JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ERNEST LAMARLE

Note sur une classe particulière de surfaces à aire minima

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 4 (1859), p. 241-252.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4__241_0>

NOTE

SUR

UNE CLASSE PARTICULIÈRE DE SURFACES A AIRE MINIMA;

Par M. Ernest LAMARLE.

1. On sait que les surfaces qui satisfont à la condition de circonscrire un volume donné *sous une aire minima*, remplissent en même temps d'autres conditions très-remarquables. Déterminées géométriquement par *la constance de leur courbure moyenne*, elles représentent, au point de vue physique, les formes extérieures qu'affecte une masse liquide où l'équilibre subsiste sous la seule influence des attractions moléculaires.

Cette propriété des surfaces à aire *minima* se rattache à la théorie capillaire. Elle offre, à cet égard, des moyens précieux d'investigation, et elle acquiert une importance toute nouvelle depuis que les formes d'équilibre d'une masse liquide, supposée libre entre certaines limites, ont été rendues réalisables par une ing énieuse invention due à M. Plateau.

En présence des moyens nouveaux mis à la disposition du physicien pour étudier les principaux phénomènes de l'attraction moléculaire, il y a un véritable intérêt à augmenter le nombre des données théoriques susceptibles d'être vérifiées par voie d'expérience. Tel est, en partie, l'objet que nous nous proposons dans la présente Note.

Déjà plusieurs géomètres ont traité la question qui nous occupe ici. Monge a, le premier, donné l'intégrale générale des surfaces dont la courbure moyenne est partout égale à zéro. Au point de vue des applications, cette première solution, toute compliquée d'imaginaires, laissait beaucoup à désirer. MM. Ossian Bonnet et Catalan ont donné d'autres solutions simples et satisfaisantes. En dehors de ce cas particulier, aujourd'hui résolu, le cas général des surfaces à courbure moyenne constante a été l'objet de travaux distincts accomplis par d'autres géomètres, au nombre desquels nous citerons M. Delaunay, Beer, etc. Ces derniers travaux ont fait connaître quelles sont, parmi les surfaces de révolution, celles qui pour un même volume circonscrit, ont une aire *minima*. Nous poursuivons ces recherches en les appliquant au cas d'une surface engendrée par le déplacement d'une ligne qui tourne autour d'un axe, en même temps qu'elle se déplace parallèlement à cet axe. Nous admettons d'ailleurs que les angles décrits par rotation sont et restent proportionnels aux longueurs franchies par translation.

On observera que le problème ainsi énoncé comprend, comme cas particuliers, les surfaces de révolution, et de plus, parmi les surfaces réglées qui ne sont point de révolution, l'hélicoïde gauche à plan directeur. Il embrasse ainsi toutes les solutions possibles, en ce qui concerne les surfaces réglées et les surfaces de révolution. Il comprend, en outre, une autre solution déjà connue et plusieurs solutions nouvelles.

2. Prenons un système d'axes coordonnés rectangulaires et représentons par

$$x = \varphi(y)$$

l'équation d'une ligne quelconque tracée dans le plan des x, y.

Par hypothèse, cette ligne tourne autour de l'axe des x en même temps qu'elle glisse parallèlement à cet axe. Soit l la longueur franchie par translation pendant une révolution complète : on a

$$\frac{l}{2\pi} = \text{const.} = \mu,$$

et l'on trouve aisément pour équation de la surface engendrée

$$(1) \qquad x = \mu \operatorname{arc\,tang} \frac{z}{y} + \varphi(z^2 + y^2).$$

Cela posé, le problème qu'il s'agit de résoudre consiste à déterminer, parmi les surfaces que l'équation (1) représente, celles qui satisfont à la condition d'avoir *une courbure moyenne constante*, ou, ce qui revient au même, de *circonscrire un volume donné sous une aire minima*.

Si d'abord nous nous plaçons au premier point de vue et que nous désignions par ρ et ρ' les deux rayons de courbure principaux en un point quelconque de l'une des surfaces cherchées, nous aurons pour équation du problème

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \text{const.} = \frac{2}{r},$$

r étant le rayon qui mesure la courbure moyenne.

La condition exprimée par l'équation (2) a pour traduction générale

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]\frac{d^2x}{dz^2} - 2\frac{dx}{dz}\cdot\frac{dx}{dy}\cdot\frac{d^2x}{dz\,dy} + \left[1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2\right]\frac{d^2x}{dy^2} \\ &\qquad = \frac{2}{r}\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}\right.$$

Transportons dans l'équation (3) les valeurs des coefficients différentiels qu'elle renferme, en les déduisant de l'équation (1), et posant $z = 0$ dans les résultats obtenus. Nous avons ainsi pour équation différentielle de la ligne méridienne cherchée

$$(4)\quad \frac{[1+\varphi'(y)^2]\varphi'(y)}{y} + 2\frac{\mu^2}{y^3}\varphi'(y) + \left(1+\frac{\mu^2}{y^2}\right)\varphi''y = \frac{2}{r}\left[1+\varphi'(y)^2+\frac{\mu^2}{y^2}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Si d'ailleurs on prend x pour variable indépendante et qu'on pose

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = q,$$

il vient

$$\varphi'(y) = \frac{1}{p}, \quad \varphi''(y) = -\frac{q}{p^3},$$

ce qui donne, au lieu de l'équation (4),

$$\frac{p^2+1}{y} + \frac{2\mu^2p^2}{y^3} - q\left(1+\frac{\mu^2}{y^2}\right) = \frac{2}{r}\left(1+p^2+\frac{\mu^2p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

ou bien encore

$$\frac{dy}{\sqrt{1+p^2+\mu^2\frac{p^2}{y^2}}} - \frac{pdy\left(y+\frac{\mu^2}{y}\right) - \frac{p^2\mu^2}{y^2}dy}{\left(1+p^2+\mu^2\frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{r}ydy,$$

et, intégrant une première fois,

$$(5)\quad \frac{y}{\sqrt{1+p^2+\mu^2\frac{p^2}{y^2}}} = \frac{y^2}{r} + \mathrm{C}.$$

3. Au lieu d'opérer comme nous venons de le faire, on peut déterminer la ligne méridienne par la condition qu'elle engendre pour un volume donné une aire minima, ou pour une aire donnée le plus grand volume.

En supposant une révolution complète, les expressions du volume et de l'aire *engendrée* sont respectivement

$$\pi \int y^2 dx \quad \text{et} \quad 2\pi \int y dx \sqrt{1 + p^2 + \mu^2 \frac{p^2}{y^2}}.$$

On déduit de là, eu égard à la condition qui doit être remplie,

$$\delta \int \left(y^2 + 2ay \sqrt{1 + p^2 + \mu^2 \frac{p^2}{y^2}} \right) dx = 0.$$

Or, en regardant comme fixes les deux extrémités de l'arc générateur, et ne faisant varier que x, on a d'abord

$$\delta p = - \frac{dy \,.\, \delta dx}{dx^2},$$

puis substituant dans la variation de l'intégrale

$$\int \left(y^2 + \frac{2ay}{\sqrt{1 + p^2 + \mu^2 \frac{p^2}{y^2}}} \right) d\delta x = 0.$$

Il vient donc, en intégrant par parties et observant qu'aux limites $\delta x = 0$,

$$\int \left[\delta x \,.\, d \left(y^2 + \frac{2ay}{\sqrt{1 + p^2 + \mu^2 \frac{p^2}{y^2}}} \right) \right] = 0.$$

De là résulte, comme précédemment,

$$y^2 + \frac{2ay}{\sqrt{1 + p^2 + \mu^2 \frac{p^2}{y^2}}} = \text{const.}$$

4. Reprenons l'équation (5), où nous savons, à priori, quel sens s'attache à la constante r. En y remplaçant p par $\frac{dy}{dx}$, on trouve, en général,

$$(6) \qquad dx = \frac{\sqrt{y^2 + \mu^2}}{y} \frac{y^2 + cr}{\sqrt{r^2 y^2 - (y^2 + cr)^2}} dy,$$

et, pour le cas particulier des surfaces de révolution, μ étant égal à zéro,

$$(7) \qquad dx = \frac{y^2 + cr}{\sqrt{r^2 y^2 - (y^2 + cr)^2}} dy.$$

Désignons les premières surfaces sous le nom d'*hélicoïdes*, et observons que leurs lignes méridiennes, exprimées par l'équation (6), dérivent très-simplement de celles qui correspondent aux surfaces de révolution et qui sont représentées par l'équation (7). Pour passer de celles-ci à celles-là, il suffit de considérer de part et d'autre les points qui ont même ordonnée et d'y réduire, dans le rapport de y à $\sqrt{y^2 + \mu^2}$, la tangente de l'angle que la touchante à la courbe fait avec l'axe des x.

On sait, d'après M. Delaunay, que les lignes méridiennes des surfaces de révolution, à *courbure moyenne constante*, sont les roulettes engendrées par le foyer d'une section conique qui roule sans glisser sur l'axe de révolution. Soient y l'ordonnée du point décrivant et ω la vitesse angulaire de roulement; si, *toutes choses restant d'ailleurs les mêmes*, on fait glisser la section conique avec la vitesse variable $\omega(\sqrt{y^2 + \mu^2} - y)$, les roulettes se modifient et deviennent les lignes méridiennes des *hélicoïdes à courbure moyenne constante.*

Lorsque la ligne méridienne est une droite parallèle ou perpendiculaire à l'axe de révolution, elle ne se modifie point, dans le passage des surfaces de révolution aux hélicoïdes correspondants. Le cas du parallélisme donne le cylindre droit à base circulaire pour les deux genres de surfaces. Le cas de la perpendicularité donne, d'une part le plan, de l'autre l'hélicoïde gauche à plan directeur, et il est ainsi démontré que, dans cet hélicoïde, la courbure moyenne est constamment nulle.

5. Signalons un résultat curieux, fourni par l'induction, et d'ailleurs très-facile à établir rigoureusement.

Soient, *en général*, A, A′ deux surfaces dont l'une est un hélicoïde, l'autre une surface de révolution.

Soient s, s' leurs lignes méridiennes respectives et x, x' les abscisses qui correspondent de part et d'autre à deux points m, m' équidistants de l'axe de révolution.

μ étant le rapport de la vitesse de translation à la vitesse angulaire dans la génération de la surface A, on suppose qu'il existe entre les lignes méridiennes s, s' la relation générale

$$dx' = \frac{y}{\sqrt{y^2 + \mu^2}} dx.$$

Cela posé, on a le théorème suivant :

m, m' étant deux points équidistants de l'axe, et pris, l'un sur la surface A, l'autre sur la surface A', il y a même courbure moyenne en chacun de ces points.

Ce théorème comporte, ainsi qu'on le voit aisément, une infinité d'applications particulières. Nous nous bornerons à en donner une.

Supposons la ligne s droite et inclinée sur l'axe de révolution.

La surface A est un hélicoïde gauche; la surface A' un hyperboloïde de révolution à deux nappes.

Soit p la tangente de l'inclinaison de la droite s sur l'axe; la ligne s' a pour équation

$$px' + c = \sqrt{\mu^2 + y^2}.$$

On voit ainsi comment se correspondent l'hélicoïde gauche et l'hyperboloïde de révolution, ces deux surfaces ayant même courbure moyenne en leurs points conjugués, c'est-à-dire en deux points quelconques pris, de part et d'autre, à égale distance de l'axe des x.

Discussion de l'équation (6).

6. Reprenons l'équation (6) et supposons d'abord que la courbure moyenne, assujettie à demeurer constante, soit égale à zéro. Il vient alors

$$dx = \pm c \sqrt{\frac{\mu^2 + y^2}{y^2 - c^2}} \cdot \frac{dy}{y},$$

et désignant par c' la constante introduite par la seconde intégration,

$$x = c' \pm c \log\left(\sqrt{y^2 + \mu^2} - \sqrt{y^2 - c^2}\right) \pm \mu \operatorname{arc tang} \frac{\mu c}{y^2 - \sqrt{(y^2 + \mu^2)(y^2 - c^2)}}.$$

L'hypothèse $c = 0$ donne pour ligne méridienne

$$x = c',$$

et pour surface correspondante, l'hélicoïde gauche à plan directeur.

En général, la ligne méridienne est une courbe située tout entière au-dessus de l'axe des x et dont le point le plus bas répond à l'ordonnée $y = c$. Si l'on détermine la constante c' de manière que l'axe des y passe par ce point, on a

$$x = \mu \operatorname{arc\,tang} \frac{\mu}{c} \sqrt{\frac{y^2 - c^2}{y^2 + \mu^2}} - c \log \frac{\sqrt{y^2 + \mu^2} - \sqrt{y^2 - c^2}}{\sqrt{\mu^2 + c^2}} \text{ [*]},$$

ou posant

$$z = \mu \operatorname{arc\,tang} \frac{\mu}{c} \sqrt{\frac{y^2 - c^2}{y^2 + \mu^2}},$$

et substituant

$$\sqrt{y^2 + \mu^2} = \frac{\sqrt{\mu^2 + c^2}}{2} \left(e^{\frac{x+z}{c}} + e^{-\frac{x+z}{c}} \right).$$

Soit $\mu = 0$. La surface engendrée étant alors de révolution, il vient pour ligne méridienne

$$y = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right),$$

c'est-à-dire la chaînette.

7. Dans le cas général, la courbure moyenne n'étant pas nulle, on a

$$dx = \frac{\sqrt{y^2 + \mu^2}}{y} \frac{y^2 + cr}{\sqrt{r^2 y^2 - (y^2 + cr)^2}} dy.$$

Posons

$$y^2 + \mu^2 = z^2,$$

il vient

$$dx = \frac{z^2 (z^2 - \mu^2 + cr)\, dz}{(z^2 - \mu^2) \sqrt{\left[z^2 + cr - \mu^2 + \frac{r}{2} \sqrt{r^2 - 4cr} \right] \left[\frac{r}{2} \sqrt{r^2 - 4cr} + \frac{r^2}{2} - cr + \mu^2 - z^2 \right]}}.$$

---

[*] MM. Ossian Bonnet et Catalan ont donné cette solution comme cas particulier des surfaces où la courbure moyenne est égale à zéro. (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1853, volume XXVII, p. 531, et volume XL, p. 275.)

Soit fait maintenant

$$z^2 = \mu^2 + \frac{r^2 - 2cr}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{r^2 - 4cr} - r\sqrt{r^2 - 4cr}\,.\,\sin^2\varphi.$$

Le radical qui figure au dénominateur de la valeur de dx se réduit à

$$r\sqrt{r^2 - 4cr}\,.\,\sin\varphi\,.\,\cos\varphi.$$

On a d'ailleurs

$$dz = -\frac{r\sqrt{r^2 - 4cr}\,.\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{\mu^2 + \frac{r^2 - 2cr}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{r^2 - 4cr} - r\sqrt{r^2 - 4cr}\,.\sin^2\varphi}}\,d\varphi.$$

Posons, pour simplifier,

$$P^2 = \mu^2 + \frac{r^2 - 2cr}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{r^2 - 4cr} = \mu^2 + \left(\frac{r}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - 4cr}\right)^2$$

et

$$K^2 = r\frac{r\sqrt{r^2 - 4cr}}{P^2}.$$

De là résulte, en substituant,

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} dx &= P\,d\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} + \frac{cr.d\varphi}{P\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \\ &\quad + \frac{1}{P(P^2 - \mu^2 - P^2k^2\sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\,\mu^2c.r.d\varphi. \end{aligned}\right.$$

La solution générale se trouve ainsi ramenée aux intégrales elliptiques, et l'on peut la considérer comme complète, au point de vue analytique.

Application particulière.

8. Considérons en particulier le cas où $c = 0$, c'est-à-dire le cas où il s'agit de l'hélicoïde qui dérive de la sphère et qui lui correspond.

L'équation (8) se réduit à la forme très-simple

$$(9)\qquad dx = \sqrt{\mu^2 + r^2}\,.\,d\varphi\sqrt{1 - \frac{r^2}{\mu^2 + r^2}\sin^2\varphi},$$

et l'on a en même temps

$$y = r\cos\varphi. \tag{10}$$

Désignons par s l'arc de l'ellipse dont les axes principaux sont respectivement $2a$ et $2b$: on a d'abord pour équation de cette ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{11}$$

Posons

$$x = a\sin\varphi;$$

il en résulte

$$y = b\cos\varphi,$$

et ensuite

$$ds = ad\varphi\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin\varphi^2}.$$

En attribuant aux quantités a, b les valeurs suivantes :

$$a = \frac{r}{\mu}\sqrt{\mu^2 + r^2}, \quad b = r,$$

on en déduit pour la différentielle de l'arc elliptique,

$$ds = \frac{r}{\mu}\sqrt{\mu^2 + r^2}\,.\,d\varphi\sqrt{1 - \frac{r^2}{\mu^2 + r^2}\sin^2\varphi},$$

et l'on voit aisément comment la courbe méridienne, représentée par les équations (9) et (10), dérive de l'ellipse représentée par l'équation (11).

Soient m, m' deux points quelconques ayant même ordonnée $y = r\cos\varphi$, l'un placé sur l'ellipse, l'autre sur la méridienne cherchée : s étant la longueur de l'arc mesuré sur l'ellipse entre le sommet du petit axe et le point m, $\frac{\mu}{r}s$ est l'abscisse qui correspond au point m' de la courbe méridienne.

S'agit-il ensuite de la section faite dans l'hélicoïde par un plan perpendiculaire à l'axe de révolution et désignée sous le nom de *parallèle*? Le méridien tournant en même temps qu'il glisse, il est visible que, si l'on prend pour pôle le point où le parallèle est percé par l'axe de révolution, les ordonnées du méridien deviennent les rayons vecteurs du parallèle. On voit d'ailleurs que, pour une translation représentée par l'abscisse x du méridien, l'angle décrit par l'ordonnée correspondante est mesuré par l'arc $\frac{x}{\mu}$ du cercle au rayon 1, ou, ce qui revient au même, par l'arc $\frac{rx}{\mu}$ du cercle au rayon r.

Il suit de là que, pour construire le parallèle de l'hélicoïde cherché, on peut opérer de la manière suivante :

1°. Tracer avec le rayon r une circonférence de cercle;

2°. Appliquer sur cette circonférence, à partir d'un même point, les arcs s de l'ellipse (11);

3°. Prendre, dans cette ellipse, les ordonnées qui correspondent aux extrémités des arcs s;

4°. Reporter ces ordonnées sur les rayons vecteurs menés du centre aux extrémités des arcs s devenus circulaires.

9. Procédant comme il vient d'être dit et prenant le centimètre pour unité de longueur, nous avons attribué à μ et r les valeurs suivantes :

$$r = 5,$$

$$\mu = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

De là résulte immédiatement

$$\frac{r^2}{\mu^2 + r^2} = \frac{3}{4},$$

et par suite

$$y = 5 \cos \varphi,$$

$$s = 10 \int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \varphi}.$$

Cela posé, nous avons calculé les valeurs qui figurent dans le tableau ci-après, et que l'on peut d'ailleurs déterminer graphiquement.

VALEURS CORRESPONDANTES ET SIMULTANÉES		
DES ANGLES φ.	DES ARCS D'ELLIPSE s.	DES ORDONNÉES y.
degrés.	centimètres.	centimètres.
0	0	5,000
1	0,1745	4,999
2	0,35	4,997
3	0,52	4,993
4	0,70	4,998
5	0,87	4,981
10	1,74	4,92
15	2,59	4,83
20	3,44	4,698
25	4,26	4,53
30	5,06	4,33
35	5,83	4,095
40	6,57	3,83
45	7,28	3,535
50	7,95	3,214
55	8,59	2,868
60	9,18	2,50
65	9,74	2,11
70	10,27	1,71
75	10,76	1,20
80	11,22	0,86
85	11,67	0,43
90	12,1105	0,00

La partie de la courbe méridienne représentée *fig.* 1 (p. 252) [*] a pour abscisses les longueurs de l'arc s réduites dans le rapport de μ à r, c'est-à-dire de 1 à $\sqrt{3}$. Les ordonnées correspondantes sont celles qui figurent en regard de ces arcs dans la dernière colonne du tableau précédent.

La partie du parallèle qui correspond à une translation égale en lon-

[*] Dans l'impression, les *figures* 1 et 2 ont été réduites de moitié.

gueur à la corde ac de l'arc abc (*fig.* 1), est représentée *fig.* 2 (p. 252). On l'a construite en décrivant une circonférence de cercle ayant son centre en O et 5 centimètres de rayon. On a porté sur cette circonférence, à partir du point O', les arcs s de l'ellipse, et sur les rayons vecteurs correspondants aux extrémités de ces arcs, les longueurs exprimées par y dans la troisième colonne.

Le déplacement par translation correspondant à un quart de révolution a pour mesure

$$\frac{5\pi}{2\sqrt{3}} = 4,5345,$$

c'est-à-dire les 0,324 de la corde ac (*fig.* 1).

Ces diverses données ont été communiquées à M. Plateau, il y a cinq ou six ans. Il fit alors construire en fil de fer les contours de cinq parallèles, qu'il disposa le long d'un axe en fil de fer [*], dans des plans normaux à cet axe et espacés entre eux de $4^c,53$. Chaque parallèle était rencontré par l'axe au point O, et disposé dans son plan de manière que d'un parallèle au parallèle suivant la droite OO' eût tourné d'un angle droit. Cet appareil étant placé dans un mélange d'eau et d'alcool de même densité que l'huile interposée en quantité convenable entre l'axe et les parallèles, on vit l'hélicoïde se former de lui-même et affecter exactement la forme déterminée par la ligne méridienne (*fig.* 1).

---

[*] L'axe doit être recouvert de fil de coton, pour n'être pas mouillé par l'huile, autrement l'expérience ne reussirait pas.

Fig. 1.

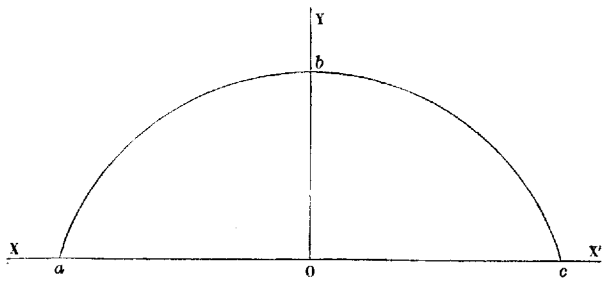

Fig. 2.