JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-N. HATON DE LA GOUPILLIÈRE

Des centres de courbure successifs

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 4 (1859), p. 183-193.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4__183_0>

DES
CENTRES DE COURBURE SUCCESSIFS;

Par J.-N. HATON DE LA GOUPILLIÈRE,
Ingénieur des Mines, Répétiteur à l'École Polytechnique,
Docteur ès Sciences mathématiques.

1. De même que l'on déduit d'une courbe proposée une autre ligne qu'on appelle sa développée, de même on peut former la développée de la développée, et ainsi de suite indéfiniment. On obtient de cette manière pour un point donné, un premier, un second, un troisième... centres de courbure. De là deux questions distinctes : ou bien chercher pour tous les points de la courbe le lieu des centres de courbure d'un ordre déterminé quelconque k, c'est-à-dire sa $k^{ième}$ développée; ou bien pour un point assigné arbitrairement sur cette courbe envisager toute la série de ses centres de courbure des divers ordres. Cette dernière question est celle que nous nous proposerons ici. La première a été résolue depuis longtemps par une méthode très-simple que je dois rappeler brièvement afin de bien fixer l'interprétation des signes.

2. Nous supposerons la courbe représentée par une équation entre le rayon de courbure ρ et l'angle de contingence ω. Un arc élémentaire de la première développée a pour valeur $d\rho$ d'après la propriété fondamentale de ces courbes. D'autre part, l'angle de ses normales extrêmes est le même que celui $d\omega$ de la proposée, car ces droites sont respectivement parallèles aux tangentes de cette dernière. Si donc ρ_1 est la longueur de ces normales, on aura l'égalité

$$d\rho = \rho_1 d\omega, \quad \rho_1 = \frac{d\rho}{d\omega},$$

qui donne la valeur du rayon de courbure de la développée, c'est-à-dire l'équation de cette courbe entre les mêmes variables.

Pour l'interprétation du signe de cette expression, il suffira au lecteur de tracer deux arcs de courbe. Si l'on suppose d'abord la courbure croissante dans le sens où augmente ω, ρ_1 se trouve porté parallèlement à l'arc élémentaire et dans le sens même de cet arc; mais alors ρ diminue et sa dérivée ρ_1 est négative. Si au contraire la courbure diminue, ρ_1 est dirigé dans le sens opposé à celui de l'arc; mais dans ce cas, ρ augmente et sa dérivée ρ_1 est positive. De là la règle suivante : Le rayon de la développée se porte dans le sens de l'arc ou en sens contraire suivant qu'il est négatif ou positif.

3. De l'équation précédente on conclut immédiatement celle d'une développée quelconque

$$\rho_k = \frac{d^k\rho}{d\omega^k}.$$

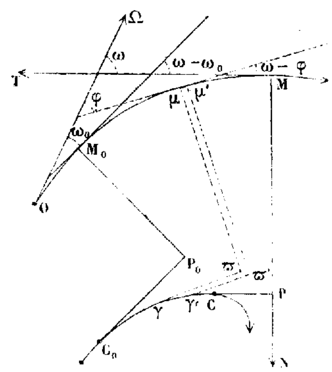
La règle précédente montre que si tous les rayons sont positifs entre ρ et ρ_k, leur série forme un polygone dont tous les angles sont droits, et qui tourne constamment dans le même sens, que je suppose direct pour fixer les idées. Si donc nous laissons le signe de chacune des dérivées implicitement compris dans son expression, nous devrons prendre pour le rayon qui joint les centres k et $k+1$ suivant la double parité de k le sens suivant :

$4i$ parallèle à la normale et de même sens,
$4i+1$ parallèle à la tangente et de sens contraire,
$4i+2$ parallèle à la normale et de sens contraire,
$4i+3$ parallèle à la tangente et de même sens.

4. Actuellement je prends le point quelconque considéré M comme origine, et j'y trace deux axes rectangulaires, l'un MN suivant la normale, l'autre MT en sens contraire de la tangente. Je leur rapporterai le centre C d'ordre quelconque k par deux coordonnées T et N. Enfin je forme la figure correspondante $M_0P_0C_0$ pour un point fixe quelconque M_0 et j'imagine l'arc CC_0 de la $k^{ième}$ développée qui relie les deux centres.

Nous obtenons par là un hexagone mixtiligne $PMM_0P_0C_0C$ dont la résultante $T = PC$ sera la somme des projections sur la tangente des quatre derniers côtés, car le premier lui est perpendiculaire. Si donc on désigne par de petites lettres les projections des grandes lettres de

Fig. 1.



la figure, on aura, en mettant les signes en évidence,

$$T = mm_0 - m_0 p_0 + p_0 c_0 - cc_0.$$

Reste à calculer les valeurs absolues de ces projections.

On a d'abord

$$p_0 c_0 = T_0 \cos(\omega - \omega_0), \quad m_0 p_0 = N_0 \sin(\omega - \omega_0).$$

Pour évaluer mm_0, envisageons l'élément $\mu\mu'$ qui correspond à l'angle φ variable de ω_0 à ω. Il a pour longueur $\rho\, d\varphi$ en substituant φ à ω dans l'expression générale de ρ tirée de l'équation de la courbe. Sa projection sera donc $\rho\, d\varphi \cos(\omega - \varphi)$ ou $\rho\, d\varphi \cos(\varphi - \omega)$. On a par suite

$$mm_0 = \int_{\omega_0}^{\omega} \rho \cos(\varphi - \omega)\, d\varphi.$$

L'arc CC_0 est composé d'éléments $\gamma\gamma'$ qui correspondent à $\mu\mu'$ et ont pour valeur $\rho_k d\varphi$. Comme ils leur sont respectivement parallèles, on aura pour la projection cc_0 l'expression semblable à la précédente

$$cc_0 = \int_{\omega_0}^{\omega} \rho_k \cos(\varphi - \omega)\, d\varphi.$$

Mais il faut placer ici une remarque essentielle.

5. La figure a été faite pour l'hypothèse $k = 4i$. Si k restant pair est de la forme $4i + 2$, l'arc $\gamma\gamma'$ est encore parallèle à $\mu\mu'$; mais CC_0 se trouve au point C_0 en prolongement de P_0C_0 au lieu d'être en rebroussement; cc_0 doit donc être changé de signe. Si k devient impair, $\gamma\gamma'$ est perpendiculaire à $\mu\mu'$, et le cosinus doit être remplacé par un sinus. Pour $4i + 1$, C_0C se trouve entre la courbe et PC, et il faut prendre le sinus négativement; pour $4i + 3$, il est de l'autre côté de PC, et le sinus est positif.

En résumé, le cosinus de l'expression de cc_0 doit être remplacé par les valeurs

$$\cos(\varphi - \omega), \quad -\sin(\varphi - \omega), \quad -\cos(\varphi - \omega), \quad \sin(\varphi - \omega),$$

suivant que k est de la forme

$$4i, \quad 4i + 1, \quad 4i + 2, \quad 4i + 3.$$

Or ces quatre changements peuvent être compris dans la formule unique

$$\cos\left(\varphi - \omega + \frac{k\pi}{2}\right),$$

de sorte que l'expression générale de cc_0 sera

$$cc_0 = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d^k\rho}{d\varphi^k} \cos\left(\varphi - \omega + \frac{k\pi}{2}\right) d\varphi.$$

Il vient ainsi en définitive pour l'expression de T

$$(1) \qquad \begin{aligned} T = {} & T_0 \cos(\omega - \omega_0) - N_0 \sin(\omega - \omega_0) \\ & - \int_{\omega_0}^{\omega} d\varphi \left\{ \frac{d^k\rho}{d\varphi^k} \cos\left(\varphi - \omega + \frac{k\pi}{2}\right) - \rho\cos(\varphi - \omega) \right\}. \end{aligned}$$

6. Pour obtenir en second lieu la valeur de N, il suffira de projeter l'hexagone mixtiligne sur la normale. En conservant les mêmes minuscules pour désigner les nouvelles projections et mettant les signes en évidence, nous aurons cette fois-ci

$$N_0 = mm_0 + m_0p_0 + p_0c_0 - cc_0.$$

Les valeurs absolues de ces projections sont maintenant

$$p_0 c_0 = \mathrm{T}_0 \sin(\omega - \omega_0), \quad m_0 p_0 = \mathrm{N}_0 \cos(\omega - \omega_0).$$

Pour mm_0 il faut remplacer $\cos(\omega - \varphi)$ par $\sin(\omega - \varphi)$ ou $-\sin(\varphi - \omega)$, ce qui donne

$$mm_0 = -\int_{\omega_0}^{\omega} \rho \sin(\varphi - \omega)\, d\varphi,$$

et de même

$$cc_0 = -\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d^k \rho}{d\varphi^k} \sin\left(\varphi - \omega + \frac{k\pi}{2}\right) d\varphi.$$

On aura par suite, pour la seconde coordonnée N,

$$(2) \quad \begin{aligned} \mathrm{N} &= \mathrm{T}_0 \sin(\omega - \omega_0) + \mathrm{N}_0 \cos(\omega - \omega_0) \\ &+ \int_{\omega_0}^{\omega} d\varphi \left\{ \frac{d^k \rho}{d\varphi^k} \sin\left(\varphi - \omega + \frac{k\pi}{2}\right) - \rho \sin(\varphi - \omega) \right\}. \end{aligned}$$

7. Ces formules générales déterminent la position d'un centre quelconque d'après la valeur de k, qui s'y trouve en évidence (*). Si l'on veut se représenter d'une manière simple la disposition d'ensemble de leur série tout entière, le plus commode sera d'y faire passer une courbe. Il sera facile d'y retrouver après coup la position des divers centres, car il suffira pour cela d'inscrire un polygone dont tous les angles soient droits. La question est bien entendu indéterminée, puisque par cette série discontinue de points on peut mener une infinité de courbes; mais on trouvera très-simplement une solution en éliminant k entre les équations (1) et (2).

L'équation résultante renfermera alors T et N à titre de coordonnées courantes, et ω comme un paramètre qui caractérise le point de la courbe qui a été considéré, et fournit par sa variation toute une fa-

(*) Pour qu'on ne rencontre pas de difficultés dans leur application, il faut que la différentielle ne devienne pas infinie dans les limites de l'intégrale, ou que la courbe et sa $k^{ième}$ développée ne présentent pas de rebroussements entre M et M_0; condition facile à remplir, puisque M_0 est un point choisi arbitrairement.

mille de lieux des centres; ω_0, N_0, T_0 sont des constantes absolues, qui se rapporteront en général à un point singulier où l'évaluation de N_0 et T_0 soit facile. Quant à k et φ, ils n'entrent plus, car k a été éliminé, et φ est un symbole d'intégration qui disparaît quand on prend l'intégrale entre ses limites.

8. *Application.* — Pour montrer une application de cette méthode, je considérerai la spirale logarithmique. Il est facile d'abord d'en trouver l'équation. Lorsque l'azimuth croît en progression arithmétique, le rayon vecteur croît en progression géométrique. Mais l'angle μ de la normale et du rayon vecteur étant constant, l'azimuth et l'angle de contingence varient ensemble des mêmes quantités. On sait, de plus, que le rayon de courbure est proportionnel au rayon vecteur. On a, d'après cela,

$$\rho = e^{m\omega}, \quad \rho_k = \frac{d^k\rho}{d\omega^k} = m^k e^{m\omega},$$

m désignant la tangente de l'angle μ, et l'origine étant placée au point où le rayon de courbure est l'unité.

Quant au point arbitraire M_0, nous le prendrons au pôle en faisant $\omega_0 = -\infty$. On y a alors, quel que soit k, $\rho_k = 0$, et par suite, $N_0 = 0$, $T_0 = 0$. Les formules générales se réduisent par là au terme qui contient l'intégrale définie

$$T = -\int_{-\infty}^{\omega} e^{m\varphi}\left\{ m^k \cos\left(\varphi - \omega + \frac{k\pi}{2}\right) - \cos(\varphi - \omega)\right\} d\varphi,$$

$$N = +\int_{-\infty}^{\omega} e^{m\varphi}\left\{ m^k \sin\left(\varphi - \omega + \frac{k\pi}{2}\right) - \sin(\varphi - \omega)\right\} d\varphi.$$

9. Ces intégrales sont dans tous les traités, et je les prends de suite entre leurs limites. On voit que pour la limite inférieure toutes s'évanouissent comme contenant en facteur $e^{-\infty}$ avec des coefficients trigonométriques à la vérité indéterminés, mais nécessairement inférieurs à l'unité. Pour la limite supérieure $\varphi = \omega$, ω disparaît en même temps que φ des lignes trigonométriques, et ne subsiste plus que dans l'exponentielle. Il reste seulement $\frac{k\pi}{2}$ pour le premier arc et zéro pour le second. On a ainsi

$$\mathrm{T} = -\frac{e^{m\omega}}{m^2+1}\left\{m^k\left(m\cos\frac{k\pi}{2}+\sin\frac{k\pi}{2}\right)-m\right\},$$

$$\mathrm{N} = +\frac{e^{m\omega}}{m^2+1}\left\{m^k\left(m\sin\frac{k\pi}{2}-\cos\frac{k\pi}{2}\right)+1\right\};$$

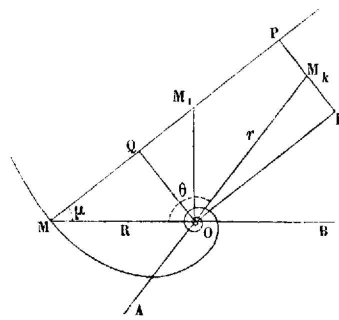
ce que j'écris de la manière suivante :

$$\frac{m}{m^2+1}e^{m\omega} - \mathrm{T} = \frac{e^{m\omega}}{m^2+1}\cdot m^k\left(m\cos\frac{k\pi}{2}+\sin\frac{k\pi}{2}\right),$$

$$\mathrm{N} - \frac{1}{m^2+1}e^{m\omega} = \frac{e^{m\omega}}{m^2+1}\cdot m^k\left(m\sin\frac{k\pi}{2}-\cos\frac{k\pi}{2}\right).$$

Interprétons géométriquement ces résultats : soit M_k le centre quel-

Fig. 2.



conque rapporté au point M par ses coordonnées

$$\mathrm{T} = \overline{\mathrm{PM}}_k,\quad \mathrm{N} = \overline{\mathrm{MP}}.$$

Le premier centre de courbure M_1 s'obtient en élevant OM_1 perpendiculaire sur MO, et l'on a

$$\overline{\mathrm{MM}}_1 = \rho = e^{m\omega};$$

d'où

$$\frac{e^{m\omega}}{\sqrt{m^2+1}} = \overline{\mathrm{MM}}_1\cos\mu = \overline{\mathrm{MO}},$$

et, par suite, d'une part,

$$\frac{1}{m^2+1}e^{m\omega} = \overline{\mathrm{MO}}\cos\mu = \overline{\mathrm{MQ}}.$$

$$\mathrm{N} - \frac{1}{m^2+1}e^{m\omega} = \overline{\mathrm{MP}} - \overline{\mathrm{MQ}} = \overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{OR}};$$

et, d'autre part,

$$\frac{m}{m^2+1}e^{m\omega} = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\cdot\frac{e^{m\omega}}{\sqrt{m^2+1}} = \overline{\mathrm{MO}}\,.\sin\mu = \overline{\mathrm{OQ}} = \overline{\mathrm{PR}}$$

$$\frac{m}{m^2+1}e^{m\omega} - \mathrm{T} = \overline{\mathrm{PR}} - \overline{\mathrm{PM}}_k = \overline{\mathrm{RM}}_k.$$

Nos formules deviennent par là

$$\mathrm{RM}_k = \frac{\overline{\mathrm{MO}}}{\sqrt{m^2+1}}\cdot m^k\left(m\cos\frac{k\pi}{2} + \sin\frac{k\pi}{2}\right),$$

$$\overline{\mathrm{OR}} = \frac{\overline{\mathrm{MO}}}{\sqrt{m^2+1}}\cdot m^k\left(m\sin\frac{k\pi}{2} - \cos\frac{k\pi}{2}\right),$$

et l'élimination de k va s'effectuer facilement.

10. On tire d'abord de là, en divisant membre à membre,

$$-\frac{\overline{\mathrm{RM}}_k}{\overline{\mathrm{OR}}} = \frac{m\cos\frac{k\pi}{2} + \sin\frac{k\pi}{2}}{\cos\frac{k\pi}{2} - m\sin\frac{k\pi}{2}} = \frac{\operatorname{tang}\mu + \operatorname{tang}\frac{k\pi}{2}}{1 - \operatorname{tang}\mu\operatorname{tang}\frac{k\pi}{2}} = \operatorname{tang}\left(\mu + \frac{k\pi}{2}\right),$$

et, par suite,

$$k = \frac{2}{\pi}\left\{\operatorname{arc\,tang}\left(-\frac{\overline{\mathrm{RM}}_k}{\overline{\mathrm{OR}}}\right) - \mu\right\} = \frac{2}{\pi}\left(\widehat{\mathrm{ROA}} - \widehat{\mathrm{ROB}}\right) = \frac{2}{\pi}\widehat{\mathrm{MOM}}_k,$$

ou en représentant par θ l'azimut $\widehat{\mathrm{MOM}}_k$,

$$k = \frac{2}{\pi}\theta.$$

On a d'autre part, en ajoutant les carrés,

$$\overline{\mathrm{RM}_k}^2 + \overline{\mathrm{OR}}^2 = \overline{\mathrm{MO}}^2 . m^{2k}.$$

Mais on a aussi

$$\overline{\mathrm{RM}_k}^2 + \overline{\mathrm{OR}}^2 = \overline{\mathrm{OM}_k}^2 ;$$

si donc on appelle r le rayon vecteur $\overline{\mathrm{OM}_k}$ et R la constante $\overline{\mathrm{MO}}$, on aura

$$r^2 = \mathrm{R}^2 . m^{2k};$$

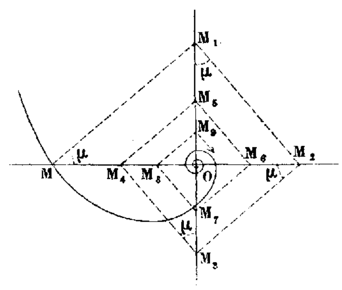
d'où en extrayant la racine et substituant à k la valeur précédente,

$$r = \mathrm{R} . m^{\frac{2}{\pi}\theta}.$$

On voit par là que toute la série des centres de courbure du point M est distribuée le long d'une autre spirale logarithmique que j'appellerai la *spirale-lieu*, pour la distinguer de la proposée.

11. La simplicité de ce résultat mérite qu'on l'établisse directement en se fondant sur les propriétés de la spirale. Le centre de courbure M_1 du point quelconque M s'obtient en élevant sur le rayon vecteur OM la perpendiculaire OM_1 jusqu'à la normale MM_1. Comme du reste

Fig. 3.



la développée est encore une spirale, son centre M_2 s'obtiendra de même en élevant sur son rayon vecteur OM_1 la perpendiculaire OM_2 jusqu'à sa normale $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$. Mais OM_2 se trouve en prolongement de OM. De même OM_3 continuera OM_1, et ainsi de suite.

De là ce premier résultat, encore plus simple que le précédent : tous les centres de courbure d'un point d'une spirale logarithmique sont disposés sur les deux branches d'une croix rectangulaire qui a son centre au pôle et une de ses droites suivant le rayon vecteur. On obtiendra donc, de la manière la plus claire, tous les centres par l'intersection de cette croix et de la spirale-lieu, qu'il nous faut encore retrouver par cette voie.

12. Rapportons pour cela le lieu à des coordonnées polaires (r, θ) dont O soit le pôle et OM l'axe polaire. On aura, d'une part,

$$\theta = \frac{k\pi}{2},$$

et, d'autre part, dans un triangle rectangle quelconque $OM_k M_{k-1}$ formé par un rayon de courbure et les deux branches de la croix rectangulaire,

$$r_k = r_{k-1} \operatorname{tang} \mu = m r_{k-1}.$$

On tire de là, de proche en proche,

$$r_k = m^k . \mathrm{R},$$

car r_0 n'est autre que R. Si maintenant on élimine k entre ces deux relations, on retrouve l'équation précédente

$$r = \mathrm{R} . m^{\frac{2\theta}{\pi}}$$

13. D'après la forme de cette équation, on voit que la spirale proposée et la spirale-lieu ont même pôle, et qu'elles auront ou non même sens, suivant que μ sera supérieur ou inférieur à 45 degrés, ou que la proposée s'ouvre rapidement ou lentement. Pour la spirale de 45 degrés, le lieu se réduit à un cercle, et les centres sont seulement au nombre de quatre disposés en carré et se reproduisant périodiquement.

L'angle μ' de la spirale-lieu sera donné par sa tangente

$$m' = \frac{\pi}{2 \log \text{hyp.}\, m};$$

cette valeur est indépendante de ω; ce qui établit ce résultat remarquable, que toutes les spirales-lieu sont identiques pour les divers points d'une spirale proposée. On les obtiendrait donc toutes successivement par la rotation de l'une d'elles autour du pôle. On voit même que, dans une quelconque de ses positions, la spirale mobile forme la spirale-lieu de la proposée pour tous les points où elle la rencontre; de telle sorte qu'il suffit d'un seul tour pour avoir égard à toutes les spires de la proposée.

14. Si l'on veut connaître la spirale logarithmique qui sera identique à sa spirale-lieu, il suffit de faire dans la dernière équation $m' = m$; elle donne alors

$$m \log m = \frac{\pi}{2}.$$

Cette équation a été déjà étudiée, comme conduisant à trouver une spirale qui soit sa propre développée. Il est naturel, d'après cela, qu'elle fournisse la solution que nous cherchions. Comme le sens des deux spirales est le même, puisqu'elles coïncident, on prévoit que l'angle μ doit se trouver dans la seconde moitié du quadrant; il est, en effet, d'environ 75 degrés.