JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres (onzième article)

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 4 (1859), p. 281-304.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4__281_0>

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

ONZIÈME ARTICLE.

Les formules très-simples que nous donnons dans ce onzième article sont susceptibles d'applications étendues, et nous ne pensons pas qu'on nous reproche de leur avoir accordé une place à part.

Soit m un nombre *impair* donné quelconque. Posons de toutes les manières possibles

$$m = 2m'^2 + m'',$$

puis

$$m'' = d''\delta'',$$

de manière à avoir

$$m = 2m'^2 + d''\delta'',$$

où m' est un entier indifféremment positif, négatif ou nul, tandis que m'', d'', δ'' sont des entiers positifs impairs. C'est à ce mode de partition, peu différent de ceux de nos quatre derniers articles, que se rattache la formule par laquelle nous allons commencer et où figurera une fonction $f(x)$ paire, c'est-à-dire vérifiant l'égalité

$$f(-x) = f(x)$$

pour toutes les valeurs de x dont on aura à faire usage : on verra que x est toujours un nombre entier impair. La fonction $f(x)$ est du reste une fonction quelconque, algébrique ou numérique.

Considérons la somme double

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} f(\delta'' - 2m'),$$

où le premier $\sum$ porte sur les valeurs de δ'' qui répondent à un groupe déterminé (m', m''), tandis que la seconde s'applique à m' dont les valeurs successives sont $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \omega$, en désignant par ω^2 le plus grand carré inférieur à $\frac{m}{2}$.

Je trouve pour la valeur de cette somme double l'expression assez simple que voici :

$$\begin{aligned} f(1)\rho(2m-1^2)+f(3)\rho(2m-3^2)+f(5)\rho(2m-5^2)+\ldots \\ +f(2n-1)\rho[2m-(2n-1)^2]; \end{aligned}$$

le terme général de cette suite est

$$f(2s-1)\rho[2m-(2s-1)^2];$$

on fait $s=1, 2, 3, \ldots$, et l'on s'arrête à la valeur $s=n$, au delà de laquelle le nombre placé sous le signe ρ deviendrait négatif. Ainsi on a encore

$$2m-(2n-1)^2>0,$$

mais

$$2m-(2n+1)^2<0.$$

Nous donnons ici au signe $\rho(m)$ la même signification que dans nos autres articles : m étant un entier impair décomposé en deux facteurs, de manière que

$$m=d\delta,$$

nous faisons

$$\rho(m)=\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}},$$

la sommation portant sur les valeurs de d.

La formule

$$(\xi)\ \sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}f(\delta''-2m')=f(1)\rho(2m-1^2)+f(3)\rho(2m-3^2)+\ldots+f(2n-1)\rho[2m-(2n-1)^2],$$

dans laquelle se résume ce qui précède, nous semble très-élégante.

Soit, par exemple, $m = 5$. Les solutions de l'équation

$$m = 2m'^2 + d''\delta''$$

seront au nombre de six, savoir

$$\begin{array}{llllll} m'=0, & d''=5, & \delta''=1; & m'=0, & d''=1, & \delta''=5; \\ m'=1, & d''=3, & \delta''=1; & m'=1, & d''=1, & \delta''=3; \\ m'=-1, & d''=3, & \delta''=1; & m'=-1, & d''=1, & \delta''=3; \end{array}$$

la somme double est donc

$$f(1)+f(5)+f(-1)-f(1)+f(3)-f(5),$$

et eu égard à l'équation

$$f(-1)=f(1),$$

elle se réduit à

$$f(1)+f(3):$$

or c'est bien là une quantité égale à

$$f(1)\rho(9)+f(3)\rho(1),$$

puisque l'on a

$$\rho(9)=1 \quad \text{et} \quad \rho(1)=1.$$

On sait que $\rho(m)$ exprime le nombre des décompositions de $2m$ en une somme de deux carrés impairs à racines positives, et que le nombre des solutions entières de l'équation

$$2^\alpha m = u^2+v^2,$$

est $4\rho(m)$, quel que soit l'exposant α, quand on admet pour u et v le double signe $\pm$: ce nombre se réduirait à $\rho(m)$ pour l'équation

$$m = u^2+v^2,$$

si l'on exigeait que u fût impair et positif, en laissant à v le double signe quand v peut le prendre, c'est-à-dire quand v n'est pas zéro.

Ceci nous permet de présenter le second membre de l'équation (ξ)

sous une autre forme qui se lie directement aux décompositions des nombres en trois carrés. Posons en effet de toutes les manières possibles

$$2m = i^2 + i_1^2 + p^2.$$

i et i_1 étant des nombres impairs positifs, tandis que p est pair et susceptible du double signe $\pm$ quand il ne se réduit pas à zéro. Attachons-nous, dans l'équation

$$2m = i^2 + i_1^2 + p^2,$$

au premier terme i^2 du second membre, et cherchons la somme

$$\sum f(i)$$

des valeurs de $f(i)$ prises pour toutes les valeurs de i. Ces dernières doivent être cherchées dans la suite $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$, et chaque nombre i convenable se présente autant de fois que l'équation

$$2m - i^2 = i_1^2 + p^2$$

a de solutions (i_1, p), c'est-à-dire un nombre de fois marqué par $\rho(2m - i^2)$, d'où résulte dans l'expression de

$$\sum f(i)$$

le terme

$$f(i)\rho(2m - i)^2:$$

il faut donc ajouter entre eux tous les termes ainsi obtenus, et l'on pourra sans inconvénient faire porter la somme sur tous les nombres $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$, car on a

$$\rho(2m - i^2) = 0,$$

pour ceux d'entre eux qui rendent impossible l'équation

$$2m - i^2 = i_1^2 + p^2.$$

On a donc

$$\sum f(i) = f(1)\rho(2m - 1^2) + f(3)\rho(2m - 3^2) + \ldots$$
$$+ f(2n-1)\rho[2m - (2n-1)^2],$$

en sorte que

$$\sum f(i)$$

est précisément la valeur du second membre de l'équation (ξ).

La formule (ξ) peut donc être remplacée par celle-ci :

$$(o) \qquad \sum\sum (-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} f(\delta''' - 2m') = \sum f(i),$$

i désignant successivement tous les nombres impairs pour lesquels

$$2m = i^2 + i_1^2 + p^2,$$

et chacun des nombres i étant pris autant de fois qu'il se présente dans l'ensemble des solutions qui les définit.

Comme les valeurs de x qu'on doit employer dans $f(x)$ sont d'un côté exprimées par i et de l'autre par $\delta''' - 2m'$, et sont par suite des entiers essentiellement impairs, on voit que l'équation

$$f(-x) = f(x)$$

est vérifiée quand on prend

$$f(x) = (-1)^{\frac{x-1}{2}} x.$$

La formule (ξ) nous donne dès lors

$$\sum\sum (-1)^{m'} (\delta''' - 2m') = 1.\rho(2m - 1^2) - 3.\rho(2m - 3^2) + \ldots$$
$$\pm (2n-1)\rho[2m - (2n-1)^2];$$

mais ce résultat se simplifie en observant que l'on a

$$\sum (-1)^{m'} m' = 0,$$

parce que les valeurs de m' autres que zéro sont deux à deux égales et de signes contraires. En faisant suivant notre usage

$$\sum \delta'' = \zeta_1(m'') = \zeta_1(m - 2m'^2),$$

il nous viendra donc

$$\sum (-1)^{m'} \zeta_1(m - 2m'^2) = 1.\rho(2m - 1^2) - 3.\rho(2m - 3^2) + \ldots$$
$$\pm (2n - 1)\rho[2m - (2n - 1)^2].$$

Le second membre peut être remplacé par

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

comme le donnerait de suite la formule (o). Quant au premier membre, qui développé s'écrit

$$\zeta_1(m) - 2\zeta_1(m - 2.1^2) + 2\zeta_1(m - 2.2^2) - \ldots \pm 2\zeta_1(m - 2\omega^2),$$

il comporte une interprétation analogue. Rappelons-nous en effet que $8\zeta_1(m)$ est le nombre des représentations du nombre impair m par une somme de quatre carrés, et nous verrons que si l'on pose

$$m - 2m'^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2,$$

par conséquent

$$m = 2m'^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2,$$

où m_1, m_2, m_3, m_4 désignent, comme m', des entiers positifs ou négatifs, ou zéro, l'excès

$$N_2 - N_1$$

du nombre des cas où m' est pair sur le nombre des cas où m' est impair vaut huit fois la quantité

$$\zeta_1(m) - 2\zeta_1(m - 2.1^2) + 2\zeta_1(m - 2.2^2) - \ldots \pm 2\zeta_1(m - 2\mu^2).$$

Nous avons donc finalement l'équation très-simple

$$N_2 - N_1 = 8\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}}.i,$$

qui rattache l'un à l'autre les deux modes de partition indiqués par

$$2m = i^2 + i_1^2 + p^2$$

et

$$m = 2m'^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2.$$

Nos formules fournissent beaucoup de résultats du même genre; mais on conçoit que pour leur donner tout leur prix, il faudrait non-seulement les développer davantage, mais encore les présenter dans un ordre systématique et les enchaîner entre eux : nous devons désirer aussi que notre analyse tire en quelque sorte tout d'elle-même. Ce sera l'objet d'un autre travail, et nous osons espérer qu'il en sortira des ressources nouvelles pour la science des nombres. Aujourd'hui il ne s'agit que d'une simple esquisse, et nous ne pouvons qu'effleurer le sujet. Nous nous servons, pour abréger, de ce qui est connu ; c'est ainsi que nous allons encore employer un théorème d'Eisenstein ou plutôt de Jacobi sur la décomposition d'un nombre impair en six carrés, qu'il nous serait aisé de démontrer à notre manière, et que nous démontrerons en effet, mais plus tard.

Soit $m = d\delta$ un nombre impair donné; le nombre des représentations de m par six carrés, c'est-à-dire le nombre des solutions de l'équation

$$m = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_5^2 + m_6^2,$$

où $m_1, m_2, \ldots, m_6$ sont des entiers indifféremment positifs ou négatifs, ou zéro, est

$$12 \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} \delta^2,$$

quand m est de la forme $4\nu + 1$, mais

$$20 \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} \delta^2$$

quand m est de la forme $4\nu + 3$.

Nous allons appliquer ce théorème à l'équation qu'on déduit de la formule (o) lorsqu'on prend

$$f(x) = x^2.$$

Cette équation

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}(\delta''^2-4m'\delta''+4m'^2)=\sum i^2$$

se simplifie à cause du double signe des valeurs de m' autres que zéro, et se réduit à

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}(\delta''^2+4m'^2)=\sum i^2.$$

Le premier membre se décompose en deux parties distinctes

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}\delta''^2$$

et

$$4\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}m'^2.$$

Dans la première j'observe qu'on doit faire d'abord la somme

$$\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}\delta''^2$$

pour les valeurs de δ'' qui conviennent au nombre $m''=d''\delta''$, contenu dans l'équation

$$m=2m'^2+m'',$$

puis faire le total pour tous les groupes (m', m''). Cela posé, remarquons que quand m'' est de la forme $4\nu+1$, on a

$$(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}=(-1)^{\frac{d''-1}{2}},$$

tandis que quand m'' est de la forme $4\nu+3$, on a au contraire

$$(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}=-(-1)^{\frac{d''-1}{2}}.$$

Ainsi, dans le premier cas,

$$\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}\delta''^2=\sum(-1)^{\frac{d''-1}{2}}\delta''^2,$$

tandis que dans le second cas

$$\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}\delta''^2 = -\sum(-1)^{\frac{d''-1}{2}}\delta''^2.$$

Toujours on est conduit à la fonction numérique dont dépend le nombre des représentations de m'' par six carrés. Ajoutons que si m est de la forme $4\nu+1$, m'' sera aussi de cette forme pour les valeurs paires de m' et de la forme opposée $4\nu+3$ pour les valeurs impaires : ce sera l'inverse si m est de la forme $4\nu+3$. Observons enfin que l'équation

$$m'' \text{ ou } m - 2m'^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_5^2 + m_6^2$$

entraîne celle-ci

$$m = 2m'^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_5^2 + m_6^2,$$

et il nous sera aisé d'en conclure que si l'on désigne par $\mathfrak{N}_1$ le nombre des solutions de l'équation

$$m = 2m'^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_5^2 + m_6^2,$$

où m' est impair, et par $\mathfrak{N}_2$ le nombre des solutions où m' est pair, on aura

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}\delta''^2 = \frac{1}{12}\mathfrak{N}_2 - \frac{1}{20}\mathfrak{N}_1,$$

quand m est de la forme $4\nu+1$, et

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}\delta''^2 = \frac{1}{12}\mathfrak{N}_1 - \frac{1}{20}\mathfrak{N}_2,$$

quand m est de la forme $4\nu+3$.

Occupons-nous à présent de l'autre somme double

$$4\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}m'^2;$$

elle peut s'écrire

$$4\sum m'^2\rho(m''),$$

ou encore

$$\sum (2m')^2 \rho(m - 2m'^2),$$

et l'on verra sans peine qu'elle s'exprime par

$$\sum p^2,$$

si l'on se reporte à l'équation

$$2m = i^2 + i_1^2 + p^2 :$$

cela tient à ce que si l'on fait $p = 2m'$, on change cette équation en celle-ci

$$2(m - 2m'^2) = i^2 + i_1^2$$

dont le nombre des solutions pour chaque valeur donnée de m' est

$$\rho(m - 2m'^2).$$

Définitivement, nous avons donc

$$\frac{1}{12}\mathfrak{N}_2 - \frac{1}{20}\mathfrak{N}_4 = \sum i^2 - \sum p^2,$$

quand m est de la forme $4\nu + 1$, et

$$\frac{1}{12}\mathfrak{N}_4 - \frac{1}{20}\mathfrak{N}_2 = \sum i^2 - \sum p^2,$$

quand m est de la forme $4\nu + 3$. A cela on joindra, si l'on veut, cette autre formule

$$2\sum i^2 + \sum p^2 = 2m\mathrm{M},$$

qu'il est très-facile d'établir et où M désigne le nombre des solutions de l'équation

$$2m = i^2 + i_1^2 + p^2 \; [*].$$

---

[*] M n'est pas le nombre complet des représentations de $2m$ par une somme de trois carrés; ce serait $12\,\mathrm{M}$ que l'on obtiendrait en cessant de fixer au dernier rang le carré pair et en rendant le double signe aux racines des carrés impairs.

Soit, par exemple, $m = 5$, d'où

$$2m = 10 = 1^2 + 3^2 + 0^2 = 3^2 + 1^2 + 0^2 :$$

il s'ensuivra

$$\mathrm{M} = 2, \quad \sum i^2 = 10, \quad \sum p^2 = 0,$$

ce qui déjà vérifie l'équation

$$2 \sum i^2 + \sum p^2 = 2m\mathrm{M}.$$

Pour trouver $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ qui répondent respectivement à $m' = \pm 1$ et $m' = 0$, il faut chercher d'une part le double du nombre des représentations de l'entier 3 par six carrés et d'autre part le nombre des représentations de 5. On trouve

$$\frac{1}{20}\mathfrak{M}_1 = 16, \quad \frac{1}{12}\mathfrak{M}_2 = 26;$$

l'équation

$$\frac{1}{12}\mathfrak{M}_2 - \frac{1}{20}\mathfrak{M}_1 = \sum i^2 - \sum p^2$$

se vérifie donc aussi. Le calcul se fera de même pour $m = 7$: il viendra

$$\mathrm{M} = 4, \quad \sum i^2 = 20, \quad \sum p^2 = 16, \quad \frac{1}{12}\mathfrak{M}_1 = 52, \quad \frac{1}{20}\mathfrak{M}_2 = 48;$$

mais dans ce cas c'est l'équation

$$\frac{1}{12}\mathfrak{M}_1 - \frac{1}{20}\mathfrak{M}_2 = \sum i^2 - \sum p^2$$

qui aura lieu.

On arrive encore à des résultats intéressants quand on prend

$$f(x) = \cos(xt),$$

t étant une constante quelconque; mais je ne veux pas pousser plus loin ces détails. Je me contenterai de transcrire le résultat simplifié,

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} \cos\delta'' t \cos 2m't = \sum \cos it,$$

que l'on obtient en développant

$$\cos(\delta'' - 2m')\,t$$

et en omettant ensuite la partie qui s'annule par l'opposition des signes de m'.

La formule (ξ) est comprise comme cas particulier dans une formule que je vais donner à présent et qui contient une fonction arbitraire $f(x, y)$ de deux variables. La fonction $f(x, y)$ est paire, je veux dire vérifie les conditions

$$f(-x, y) = f(x, y), \quad f(x, -y) = f(x, y),$$

pour toutes les valeurs de x, y dont on aura à faire usage : on pourra s'assurer que x est toujours un entier impair et y un entier simplement pair.

Soit, comme ci-dessus, m un nombre impair donné. Posons de toutes les manières possibles

$$m = 2m'^2 + m'' = 2m'^2 + d''\delta'',$$

m' étant un entier à volonté positif, négatif ou nul, tandis que m'', d'', δ'' sont essentiellement impairs et positifs. C'est le mode de partition employé plus haut : à lui se rapporte la somme double

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} f(\delta'' - 2m', 2d'' + 4m').$$

Maintenant posons

$$2m = m_1^2 + m_2,$$

m_1 et m_2 étant positifs et impairs, ainsi que les deux facteurs d_2, δ_2 dans lesquels nous décomposerons ensuite m_2, de façon que

$$2m = m_1^2 + d_2\delta_2 :$$

ce mode de partition n'a été employé plus haut qu'implicitement : il nous le faut ici sous forme explicite. C'est à lui que se rattache la seconde somme double

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}} f(m_1, d_2 + \delta_2)$$

dont nous avons besoin. Notre théorème consiste, en effet, en ce que les deux sommes doubles citées ont des valeurs égales.

Ainsi nous disons que l'on a

$$(\pi)\ \sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} f(\delta''-2m',\,2d''+4m')=\sum\sum(-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}} f(m_1,\,d_2+\delta_2).$$

Soit, par exemple, $m=3$. Le premier membre dépendra des données suivantes :

$$m'=0,\ d''=3,\ \delta''=1;\quad m'=0,\quad d''=1,\ \delta''=3;$$
$$m'=1,\ d''=1,\ \delta''=1;\quad m'=-1,\ d''=1,\ \delta''=1.$$

Il sera donc égal à

$$f(1,6)-f(3,2)+f(-1,6)+f(3,-2),$$

et réduction faite à $2f(1,6)$. Or c'est bien ce qu'on trouve au second membre, où les valeurs à employer sont

$$m_1=1,\ d_2=5,\ \delta_2=1;\quad m_1=1,\ d_2=1,\ \delta_2=5.$$

Pour tirer de la formule générale (π) notre ancienne formule (ξ), on n'a qu'à supposer la fonction $f(x,y)$ indépendante de y et réduite à une fonction $f(x)$ de x, vérifiant, bien entendu, la condition

$$f(-x)=f(x).$$

Le premier membre deviendra tout d'abord

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} f(\delta''-2m')$$

et coïncidera avec le premier membre de la formule (ξ). Quant au second, il se présente de cette manière :

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}} f(m_1).$$

La première sommation à effectuer porte sur δ_2, et, d'après notre notation habituelle, on a

$$\sum (-1)^{\frac{\delta_2 - 1}{2}} = \rho(m_2) = \rho(2m - m_1^2).$$

Nous avons donc pour la somme double cherchée cette valeur simple

$$\sum \rho(2m - m_1^2) f(m_1).$$

En la développant, on doit, d'après l'équation

$$2m = m_1^2 + m_2,$$

où m_2 est > 0, s'arrêter au moment où les termes sous le signe ρ deviendraient négatifs; d'ailleurs m_1 est impair et positif : il vient donc

$$f(1)\rho(2m - 1^2) + f(3)\rho(2m - 3^2) + \ldots \\ + f(2n-1)\rho[2m - (2n-1)^2],$$

comme au second membre de la formule (ξ).

Je ne veux pas m'arrêter plus longtemps à la formule (π). Je ne puis pourtant me dispenser d'écrire la formule particulière, mais utile encore, que l'on obtient en remplaçant $f(x, y)$ par une simple fonction de y, vérifiant la condition

$$f(-y) = f(y).$$

La voici :

$$\sum\sum (-1)^{\frac{\delta'' - 1}{2}} f(2d'' + 4m') = \sum\sum (-1)^{\frac{\delta_2 - 1}{2}} f(d_2 + \delta_2).$$

Je passe à d'autres équations.

Revenons au mode de partition employé dans notre septième article : m étant un entier donné, pair ou impair, comme on voudra, posons de toutes les manières possibles

$$m = m'^2 + m'', \quad m'' = 2^{\alpha''} d'' \delta'',$$

par suite

$$m = m'^2 + 2^{\alpha''} d'' \delta'',$$

m' étant un entier indifféremment positif, nul ou négatif, tandis que m'', d'', δ'' sont positifs; de plus, on suppose d'' et δ'' impairs : $2^{\alpha''}$ est donc la plus haute puissance de 2 qui divise m'', et quand m'' est impair, on a $\alpha'' = 0$. C'est à ce mode de partition que se rapporte la somme double

$$\sum\sum (-1)^{m' + \frac{\delta''-1}{2}} f(2^{\alpha''} d'' + m'),$$

que nous devons d'abord considérer : le premier $\sum$ est relatif aux valeurs conjuguées δ'' et $2^{\alpha''} d''$ dont le produit est un des nombres m''; le second aux groupes successifs (m', m'') que l'on obtient en posant

$$m' = 0, \quad m' = \pm 1, \quad m' = \pm 2, \ldots, \quad m' = \pm \omega,$$

ω^2 étant le plus grand carré inférieur à m. La fonction $f(x)$ doit vérifier la condition $f(-x) = f(x)$.

Maintenant au moyen des représentations de m par trois carrés, c'est-à-dire au moyen de l'équation

$$m = s^2 + s'^2 + s''^2,$$

formons cette autre somme

$$\sum\sum (-1)^s f(s')$$

où la fonction f est la même et qui s'applique à toutes les valeurs correspondantes de s et de s' dans l'équation citée, puis retranchons-la du quadruple de la première.

Le théorème consiste en ce que la différence indiquée

$$4 \sum\sum (-1)^{m' + \frac{\delta''-1}{2}} f(2^{\alpha''} d'' + m') - \sum\sum (-1)^s f(s')$$

est généralement nulle : il n'y a exception que quand m est un carré, et alors elle est égale à

$$2(-1)^{m-1} f(\sqrt{m}).$$

En d'autres termes, on a

$$(\rho)\quad \begin{cases} 4\sum\sum(-1)^{m'+\frac{\delta''-1}{2}} f(2^{\alpha''}d''+m') - \sum\sum(-1)^s f(s') \\ \qquad = 2(-1)^{m-1} f(\sqrt{m}), \text{ ou } = 0, \end{cases}$$

suivant que m est ou n'est pas un carré.

Soit, par exemple, $m=1$: on ne pourra faire que

$$m'=0,\quad 2^{\alpha''}d''=1,\quad \delta''=1,$$

et la première somme se réduira au seul terme $f(1)$, d'où $4f(1)$ dans l'équation (ρ). Il y a six représentations de 1 par trois carrés, savoir :

$$1=(\pm 1)^2+0^2+0^2=0^2+(\pm 1)^2+0^2=0^2+0^2+(\pm 1)^2.$$

Ceci introduira dans le premier membre de l'équation (ρ) ces autres termes à ajouter au terme déjà trouvé :

$$f(0)+f(0)-f(1)-f(-1)-f(0)-f(0);$$

de sorte que $f(-1)$ étant égal à $f(1)$, il viendra finalement $2f(1)$, et c'est bien ce que donne le second membre, l'unité étant un carré.

Soit encore

$$m=2:$$

on aura

$$m'=0,\quad 2^{\alpha''}d''=2,\quad \delta''=1,$$

puis

$$m'=\pm 1,\quad 2^{\alpha''}d''=1,\quad \delta''=1;$$

d'un autre côté

$$\begin{aligned} 2 &= 0^2+(\pm 1)^2+(\pm 1)^2=(\pm 1)^2+0^2+(\pm 1)^2 \\ &= (\pm 1)^2+(\pm 1)^2+0^2. \end{aligned}$$

Comme les quatre représentations de 2 qui ne diffèrent que par le signe $\pm$ donnent la même valeur de $(-1)^s f(s')$, on trouvera pour le premier membre de l'équation (ρ)

$$4[f(2)-f(2)-f(0)-f(1)+f(0)+f(1)],$$

c'est-à-dire zéro, comme cela doit être.

Pour $m=3$, on aura

$$m'=0,\quad 2^{\alpha''}d''=3,\quad \delta''=1;\qquad m'=0,\quad 2^{\alpha''}d''=1,\quad \delta''=3;$$
$$m'=1,\quad 2^{\alpha''}d''=2,\quad \delta''=1;\quad m'=-1,\quad 2^{\alpha''}d''=2,\quad \delta''=1;$$

d'ailleurs l'équation

$$3=(\pm 1)^2+(\pm 1)^2+(\pm 1)^2$$

fournit pour $(-1)^s f(s')$ huit fois le même terme $-f(1)$, d'où, en changeant le signe, $8f(1)$. On trouve donc encore zéro pour résultat final, vu que

$$4[f(3)-f(1)-f(3)-f(1)]+8f(1)=0.$$

Quand m est de la forme $4^k(8\nu+7)$, il ne peut être égal ni à un carré, ni à une somme de trois carrés : ainsi la somme

$$\sum(-1)^s f(s')$$

se réduit à zéro, et le second membre de l'équation (ρ) est toujours égal à zéro. Dans ce cas donc, on a simplement

$$\sum\sum(-1)^{m'+\frac{\delta''-1}{2}} f(2^{\alpha''}d''+m')=0.$$

Posons, dans l'équation (ρ),

$$f(x)=x^2.$$

Il nous viendra

$$4\sum\sum(-1)^{m'+\frac{\delta''-1}{2}}(2^{\alpha''}d''+m')^2-\sum(-1)^s s'^2$$
$$=2(-1)^{m-1}m,\ \text{ou}\ =0,$$

suivant que m est ou n'est pas un carré; mais en développant

$$(2^{\alpha''}d'' + m')^2$$

et en observant que l'on a

$$\sum\sum(-1)^{m'+\frac{\delta''-1}{2}} 2^{\alpha''}d''\,m' = 0,$$

à cause du double signe qu'on doit donner aux valeurs de m' autres que zéro, on obtient cette autre équation

$$4\sum\sum(-1)^{m'+\frac{\delta''-1}{2}}(2^{2\alpha''}d''^2 + m'^2) - \sum(-1)^s s'^2$$
$$= 2(-1)^{m-1}m, \text{ ou } = 0.$$

Le terme

$$\sum(-1)^s s'^2$$

dépend de la décomposition de m en trois carrés; mais pour interpréter la somme double

$$\sum\sum(-1)^{m'+\frac{\delta''-1}{2}}(2^{2\alpha''}d''^2 + m'^2),$$

il faudra tout à la fois recourir aux décompositions en trois carrés et aux décompositions en six ou même en sept carrés. Bornons-nous ici à donner l'énoncé d'un théorème auquel la discussion détaillée que nous supprimons conduit quand m est un nombre impair de la forme $8\nu + 7$, ce qui est le cas le plus simple parce que l'expression de m par un carré et par trois carrés étant alors impossible, notre équation se réduit à

$$\sum\sum(-1)^{m'+\frac{\delta''-1}{2}} 2^{2\alpha''}d''^2 = 0:$$

on a d'ailleurs $\alpha'' = 0$ quand m' est impair et $\alpha'' = 1$ quand m' est pair. On en conclut aisément que si considérant l'équation

$$8\nu + 7 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_5^2 + m_6^2 + m_7^2,$$

où le premier membre est donné, et où $m_1, m_2, \ldots, m_7$ sont des entiers de signes quelconques (zéro compris), on cherche d'une part le nombre N_1 des solutions où le premier terme m_1 est impair et d'autre part le nombre N_2 des solutions où m_1 est pair, on trouvera toujours entre N_1 et N_2 ce rapport

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{17}{20}.$$

Soit, par exemple, $\nu = 0$. Le nombre N_1 sera fourni par les deux équations

$$7 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2$$

et

$$7 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2,$$

dans la seconde desquelles on opérera entre les six derniers carrés toutes les permutations possibles. Ainsi

$$N_1 = 2^7 + 2^4 \cdot \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.1.2.3} = 2^6.17.$$

Le nombre N_2 sera fourni à son tour par les deux équations

$$7 = 0^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2$$

et

$$7 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2,$$

en ne laissant fixes dans chacune d'elles que le premier carré. On a donc

$$N_2 = 2^4 \cdot \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.1.2.3} + 2^4 \frac{1.2.3.4.5.6}{1\ 2.3.1.2.3} = 2^6.20.$$

Le rapport de N_1 à N_2 est bien celui de 17 à 20.

Soit encore $\nu = 1$. Tout sera fourni par les équations fondamentales :

$$15 = 9 + 4 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0,$$
$$15 = 9 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1,$$
$$15 = 4 + 4 + 4 + 1 + 1 + 1 + 0,$$

en y introduisant le double signe $\pm$ et en effectuant les permutations; on trouve

$$N_1 = 2^6.7.17, \quad N_2 = 2^6.7.20:$$

le rapport indiqué subsiste.

Avant de quitter la formule (ρ), j'écrirai encore le résultat important qu'elle fournit quand on y pose

$$f(x) = \cos(xt),$$

t étant une constante quelconque : après une simplification facile, on obtient

$$\sum\sum(-1)^{m'+\frac{\delta''-1}{2}} \cos(2^{\alpha''}d''t)\cos m't - \sum(-1)^s \cos(s't)$$
$$= 2(-1)^{m-1}\cos(t\sqrt{m}), \text{ ou } = 0,$$

suivant que m est ou n'est pas un carré.

Maintenant, je réduis de nouveau le nombre m à n'être plus qu'impair et même de la forme $4\nu+1$; et je l'assujettis au mode de partition marqué par les équations, en nombres entiers,

$$m = 4m'^2 + m'', \quad m'' = d''\delta'',$$

ou, ce qui revient au même, par l'équation unique,

$$m = 4m'^2 + d''\delta'',$$

où d'' et δ'' sont impairs et positifs, tandis que m' est indifféremment positif ou négatif ou même zéro.

Cela admis, je désigne par $\psi(x)$ une fonction de x algébrique ou numérique absolument quelconque, et je forme la somme double

$$\sum\sum(-1)^{m'+\frac{\delta''-1}{2}}\psi\left(m' + \frac{d''-\delta''}{4}\right),$$

où le premier $\sum$ porte à l'ordinaire sur les valeurs conjuguées d'', δ'' qui répondent à un même produit m'', tandis que le second s'applique aux groupes successifs (m', m'') que l'on obtient en prenant

$$m' = 0, \quad m' = \pm 1, \quad m' = \pm 2, \ldots, \quad m' = \pm \omega,$$

en désignant par $4\omega^2$ le carré pair immédiatement inférieur à m.

Je trouve que la somme double indiquée est généralement égale à zéro : il n'y a exception que quand m est un carré, et alors elle a cette valeur très-simple

$$(-1)^{\frac{\sqrt{m}-1}{2}} \sqrt{m}\, \psi(0).$$

Ainsi l'on a

$$(\sigma) \sum\sum (-1)^{m'+\frac{\delta''-1}{2}} \psi\left(m' + \frac{d''-\delta''}{4}\right) = (-1)^{\frac{\sqrt{m}-1}{2}} \sqrt{m}\psi(0), \text{ ou } = 0,$$

suivant que m est ou n'est pas un carré.

Pour la vérifier numériquement, prenons d'abord $m = 5$: nous aurons à considérer les valeurs de m', d'' et δ'' ci-après :

$$m' = 2, \quad d'' = 5, \quad \delta'' = 1; \quad m' = 0, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 5;$$
$$m' = 1, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 1; \quad m' = -1, \ d'' = 1, \quad \delta'' = 1;$$

le premier membre de l'équation (σ) sera donc

$$\psi(1) + \psi(-1) - \psi(1) - \psi(-1),$$

quantité égale à zéro, comme cela doit être.

Soit, en second lieu, $m = 9$: comme 9 est un carré, on devra trouver

$$-3\psi(0).$$

Or on aura à prendre

$$\begin{array}{lll}
m' = 0, & d'' = 9, & \delta'' = 1, \\
m' = 0, & d'' = 3, & \delta'' = 3, \\
m' = 0, & d'' = 1, & \delta'' = 9, \\
m' = 1, & d'' = 5, & \delta'' = 1, \\
m' = 1, & d'' = 1, & \delta'' = 5; \\
m' = -1, & d'' = 5, & \delta'' = 1, \\
m' = -1, & d'' = 1, & \delta'' = 5.
\end{array}$$

d'où, pour le premier membre de l'équation (σ),

$$\psi(2) - \psi(0) + \psi(-2) - \psi(2) - \psi(0) - \psi(0) - \psi(-2);$$

et cela se réduit effectivement à $-3\psi(0)$.

En posant

$$f(x) = \tfrac{1}{2}[\psi(x) + \psi(-x)], \qquad F(x) = \tfrac{1}{2}[\psi(x) - \psi(-x)],$$

on a

$$\psi(x) = f(x) + F(x);$$

et il est clair que la fonction $f(x)$ sera paire, c'est-à-dire vérifiera l'équation

$$f(-x) = f(x),$$

tandis que $F(x)$ sera impaire, c'est-à-dire telle, que l'on aura

$$F(-x) = -F(x), \qquad F(0) = 0.$$

Aucune autre condition n'est d'ailleurs imposée aux fonctions $f(x)$ et $F(x)$, puisque la fonction $\psi(x)$ dont elles dérivent est absolument quelconque.

Puisque la fonction $\psi(x)$ est à volonté dans l'équation (σ), on peut substituer $f(x)$ à $\psi(x)$, et l'on a

$$\sum\sum(-1)^{m'+\frac{\delta''-1}{2}} f\left(m' + \frac{d''-\delta''}{4}\right) = (-1)^{\frac{\sqrt{m}-1}{2}} \sqrt{m}\, f(0), \text{ ou } = 0,$$

suivant que m est ou n'est pas un carré. En appliquant cette même équation à $F(x)$, on aura à cause de $F(0) = 0$ ce résultat plus simple :

$$\sum\sum(-1)^{m'+\frac{\delta''-1}{2}} F\left(m' + \frac{d''-\delta''}{4}\right) = 0.$$

L'équation générale (σ) n'est que la somme des deux équations particulières concernant une fonction paire $f(x)$ et une fonction impaire $F(x)$; mais il faut bien se garder de mettre ces deux équations sur le même rang. L'équation relative à $F(x)$ n'est qu'une identité presque évidente, du genre de celles dont nous avons dit un mot à la fin de notre cinquième article. L'équation relative à $f(x)$ a seule du prix.

Cette équation où entre $f(x)$ n'a été donnée jusqu'ici que pour un nombre m de la forme $4\nu + 1$: la formule (σ) n'est vraie en effet que pour les nombres de cette forme, tant que $\psi(x)$ conserve sa généralité absolue. Mais il arrive que quand on réduit $\psi(x)$ à une fonction paire $f(x)$, la formule (σ) reste vraie et même est évidemment vraie (à en devenir presque insignifiante) pour les nombres de la forme $4\nu + 3$. Comme ces nombres ne sont jamais des carrés, le second membre de la formule citée est alors toujours zéro : or en effet au premier membre les deux termes qu'on obtient en permutant d'' et δ'' et en changeant m' de signe (quand m' n'est pas zéro) répondent à une même valeur de la fonction $\psi(x)$ ou $f(x)$ supposée paire, et ont des coefficients égaux et de signes contraires, parce que m étant de la forme $4\nu + 3$ et égal à $4m'^2 + d''\delta''$, il faut que d'' et δ'' soient d'espèce opposée relativement au module 4, c'est-à-dire que

$$(-1)^{\frac{d''-1}{2}} = -(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}.$$

Nous voyons donc que pour *tout nombre impair m* soumis au mode de partition marqué par l'égalité

$$m = 4m'^2 + d''\delta'',$$

où les entiers d'' et δ'' sont impairs et positifs, tandis que l'entier m' n'est assujetti à aucune condition, on a, en désignant par $f(x)$ une fonction paire quelconque :

$$(\tau)\quad \sum\sum(-1)^{m'+\frac{\delta''-1}{2}} f\left(m' + \frac{d''-\delta''}{4}\right) = (-1)^{\frac{\sqrt{m}-1}{2}}\sqrt{m}\, f(0), \text{ ou } = 0,$$

suivant que m est ou n'est pas un carré.

Soit, par exemple, $m = 3$: on ne pourra prendre que

$$m' = 0, \quad d'' = 3, \quad \delta'' = 1,$$
$$m' = 0, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 3.$$

On aura donc pour le premier membre de l'équation (τ)

$$f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(-\frac{1}{2}\right),$$

ce qui fait bien zéro, parce que la fonction $f(x)$ est paire.

Je ne m'étendrai pas davantage sur les formules (σ) et (τ) : peut-être ai-je donné déjà trop d'applications détaillées dans cet article; nous dédommagerons le lecteur par la marche rapide des articles suivants.