JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

**Théorème arithmétique**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série*, tome 4 (1859), p. 271-272.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4__271_0>

gallica NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France*
*http://gallica.bnf.fr/*

*et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc*
*http://www.numdam.org/journals/JMPA*

# THÉORÈME ARITHMÉTIQUE ;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ des nombres entiers indéterminés, mais positifs, qui doivent vérifier une ou plusieurs équations

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_\mu) = 0, \ldots, \quad F(x_1, x_2, \ldots, x_\mu) = 0,$$

auxquelles peuvent être jointes des conditions limitatives, afin que le système (1) n'ait qu'un nombre fini de solutions. Considérons l'ensemble des solutions de ce système, et pour chacune d'elles décomposons $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ en deux facteurs, de manière à avoir de toutes les manières possibles

$$x_1 = d_1 \delta_1, \quad x_2 = d_2 \delta_2, \ldots, \quad x_\mu = d_\mu \delta_\mu,$$

puis formons les produits

$$d_1 d_2 \ldots d_\mu.$$

Enfin, pour chaque produit ainsi obtenu, cherchons si le nombre $n$ des facteurs premiers (égaux ou inégaux) qui le composent est pair ou impair, en observant que ce nombre $n$ est nul, et par conséquent pair, quand

$$d_1 d_2 \ldots d_\mu = 1 \text{ [*]}.$$

Cela posé, écrivons $+1$ toutes les fois que $n$ est pair, $-1$ quand $n$ est impair, et faisons la somme algébrique des unités ainsi inscrites. Nous aurons au sujet de cette somme $\sigma$ (l'excès du nombre des cas où $n$ est pair sur le nombre des cas où $n$ est impair) un théorème que je vais énoncer :

1°. La somme $\sigma$ peut se réduire à zéro, mais elle n'est jamais négative.

---

[*] Si l'on pose $d_1 d_2 \ldots d_\mu = m$, on verra qu'il s'agit ici de la fonction numérique que nous désignons par $\lambda(m)$. *Voir* le cahier de *juillet* 1857, page 246.

2°. Elle a pour valeur précise le nombre de manières dont on peut poser

$$(2) \qquad f(y_1^2, y_2^2, \ldots, y_\mu^2) = 0, \ldots, \quad F(y_1^2, y_2^2, \ldots, y_\mu^2) = 0,$$

$y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ étant des entiers positifs dont les carrés vérifient les conditions limitatives imposées à $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ : en d'autres termes $\sigma$ est le nombre des solutions du système (1) où $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ sont des carrés.

Je pourrais joindre à ce théorème (dont la démonstration est du reste extrêmement simple) d'autres théorèmes analogues. Je m'en tiendrai à ce qui précède, en ajoutant seulement un exemple. Je prendrai trois inconnues $x_1$, $x_2$, $x_3$ et une seule équation

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 8.$$

On aura ce tableau des solutions de l'équation proposée :

$$\begin{array}{ll} x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2; & x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ x_3 = 1; \\ x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 1; & x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1; \\ x_1 = 4,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1; & \end{array}$$

le groupe

$$x_1 = 1.1, \quad x_2 = 1.1, \quad x_3 = 1.2 = 2.1$$

fournit les deux produits

$$d_1 d_2 d_3 = 1, \quad d_1 d_2 d_3 = 2,$$

dont le premier donne $+1$ et le second $-1$ qui se compensent : le groupe $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1$ fournit à son tour les trois produits 1, 2, 4, d'où $+1$, $-1$, $+1$, ce qui donne au total une unité positive ; le calcul se fait de même pour les autres groupes, et il en résulte finalement $\sigma = 2$. Or l'équation

$$y_1^2 + y_2^2 + 3y_3^2 = 8$$

a en effet deux solutions en nombres entiers positifs, savoir

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = 1$$

et

$$y_1 = 2, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 1.$$