JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres (dixième article)

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 4 (1859), p. 195-204.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4__195_0>

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

DIXIÈME ARTICLE.

Je conserve les deux modes de partition mis en usage dans notre neuvième article et qui ont cela de commun, que l'on y considère le nombre m dont on s'occupe comme composé de deux parties dont l'une est un carré et dont l'autre est un entier positif, lequel peut être quelconque dans le premier mode de partition, tandis que dans le second mode il est essentiellement pair : dans les deux cas, on introduit les diviseurs de ce nombre entier.

Ainsi, on pose d'une part

$$m = m'^2 + m'' = m'^2 + 2^{\alpha''} d'' \delta'',$$

m'', d'', δ'' étant des entiers positifs, les deux derniers impairs, l'exposant α'' pouvant se réduire à zéro, et les valeurs de m' étant indifféremment positives ou négatives ou même zéro. Puis d'autre part on fait

$$m = m_1^2 + 2m_2 = m_1^2 + 2d_2\delta_2,$$

m_2 ou $d_2\delta_2$ étant un entier essentiellement positif, d'ailleurs pair ou impair, δ_2 étant toujours impair, et d_2 pair ou impair comme m_2 : quant à l'entier m_1 qu'on peut prendre à volonté positif, négatif ou nul, il est naturellement du même genre que m, impair quand m est impair, pair quand m est pair.

Nous allons considérer deux sommes respectivement relatives à nos deux modes de partition. Ces sommes contiennent une fonction $f(x, y)$ de deux variables, qui doit être telle, que l'on ait

$$f(-x, y) = f(x, y) = f(x, -y),$$

pour toutes les valeurs de x, y dont on fera usage : on verra que y est toujours un nombre entier impair, et que x aussi est un entier, du même genre que m.

La première somme peut s'écrire ainsi :

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}\delta'' f(2^{\alpha''}d''+m',\ \delta''-2m').$$

Elle se rapporte à l'équation

$$m=m'^2+m''=m'^2+2^{\alpha''}d''\delta''.$$

La second concerne au contraire le mode de partition marqué par

$$m=m_1^2+2m_2=m_1^2+2d_2\delta_2.$$

La voici :

$$\sum\sum(2d_2-\delta_2)f(m_1,\ 2d_2+\delta_2).$$

Le théorème que nous voulons donner au sujet de ces deux sommes consiste en ce que leurs valeurs sont généralement égales entre elles : il n'y a exception que quand m est un carré, et alors l'excès de la première sur la seconde s'exprime par

$$f(\sqrt{m},2\sqrt{m}-1)+3f(\sqrt{m},2\sqrt{m}-3)+5f(\sqrt{m},2\sqrt{m}-5)+\ldots+(2\sqrt{m}-1)f(\sqrt{m},1);$$

le terme général de cette dernière suite est

$$(2s-1)f(\sqrt{m},\ 2\sqrt{m}-2s+1),$$

s entier et variant de 1 à $\sqrt{m}$.

Nous disons donc que

$$(\eta)\left\{\begin{aligned}&\sum\sum(-1)^{m''-1}\delta'' f(2^{\alpha''}d''+m',\delta''-2m')-\sum\sum(2d_2-\delta_2)f(m_1,2d_2+\delta_2)=0,\\&\text{ou }=f(\sqrt{m},\ 2\sqrt{m}-1)+3f(\sqrt{m},\ 2\sqrt{m}-3)+\ldots+(2\sqrt{m}-1)f(\sqrt{m},\ 1),\end{aligned}\right.$$

suivant que m n'est pas ou est un carré.

Cette formule contient comme cas particulier la formule (ζ) de l'article précédent. Il n'y a qu'à supposer que $f(x,y)$ ne contient pas y

et se réduit à une fonction $f(x)$ remplissant la condition

$$f(-x) = f(x).$$

La première de nos deux sommes deviendra

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}\delta'' f(2^{\alpha''}d'' + m'),$$

comme dans la formule citée (ζ) : les seconds membres seront aussi les mêmes; il reste seulement à prouver que

$$\sum\sum(2d_2 - \delta_2) f(m_1) = \sum \zeta_1(m_2) f(m_1),$$

ou, ce qui revient au même, il faut prouver que

$$\sum(2d_2 - \delta_2) = \zeta_1(m_2),$$

$\zeta_1(m_2)$ désignant la somme des diviseurs de m_2. Cela est d'abord évident pour m_2 impair et se vérifie aisément dans le cas général de

$$m_2 = 2^{\mu} n,$$

en observant qu'alors δ_2 est un diviseur quelconque du nombre impair n et d_2 le produit d'un tel diviseur par 2^{μ}, d'où

$$\sum(2d_2 - \delta_2) = 2^{\mu+1}\zeta_1(n) - \zeta_1(n) = (2^{\mu+1} - 1)\zeta_1(n) = \zeta_1(m_2).$$

Ainsi la formule (η) contient la formule (ζ); mais plus tard on verra qu'elle peut être elle-même singulièrement généralisée.

Notons en passant un second cas particulier digne de remarque que cette formule renferme. On l'obtient en réduisant la fonction $f(x, y)$ à une simple fonction $f(y)$ de la seconde variable y, en supposant, bien entendu,

$$f(-y) = f(y).$$

On a alors l'expression de la différence entre

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}\delta''f(\delta''-2m')$$

et

$$\sum\sum(2d_2-\delta_2)f(2d_2+\delta_2).$$

Cette différence, qui est nulle quand m n'est pas un carré, se trouve, dans le cas contraire, exprimée par

$$f(2\sqrt{m}-1)+3f(2\sqrt{m}-3)+5f(2\sqrt{m}-5)+\ldots+(2\sqrt{m}-1)f(1).$$

De là cette formule qu'il était bon de transcrire :

$$(\theta)\left\{\begin{aligned}&\sum\sum(-1)^{m''-1}\delta''f(\delta''-2m')-\sum\sum(2d_2-\delta_2)f(2d_2+\delta_2)=0,\\&\text{ou }=f(2\sqrt{m}-1)+3f(2\sqrt{m}-3)+\ldots+(2\sqrt{m}-1)f(1),\end{aligned}\right.$$

suivant que m n'est pas ou est un carré.

Je rapprocherai des deux égalités (ζ) et (θ) une autre équation qui offre avec elles beaucoup d'analogie dans la forme et qui se tire de la même source, quoiqu'elle ne soit pas, comme les deux autres, comprise dans la formule (η).

En conservant toutes les notations ci-dessus et la condition de

$$f(-x)=f(x),$$

je considère les deux sommes

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}\delta''f(2^{\alpha''}d''+m'-\delta'')$$

et

$$\sum\sum(2d_2-2m_1-\delta_2)f(2d_2-m_1-\delta_2).$$

Ces deux sommes se trouvent être généralement égales entre elles : il ne peut y avoir exception que quand m est un carré, et alors l'excès de la première sur la seconde s'exprime par

$$f(1-\sqrt{m})+3f(3-\sqrt{m})+5f(5-\sqrt{m})+\ldots+(2\sqrt{m}-1)f(\sqrt{m}-1).$$

Nous aurons donc l'équation ci-après :

$$(\iota)\quad \left\{\begin{array}{l} \quad\sum\sum(-1)^{m''-1}\delta'' f(2^{\alpha''}d''+m'-\delta'') \\ -\sum\sum(2d_2-2m_1-\delta_2)f(2d_2-m_1-\delta_2)=0, \\ \text{ou } = f(1-\sqrt{m})+3f(3-\sqrt{m})+\ldots+(2\sqrt{m}-1)f(\sqrt{m}-1). \end{array}\right.$$

Voici enfin une formule où figureront encore nos deux modes de partition, mais où entrera une fonction $F(x)$ impaire, je veux dire telle, que l'on ait

$$F(-x)=-F(x),$$

pour toutes les valeurs de x employées. Cette formule exprime que les deux sommes

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}F(\delta'')$$

et

$$\sum\sum F(2d_2-2m_1-\delta_2)$$

sont égales entre elles quand m n'est pas un carré, mais, dans le cas contraire, ont une différence exprimée par

$$F(1)+F(3)+F(5)+\ldots+F(2\sqrt{m}-1).$$

On a donc

$$(\varkappa)\quad \left\{\begin{array}{l} \sum\sum(-1)^{m''-1}F(\delta'')-\sum\sum F(2d_2-2m_1-\delta_2)=0, \\ \text{ou } = F(1)+F(3)+F(5)+\ldots+F(2\sqrt{m}-1), \end{array}\right.$$

suivant que m n'est pas ou est un carré; et cette formule est sans contredit une des plus élégantes qui se soient présentées à nous dans le cours de nos recherches.

Mais tous ces résultats partiels sont contenus dans une seule formule, extrêmement générale, où figure une fonction $\mathfrak{F}(x, y, z, t)$ de quatre variables, paire par rapport à x, y, z et impaire par rapport à t, je veux dire remplissant les conditions suivantes :

$$\mathfrak{F}(-x, y, z, t) = \mathfrak{F}(x, -y, z, t) = \mathfrak{F}(x, y, -z, t) = \mathfrak{F}(x, y, z, t)$$

et

$$\mathfrak{F}(x, y, z, -t) = -\mathfrak{F}(x, y, z, t),$$

pour toutes les valeurs des variables dont on aura à faire usage [*]. Considérons, d'une part, la somme

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}\mathfrak{F}(2^{\alpha''}d'' + m', \delta'' - 2m', 2^{\alpha''}d'' + m' - \delta'', \delta''),$$

qui concerne le mode de partition marqué par l'équation

$$m = m'^2 + m'' = m'^2 + 2^{\alpha''}d''\delta'',$$

et, d'autre part, la somme

$$\sum\sum\mathfrak{F}(m_1, 2d_2 + \delta_2, 2d_2 - m_1 - \delta_2, 2d_2 - 2m_1 - \delta_2),$$

qui est au contraire relative à l'autre mode de partition ou à la formule

$$m = m_1^2 + 2m_2 = m_1^2 + 2d_2\delta_2.$$

Désignons par S la différence de ces deux sommes, en sorte que l'on ait

$$(\lambda)\quad \left\{\begin{aligned} S = &\sum\sum(-1)^{m''-1}\mathfrak{F}(2^{\alpha''}d'' + m', \delta'' - 2m', 2^{\alpha''}d'' + m' - \delta'', \delta'') \\ &-\sum\sum\mathfrak{F}(m_1, 2d_2 + \delta_2, 2d_2 - m_1 - \delta_2, 2d_2 - 2m_1 - \delta_2). \end{aligned}\right.$$

Notre théorème porte sur la différence S. Il consiste en ce que la va-

---

[*] Je n'exige pas que l'on ait $\mathfrak{F}(x, y, z, 0) = 0$, parce que, dans la formule que je vais donner, t est essentiellement un entier impair, de manière que l'on n'a jamais $t = 0$.

leur de S est généralement nulle : il n'y a exception que quand m est un carré, et alors S s'exprime par cette suite très-simple

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}(\sqrt{m},\ 2\sqrt{m}-1,\ 1-\sqrt{m},\ 1)+\ldots\ldots\\+&\mathcal{F}(\sqrt{m},\ 2\sqrt{m}-2s+1,\ 2s-1-\sqrt{m},\ 2s-1)+\ldots\ldots\\+&\mathcal{F}(\sqrt{m},\ 1,\ \sqrt{m}-1,\ 2\sqrt{m}-1),\end{aligned}$$

dans le terme général de laquelle s prend les valeurs successives 1, $2,\ldots,\sqrt{m}$. En d'autres termes, on a

$$(\mu)\quad\left\{\begin{aligned}&\mathrm{S}=0,\\ \text{ou }=\ &\mathcal{F}(\sqrt{m},\ 2\sqrt{m}-1,\ 1-\sqrt{m},\ 1)+\mathcal{F}(\sqrt{m},\ 2\sqrt{m}-3,\ 3-\sqrt{m},\ 3)\\&+\mathcal{F}(\sqrt{m},\ 2\sqrt{m}-5,\ 5-\sqrt{m},\ 5)+\ldots+\mathcal{F}(\sqrt{m},\ 1,\ \sqrt{m}-1,\ 2\sqrt{m}-1),\end{aligned}\right.$$

suivant que m n'est pas ou est un carré.

Les équations réunies (λ) et (μ) expriment parfaitement notre théorème. Nous comprenons pourtant qu'on désire le voir écrit dans une seule équation. Nous dirons donc, en résumé, que l'on a

$$(\nu)\quad\left\{\begin{aligned}&\sum\sum(-1)^{m''-1}\mathcal{F}(2^{\alpha''}d''+m',\ \delta''-2m',\ 2^{\alpha''}d''+m'-\delta'',\ \delta'')\\&-\sum\sum\mathcal{F}(m_1,\ 2d_2+\delta_2,\ 2d_2-m_1-\delta_2,\ 2d_2-2m_1-\delta_2)=0,\\ \text{ou }=\ &\mathcal{F}(\sqrt{m},\ 2\sqrt{m}-1,\ 1-\sqrt{m},\ 1)+\mathcal{F}(\sqrt{m},\ 2\sqrt{m}-3,\ 3-\sqrt{m},\ 3)\\&+\mathcal{F}(\sqrt{m},\ 2\sqrt{m}-5,\ 5-\sqrt{m},\ 5)+\ldots+\mathcal{F}(\sqrt{m},\ 1,\ \sqrt{m}-1,\ 2\sqrt{m}-1),\end{aligned}\right.$$

suivant que m n'est pas ou est un carré.

Soit, par exemple, $m=3$. On aura pour le premier mode de partition ces diverses valeurs

$$\begin{aligned}&m'=0,\ 2^{\alpha''}d''=3,\ \delta''=1;\quad m'=0,\quad 2^{\alpha''}d''=1,\ \delta''=3;\\&m'=1,\ 2^{\alpha''}d''=2,\ \delta''=1;\quad m'=-1,\ 2^{\alpha''}d''=2,\ \delta''=1;\end{aligned}$$

qui donneront pour l'expression de la première de nos deux sommes

$$\mathcal{F}(3,\ 1,\ 2,\ 1)+\mathcal{F}(1,\ 3,\ -2,\ 3)-\mathcal{F}(3,\ -1,\ 2,\ 1)-\mathcal{F}(1,\ 3,\ 0,\ 1),$$

ce qui, d'après la nature de la fonction $\mathcal{F}$, se réduit à

$$\mathcal{F}(1, 3, 2, 3) - \mathcal{F}(1, 3, 0, 1).$$

Or pour le second mode de partition l'on a

$$m_1 = 1, \quad d_2 = 1, \quad \delta_2 = 1, \quad m_1 = -1, \quad d_2 = 1, \quad \delta_2 = 1.$$

La seconde somme est donc

$$\mathcal{F}(1, 3, 0, -1) + \mathcal{F}(-1, 3, 2, 3),$$

par suite elle est égale à la première et l'on a bien $S = 0$, vu que

$$\mathcal{F}(-1, 3, 2, 3) = \mathcal{F}(1, 3, 2, 3), \quad \mathcal{F}(1, 3, 0, -1) = -\mathcal{F}(1, 3, 0, 1).$$

Soit à présent $m = 4$. On devra trouver

$$S = \mathcal{F}(2, 3, 1, 1) + \mathcal{F}(2, 1, 1, 3),$$

et c'est en effet ce qui résulte des valeurs de m', $2^{\alpha''}d''$, δ'' et m_1, d_2, δ_2 qui sont ici respectivement

$$\begin{aligned} m' &= 0, \quad 2^{\alpha''}d'' = 4, \quad \delta'' = 1; \\ m' &= \pm 1, \quad 2^{\alpha''}d'' = 3, \quad \delta'' = 1; \\ m' &= \pm 1, \quad 2^{\alpha''}d'' = 1, \quad \delta'' = 3; \end{aligned}$$

et

$$m_1 = 0, \quad d_2 = 2, \quad \delta_2 = 1.$$

La première somme est ainsi

$$\begin{aligned} -\mathcal{F}(4, 1, 3, 1) + \mathcal{F}(4, -1, 3, 1) + \mathcal{F}(2, 3, 1, 1) + \mathcal{F}(2, 1, 1, 3) \\ + \mathcal{F}(0, 5, -3, 3), \end{aligned}$$

ce qui se ramène à

$$\mathcal{F}(2, 3, 1, 1) + \mathcal{F}(2, 1, 1, 3) + \mathcal{F}(0, 5, 3, 3):$$

quant à la seconde somme, elle se réduit ici au seul terme

$$\mathcal{F}(0, 5, 3, 3),$$

et en le retranchant des précédents, on tombe sur la valeur de S indiquée.

La formule contenue dans les deux équations (λ) et (μ) renferme comme cas particuliers toutes celles que nous avons données plus haut.

Pour retrouver la formule (η), il faut supposer la fonction $\mathfrak{F}(x, y, z, t)$ indépendante de z et proportionnelle à t, en un mot faire

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t) = f(x, y)\, t,$$

la fonction $f(x, y)$ étant d'ailleurs telle, que

$$f(-x, y) = f(x, y) = f(x, -y).$$

Cela donne tout d'abord la différence entre les deux séries

$$\sum\sum (-1)^{m''-1} \delta'' f(2^{\alpha''} d'' + m', \delta'' - 2m')$$

et

$$\sum\sum (2d_2 - 2m_1 - \delta_2) f(m_1, 2d_2 + \delta_2),$$

laquelle se trouve être zéro quand m n'est pas un carré, tandis que lorsque m est un carré, cette différence s'exprime par

$$f(\sqrt{m}, 2\sqrt{m} - 1) + 3f(\sqrt{m}, 2\sqrt{m} - 3) + \ldots + (2\sqrt{m} - 1) f(\sqrt{m}, 1).$$

Il est clair que ce résultat coïncidera avec la formule (η) s'il est prouvé que

$$\sum\sum m_1 f(m_1, 2d_2 + \delta_2) = 0.$$

Or cette dernière équation résulte de ce double fait que l'on a

$$f(-x, y) = f(x, y)$$

et que les valeurs de m_1 qui ne sont pas nulles sont deux à deux égales et de signes contraires.

Pour retrouver la formule (ι), on supposera $\mathfrak{F}(x, y, z, t)$ indépendante de x, y et toujours proportionnelle à t, en sorte que

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t) = f(z)\, t,$$

sous la condition, bien entendu, que

$$f(-z) = f(z).$$

Enfin, pour retrouver la formule ($\varkappa$), on réduira $\mathfrak{F}(x, y, z, t)$ à une simple fonction de t, naturellement impaire, c'est-à-dire on fera

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t) = \mathrm{F}(t),$$

sous la condition de

$$\mathrm{F}(-t) = -\mathrm{F}(t).$$

On pourrait ajouter de nouveaux cas particuliers à ceux que nous venons de rappeler; mais la formule générale est assez simple pour que nous renoncions à insister là-dessus.

Nous n'entrerons non plus dans aucun détail sur le parti qu'on peut tirer des formules de cet article, soit dans la théorie des fonctions numériques, soit dans celle des suites infinies. Nous n'avons en ce moment pour objet que d'indiquer, sans les développer, nos principaux résultats. D'ailleurs, après ce qu'on a vu dans les articles précédents, les applications s'offriront d'elles-mêmes au lecteur.