JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

FERDINAND MINDING

Extrait d'une lettre adressée à M. Liouville

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 4 (1859), p. 273-280.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4__273_0>

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE;

Par M. Ferdinand MINDING,
Professeur à l'université de Dorpat.

Dans le dernier cahier de votre *Journal de Mathématiques* que je viens de recevoir (c'est celui de décembre 1858), on lit un Mémoire de M. Björling sur les cas dans lesquels l'équation

$$\begin{gathered}(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F)\,dx \\ + (A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D_1x + E_1y + F_1)\,dy = 0,\end{gathered}$$

dont l'intégration générale appartient à un ordre plus élevé, devient intégrable par les moyens ordinaires. L'auteur commence par traiter la même équation, mais dépourvue des termes constants F et F_1, pour y appliquer la substitution $z = \frac{x}{y}$; il parvient ainsi à différents cas qui s'intègrent aisément, parmi lesquels se trouve comprise l'équation de Jacobi dépourvue des termes constants; ensuite il passe en revue les circonstances qui se présentent quand on cherche à débarrasser la proposée des dits termes F et F_1.

Autrefois, en m'occupant de l'équation de Jacobi, j'avais fondé son intégration sur une méthode non moins simple et qui ne demande aucune réduction préalable. La base de cette méthode est dans la propriété caractéristique de l'équation proposée, d'offrir trois intégrales particulières de la forme linéaire $y = \alpha x + \beta$ (ou bien $\gamma y = \alpha x + \beta$, pour ne pas exclure, au moins en apparence, le cas de $\gamma = 0$), propriété qui ne paraît pas avoir assez fixé l'attention de ceux qui se sont occupés de l'équation de Jacobi. En partant de ce fait, on peut pour ainsi dire composer presque sans calcul ultérieur la forme définitive de l'intégrale, comme je l'ai montré dans une Note qu'on lit au tome IV du *Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, année 1845, p. 375, et qui a encore paru dans le *Journal* de Crelle, t. XL, p. 361. En général, mon but dans cette Note était de montrer comment on peut, dans bien des cas, profiter de la connaissance de quelques intégrales particulières pour l'intégration des équations différentielles du premier ordre entre deux variables. Il est bien vrai que souvent la connaissance d'intégrales particulières ne sert à rien, comme Euler le fait remarquer dans son chapitre *de integratione æquationum differentialium;* mais on peut quelquefois en tirer parti, et nous avons si peu de moyens pour l'intégration dont il s'agit, que celui-là n'est pas à dédaigner. En parcourant les exemples d'Euler, je me suis assuré que les substitutions les plus cachées qu'il applique pour séparer les variables, perdent leur caractère de hasard, si l'on commence par chercher quelque intégrale particulière de la proposée, et qu'on se trouve, grâce à ce moyen, dans ces cas d'Euler, mis tout de suite sur la voie de l'intégration.

Quant aux autres cas particuliers, dont il est question p. 425-433 du Mémoire de M. Björling, il est nécessaire d'observer que le premier n'aboutit qu'à l'une des équations

$$dx + \lambda\, dy = 0$$

ou

$$(\mathrm{D}x + \mathrm{E}y)\, dx + (\mathrm{D}_1 x + \mathrm{E}_1 y)\, dy = 0.$$

En effet dans ce cas on suppose $\varphi' = \psi'$, en conservant les signes de l'auteur. Or si l'on met encore, pour abréger,

$$\mathrm{A}z^2 + \mathrm{B}z + \mathrm{C} = \mathrm{P}, \quad \mathrm{A}_1 z^2 + \mathrm{B}_1 z + \mathrm{C}_1 = \mathrm{P}_1,$$
$$\mathrm{D}z + \mathrm{E} = \mathrm{Q}, \qquad \mathrm{D}_1 z + \mathrm{E}_1 = \mathrm{Q}_1,$$

on a

$$\varphi' = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}z + \mathrm{P}_1}, \quad \psi' = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{Q}z + \mathrm{Q}_1}.$$

Donc l'hypothèse $\varphi' = \psi'$ entraîne

$$\frac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{Q}_1}{\mathrm{Q}},$$

égalité qui ne peut subsister que de deux manières, savoir en posant ou Q diviseur de Q_1 ou bien Q diviseur de P. Soit Q diviseur de Q_1; le quotient sera une constante λ, et on aura par conséquent identiquement

$$\mathrm{Q}_1 = \lambda \mathrm{Q}, \quad \mathrm{P}_1 = \lambda \mathrm{P};$$

d'où il suit

$$A_1 = \lambda A,\quad B_1 = \lambda B,\quad C_1 = \lambda C,\quad D_1 = \lambda D,\quad E_1 = \lambda E.$$

Ainsi l'équation différentielle proposée devient divisible par

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey,$$

et, en effaçant ce facteur, on tombe sur l'équation

$$dx + \lambda dy = 0.$$

En second lieu, comme on a

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P}{Q},$$

si Q est diviseur de P, le quotient est du premier degré. Soit donc

$$P = Q.R.\quad R = Fz + G.$$

On aura encore

$$P_1 = Q_1 R:$$

donc, z étant $= \frac{x}{y}$,

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey &= (Az^2 + Bz + C)y^2 + (Dz + E)y \\ &= Py^2 + Qy = Qy(Ry + 1) = (Dx + Ey)(Fx + Gy + 1) \end{aligned}$$

et de même

$$A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D_1x + E_1y = (D_1x + E_1y)(Fx + Gy + 1).$$

Donc le facteur commun $Fx + Gy + 1$ étant supprimé, la proposée perd encore tout caractère quadratique et se réduit à

$$(Dx + Ey)dx + (D_1x + E_1y)dy = 0.$$

Le reste des cas particuliers peut être beaucoup simplifié, en le réunissant sous un point de vue commun. L'équation à traiter est celle-ci (avec les signes de l'auteur) :

$$y(A)\left(\frac{dy}{y} + \varphi' dz\right) + D\left(\frac{dy}{y} + \psi' dz\right) = 0 \text{ (p. 427)},$$

ou bien, mettant avec l'auteur

$$\frac{(\mathrm{D})}{(\mathrm{A})} = \mathrm{Z}^2,$$

elle devient

$$(y + \mathrm{Z}^2)\frac{dy}{y} + (y\varphi' + \mathrm{Z}^2\psi')\,dz = 0.$$

Mettons encore avec l'auteur

$$y = \mathrm{Z}^2 v^2,$$

nous aurons

$$(1 + v^2)\left(\frac{zd\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}} + \frac{zdv}{v}\right) + (v^2\varphi' + \psi')\,dz = 0,$$

et posant, pour abréger,

$$\frac{zd\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}dz} + \varphi'\zeta, \quad \frac{zd\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}dz} + \psi' = \zeta_1.$$

l'équation précédente, savoir :

$$(1 + v^2)\frac{2dv}{v} + 2\frac{d\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}} + \psi'\,dz + v^2\left(\frac{zd\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}} + \varphi'\,dz\right) = 0$$

devient

$$(1 + v^2)\frac{2dv}{v} + (\zeta_1 + v^2\zeta)\,dz = 0.$$

Maintenant il est clair que si l'on avait

$$\zeta = 0 \quad \text{ou} \quad \zeta_1 = 0,$$

ou, en général,

$$\zeta_1 = \mu\zeta,$$

μ étant constant, les variables se sépareraient immédiatement. C'est à quoi reviennent tous les cas traités depuis la page 427 jusqu'à la page 433.

Passant à quelque chose de plus général, je saisis cette occasion pour rappeler un théorème proposé dans la Note mentionnée ci-dessus et qui constitue une certaine extension de la règle connue pour l'intégration des équations différentielles homogènes. Le voici :

« Soient M, N, Q des fonctions homogènes de x et y, M et N du même degré n, et Q d'un degré quelconque q, l'équation

$$\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy + \mathrm{Q}\,(y\,dx - x\,dy) = 0$$

s'intègre tout de suite par la substitution de tx pour y, la même dont on se sert pour les équations homogènes. La proposition a encore lieu si Q est une fonction du quotient $\frac{y}{x}$; ce qui du reste n'est qu'un cas compris dans l'énoncé général du théorème, une fonction de $\frac{y}{x}$ devant être considérée comme fonction homogène du degré zéro. »

La démonstration est facile en exécutant la substitution, comme il a été fait dans la Note nommée ci-dessus. Et si, sans aucun changement de variable, on veut introduire un facteur propre à rendre intégrable la proposée, voici à quoi l'on est conduit.

Soit, pour abréger, $\mathrm{M}x + \mathrm{N}y = \omega$,

$$x^{n-q-1} \cdot e^{(n-q-1)\int \frac{\mathrm{N}y}{\omega} d\left(\frac{y}{x}\right)} = \mathrm{U},$$

le facteur cherché sera $\frac{\mathrm{U}}{\omega}$, c'est-à-dire qu'on a

$$\mathrm{U} \cdot \frac{\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy + \mathrm{Q}(y\,dx - x\,dy)}{\omega} = \text{à une différentielle exacte.}$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, comme on sait, qu'on ait

$$\frac{d\left(\mathrm{U} \cdot \frac{\mathrm{M} + \mathrm{Q}y}{\omega}\right)}{dy} = \frac{d\left(\mathrm{U} \cdot \frac{\mathrm{M} - \mathrm{Q}x}{\omega}\right)}{dx}.$$

Or on a

$$\frac{d\mathrm{M}}{dx}x + \frac{d\mathrm{M}}{dy}y = n\mathrm{M}, \qquad \frac{d\mathrm{N}}{dx}x + \frac{d\mathrm{N}}{dy}y = n\mathrm{N},$$

$$\frac{d\omega}{dx}x + \frac{d\omega}{dy}y = (n+1)\,\omega, \qquad \frac{d\mathrm{Q}}{dx}x + \frac{d\mathrm{Q}}{dy}y = q\mathrm{Q},$$

$$\frac{d\mathrm{U}}{dx}x + \frac{d\mathrm{U}}{dy}y = (n-q-1)\,\mathrm{U}, \qquad \mathrm{M}\frac{d\mathrm{U}}{dy} = \mathrm{N}\frac{d\mathrm{U}}{dx},$$

$$\frac{d\left(\frac{\mathrm{M}}{\omega}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{\mathrm{N}}{\omega}\right)}{dx}.$$

A l'aide de la dernière relation, la condition d'intégrabilité devient

$$\frac{M+Qy}{\omega}\cdot\frac{dU}{dy}+U\frac{d\left(\frac{Qy}{\omega}\right)}{dy}=\frac{N-Qx}{\omega}\cdot\frac{dU}{dx}-U\frac{d\left(\frac{Qx}{\omega}\right)}{dx},$$

ou bien, par l'avant-dernière,

$$\frac{Q}{\omega}\left(\frac{dU}{dx}x+\frac{dU}{dy}y\right)+U\left[\frac{d\left(\frac{Qx}{\omega}\right)}{dx}+\frac{d\left(\frac{Qy}{\omega}\right)}{dy}\right]=0,$$

ce qui donne

$$(n-q-1)\frac{QU}{\omega}+U\left[\frac{2Q}{\omega}+\frac{\frac{dQ}{dx}x+\frac{dQ}{dy}y}{\omega}-\frac{Q\left(\frac{d\omega}{dx}x+\frac{d\omega}{dy}\right)y}{\omega^2}\right]=0,$$

ce qui révient à l'identité

$$(n-q+1)Q+qQ-(n+1)Q=0.$$

Comme nous avons si peu de moyens pour l'intégration des équations différentielles du premier ordre entre deux variables, cette extension de la règle des fonctions homogènes, quelque petite qu'elle soit, me paraît devoir être accueillie dans les traités.

En réfléchissant de nouveau sur ces matières, je trouve qu'on peut beaucoup étendre l'équation de Jacobi et l'application des intégrales particulières pour son intégration. Me réservant de donner ailleurs des explications plus complètes, je vais proposer ici un exemple numérique. Soit

$$M=1+2x+y+3x^2+xy-y^2+2x^2y+xy^2,$$
$$N=1+x+y+2x^2+2xy-2x^3-x^2y,$$

et

$$M\,dx+N\,dy=0.$$

Pour intégrer cette équation, j'observe d'abord qu'elle a quatre intégrales particulières de la forme

$$y=\alpha x+\beta.$$

En effet, on satisfait à cette équation en mettant $\alpha x+\beta$ au lieu de y, et déterminant α et β par les conditions

$$1 + \beta - \beta^2 + \alpha + \beta\alpha = 0, \quad 3 + 2\beta + 3\alpha + \alpha\beta + \alpha^2 = 0.$$

La première donne α en β; mettant cette valeur dans la seconde, on obtient

$$2\beta^4 + 3\beta^3 + 4\beta^2 + 3\beta + 1 = 0.$$

Cette équation a quatre racines inégales, toutes complexes : je les designerai par β_1, β_2, β_3, β_4; que les valeurs correspondantes de α soient α_1, etc., et, par suite, on aura

$$\alpha_1 x + \beta_1 = y_1, \ldots$$

ou bien quatre intégrales particulières y_1, y_2, y_3, y_4. Soit encore

$$\psi y = y - y_1 . y - y_2 . y - y_3 . y - y_4;$$

d'où

$$\frac{\mathrm{M}}{\psi y} = \frac{\mathrm{M}_1}{\psi' y_1 (y - y_1)} + \ldots + \frac{\mathrm{M}_4}{\psi' y_4 (y - y_4)},$$

$$\frac{\mathrm{N}}{\psi y} = \frac{\mathrm{N}_1}{\psi' y_1 (y - y_1)} + \ldots + \frac{\mathrm{N}_4}{\psi' y_4 (y - y_4)}.$$

Je représente par M_1 la valeur de M pour $y = y_1$, et ainsi des autres termes. L'équation proposée devient donc

$$\frac{\mathrm{M}_1\, dx + \mathrm{N}_1\, dy}{\psi' y_1 (y - y_1)} + \ldots + \frac{\mathrm{M}_4\, dx + \mathrm{N}_4\, dy}{\psi' y_4 (y - y_4)} = 0.$$

Or on a

$$\mathrm{M}_1\, dx + \mathrm{N}_1\, dy_1 = 0, \ldots;$$

par conséquent l'équation devient

$$\frac{\mathrm{N}_1\, d(y - y_1)}{\psi' y_1 (y - y_1)} + \frac{\mathrm{N}_2\, d(y - y_2)}{\psi' y_2 (y - y_2)} + \frac{\mathrm{N}_3\, d(y - y_3)}{\psi' y_3 (y - y_3)} + \frac{\mathrm{N}_4\, d(y - y_4)}{\psi' y_4 (y - y_4)} = 0.$$

Soit x' la valeur de x pour laquelle y_1 devient égal à y_2, ou

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\, x' = \beta_1 - \beta_2;$$

on a pour cette valeur de x,

$$\psi' y_1 = 0,$$

puisque

$$\psi' y_1 = y_1 - y_2 . y_1 - y_3 . y_1 - y_4.$$

Donc $\psi' y_1$ est divisible par $x - x'$. Mais N_1 l'est aussi. En effet, on a pour chaque valeur de x

$$M_1 + N_1 \alpha_1 = 0 \quad \text{et} \quad M_2 + N_2 \alpha_2 = 0.$$

Mais la valeur particulière x' de x, en rendant $y_1 = y_2$, rend aussi $M_1 = M_2$ et $N_1 = N_2$; donc on a pour $x = x'$

$$M_1 + N_1 \alpha_1 = 0,$$

et à la fois

$$M_1 + N_1 \alpha_2 = 0;$$

par conséquent, α_2 étant différent de α_1, on a

$$M_1 = 0, \quad N_1 = 0$$

pour $x = x'$; donc N_1 (et de même M_1) est divisible par $x - x'$. La même démonstration s'applique aux autres valeurs de x qui rendent $y_1 = y_3$ et $y_1 = y_4$, et que je désignerai par x'' et x'''; donc les polynômes N_1 et $\psi' y_1$ sont divisibles tous deux par $x - x'.x - x''.x - x'''$, et puisqu'ils montent au troisième degré en x, le quotient $\frac{N_1}{\psi' y_1}$ est constant. Comme on a

$$N_1 = -(2 + \alpha_1) x^3 + \ldots,$$

on trouve

$$\frac{N_1}{\psi' y_1} = q_1 = \frac{-(2 + \alpha_1)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)},$$

et puisqu'il en est de même pour les autres termes $\frac{N_2}{\psi' y_2} = q_2$, etc., l'équation proposée se trouve transformée en celle-ci

$$q_1 \frac{d(y - y_1)}{y - y_1} + q_2 \frac{d(y - y_2)}{y - y_2} + q_3 \frac{d(y - y_3)}{y - y_3} + q_4 \frac{d(y - y_4)}{y - y_4} = 0,$$

qu'on intègre immédiatement.