^2 + \gamma x + \delta y + \varepsilon)(x + \alpha' y + \beta').$$

On aura

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= \alpha + \alpha', \\ b &= \alpha\alpha' + \beta, \\ c &= \alpha'\beta, \\ d &= \beta' + \gamma, \\ e &= \alpha\beta' + \alpha'\gamma + \delta, \\ f &= \alpha'\delta + \beta\beta', \\ g &= \beta'\gamma + \varepsilon, \\ h &= \alpha'\varepsilon + \beta'\delta, \\ i &= \beta'\varepsilon. \end{aligned}\right.$$

Éliminant d'abord α', β', ε, β, δ, on obtient

$$(2)\quad c = ab - (a^2 + b)\alpha + 2a\alpha^2 - \alpha^3,$$

$$(3)\quad f = (ac + bd) - (2ad + e)\alpha - (a^2 + b)\gamma + 4a\alpha\gamma + 2d\alpha^2 - 3\alpha^2\gamma,$$

$$(4)\quad h = (ag + de) - (2ad + e)\gamma - (d^2 + g)\alpha + 4d\gamma\alpha + 2a\gamma^2 - 3\gamma^2\alpha,$$

$$(5)\quad i = dg - (d^2 + g)\gamma + 2d\gamma^2 - \gamma^3.$$

Tirant de l'équation (3) la valeur de γ et la substituant dans l'équation (5), on obtient une équation du sixième degré en α ; éliminant α entre cette dernière et l'équation (2), on obtient

$$(6)\qquad \mathfrak{F}(a, b, c, d, e, f, g, i) = 0,$$

où $\mathfrak{F}$ est une fonction rationnelle ; la forme des équations (2) à (5) montre qu'on aura en même temps

$$(7) \qquad \mathfrak{F}(d, g, i, a, e, h, b, c) = 0.$$

Éliminant entre (6) et (7) successivement les puissances supérieures à la première de a, b, c, d, e, g, i, on exprimera respectivement chacune de ces quantités rationnellement par les autres et f, h.

Tirant ensuite de l'équation (3) la valeur de α, substituant cette valeur dans l'équation (4) et faisant disparaître le radical par une élévation au carré, on obtient une équation du sixième degré en γ, et, par l'élimination de γ entre celle-ci et l'équation (5) une équation

$$(8) \qquad \mathrm{F}(a, b, d, e, f, g, h, i) = 0;$$

on aura en même temps

$$(9) \qquad \mathrm{F}(d, g, a, e, h, b, f, c) = 0,$$

et les équations (8) et (9) serviront à exprimer rationnellement f et h par les autres quantités a, b, c, etc.