JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

POINSOT

Sur la manière de ramener à la dynamique des corps libres, celle des corps qu'on suppose gênés par des obstacles fixes

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 4 (1859), p. 171-182.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4__171_0>

SUR

LA MANIÈRE DE RAMENER A LA DYNAMIQUE DES CORPS LIBRES, CELLE DES CORPS QU'ON SUPPOSE GÊNÉS PAR DES OBSTACLES FIXES;

PAR M. POINSOT.

1. Nous n'avons considéré jusqu'ici que des corps parfaitement libres. Mais en mécanique on considère souvent des corps qui n'ont d'autre liberté que celle de tourner sur quelque point ou axe fixe, ou de glisser sur un plan *inébranlable*, etc.; et l'on pourrait croire que dans cette nouvelle hypothèse la solution des problèmes demande de nouveaux principes. Mais on va voir que les précédents nous suffisent, et que notre théorie s'applique de la manière la plus directe, et même la plus *naturelle* à ces cas singuliers où l'on suppose quelque obstacle fixe qui gêne les mouvements du corps.

2. Et en effet, il n'y a dans la nature aucun corps fixe. Un point qu'on appelle *fixe*, n'est au fond qu'un point invariablement attaché à quelque corps dont la masse est très-grande, et regardée comme infinie par rapport à celle du mobile que l'on considère. On peut donc toujours concevoir, à la place de ce point qu'on appelle *fixe*, un point vraiment *libre*, mais qui serait chargé d'une masse infinie; ou, pour s'en faire une image plus nette, un point dans lequel on supposerait qu'une quantité infinie de matière se trouve pour ainsi dire concentrée.

De cette manière, au lieu d'un corps de figure quelconque et de masse finie M, mobile autour d'un point I qu'on suppose *fixe*, on n'aura plus à considérer qu'un système *libre* composé de ce même corps M et d'un point matériel μ qui lui est attaché en I, et dont la masse μ est infinie par rapport à M.

3. Il est évident que dans un tel corps ou système le centre de gravité g tombe infiniment près du point I, et que ce centre, étant

chargé de la masse infinie $\mu + M$, ne peut recevoir qu'un mouvement infiniment petit par l'action des forces finies qu'on y supposerait appliquées. Ce centre de gravité g reste donc immobile sous l'action de ces forces, et fait, à proprement parler, ce que nous nommons un point fixe.

4. Mais si la *force d'inertie* du système, c'est-à-dire la *masse* $M + \mu$, est infinie, le *moment d'inertie* ne l'est point. Ce moment, autour d'un axe mené par le centre g, a une valeur finie; et cette valeur, comme on va le voir, est exactement la même que si l'on prenait le moment d'inertie du simple corps proposé M autour du même axe. Si donc, en considérant toutes les forces appliquées au système comme transportées parallèlement à elles-mêmes au centre de gravité g, on trouve que ce centre reste immobile sous l'action de ces forces, à cause de la masse infinie $M + \mu$ dont il est chargé, on voit que le corps ne restera point immobile sous l'effort des *couples* qui naissent de cette translation, mais qu'il prendra une rotation finie θ autour du centre g, à cause de la valeur finie de son moment d'inertie relatif aux axes qui passent en ce point.

Il y a donc lieu de proposer des questions dynamiques relatives à un corps forcé de tourner sur un point fixe; et pour les résoudre, il suffit d'appliquer les solutions trouvées pour un corps libre, mais avec cette attention de regarder le point fixe comme étant le centre de gravité du corps, de supposer à ce corps une masse infinie, et de donner à son moment d'inertie la vraie valeur finie qu'il doit avoir, et que nous allons déterminer.

5. Supposons d'abord, pour plus de clarté, que ce point matériel, que nous attachons en I au corps proposé M, n'ait qu'une certaine masse finie μ; cherchons le moment d'inertie du système autour du centre de gravité g, et voyons ensuite ce que devient l'expression $(\mu + M)K^2$ de ce moment quand on fait μ infinie.

6. Soit G le centre de gravité du simple corps M; et faisons la ligne $IG = d$. Si l'on coupe cette ligne au point g en deux parties i et $d - i$ réciproques aux masses M et μ, on aura le centre de gravité g du système; et pour les distances de ce point à I et

à G,

$$i = d\,\frac{M}{\mu + M}, \quad d - i = d\,\frac{\mu}{\mu + M}.$$

Or le moment d'inertie du point massif μ autour du centre g est évidemment μi^2 : celui du corps M, relatif au même point, est composé, 1° de son moment d'inertie autour de son propre centre de gravité G, et que je désigne par MD^2 ; 2° du produit $M(d - i)^2$ de la masse de ce corps par le carré de la distance $(d - i)$ de son centre au point g. En ajoutant ces valeurs on aura donc, pour le moment d'inertie du système, représenté par $(\mu + M)K^2$,

$$(\mu + M)K^2 = \mu i^2 + M(d - i)^2 + MD^2,$$

d'où, en mettant pour i sa valeur précédente, on tire

$$(\mu + M)K^2 = M\left(D^2 + \frac{d^2}{1 + \frac{M}{\mu}}\right).$$

Actuellement, supposons que la masse μ augmente depuis zéro jusqu'à l'infini; on voit que le moment d'inertie augmente depuis MD^2, qui est sa valeur la plus petite, jusqu'à $M(D^2 + d^2)$, qui est sa valeur la plus grande : de sorte qu'en faisant $\mu = \infty$, afin de passer à l'hypothèse mathématique d'un point fixe dans le corps M, on a

$$(\mu + M)K^2 = M(D^2 + d^2);$$

ce qui est précisément la même valeur que si l'on eût pris le moment d'inertie du simple corps M autour du point I.

7. Le moment d'inertie du système ayant donc une valeur finie, il est clair que si ce moment est représenté à la manière ordinaire par le produit $(\mu + M)K^2$, la ligne K qui représente le *bras de l'inertie* doit être regardée comme *nulle*, à cause de la masse $(\mu + M)$ égale à l'infini. Cependant il est bon de remarquer que cette ligne infiniment petite K est infiniment grande par rapport à la distance i du point I au centre de gravité g du système. Il en est de cette ligne K à l'égard de la seconde i, comme du sinus d'un arc infiniment petit à l'égard de son sinus versé. Si l'on compare, en effet, l'expression de K^2, qui est

$$K^2 = \frac{\mu M \left[d^2 + D^2 \left(1 + \frac{M}{\mu} \right) \right]}{(\mu + M)^2},$$

à celle de i^2, qui est

$$i^2 = d^2 \, \frac{M^2}{(\mu + M^2)},$$

on trouve

$$\frac{K^2}{i^2} = \frac{\mu}{M} \cdot \frac{d^2 + D^2 \left(1 + \frac{M}{\mu} \right)}{d^2},$$

d'ou résulte, en faisant $\mu = \infty$,

$$\frac{K^2}{i^2} = \infty\,;$$

et par conséquent K infiniment grand par rapport à i.

D'un autre côté il faut remarquer que la quantité $\frac{K^2}{i}$, qui en géométrie représente une ligne, ne répond point ici à une ligne infinie, mais à une certaine ligne terminée l. Car en multipliant les deux nombres de l'équation précédente par i, et mettant dans le second membre, au lieu de i, sa valeur $d\,\frac{M}{\mu + M}$, on trouve

$$\frac{K^2}{i} = \frac{d^2 + D^2 \left(1 + \frac{M}{\mu} \right)}{d \left(1 + \frac{M}{\mu} \right)};$$

d'où, en faisant $\mu = \infty$, on tire

$$\frac{K^2}{i} = \frac{d^2 + D^2}{d} = d + \frac{D^2}{d} = l,$$

ce qui est l'expression de la ligne IC qui va du point I au *centre* C *d'oscillation* du corps M autour de ce point I.

8. On voit par là que le même point C qui est réciproque au point I dans le simple corps M, est aussi réciproque à I dans le système composé du même corps M et du point matériel de masse infinie μ placé en I. Si donc on suppose que le système est frappé en I à la distance infiniment petite i du centre g, soit à gauche, soit à droite de ce point g, le centre spontané de rotation se trouvera de l'autre côté, en C, à une distance finie $l = d + \frac{D^2}{d}$. Or maintenant, quelque petite que soit cette distance i du point I au centre g, on peut toujours concevoir entre ces deux points un autre point O dont la distance x au point g soit infiniment petite par rapport à i, et par conséquent telle, que l'expression $\frac{K^2}{x}$ soit infiniment grande par rapport à $\frac{K^2}{i}$; donc, puisque celle-ci répond à une ligne terminée l, l'autre $\frac{K^2}{x}$ répondra à une ligne infinie : de sorte que le centre spontané C' correspondant au centre de percussion O sera à une distance infinie du centre de gravité g. Lors donc que dans nos formules nous trouverons l'expression $\frac{K^2}{x}$, où nous aurons à faire la variable *indépendante* x égale à *zéro*, il faudra prendre $\frac{K^2}{x} = \infty$, bien que l'expression semblable $\frac{K^2}{i}$ réponde à une ligne *finie* l lorsque la variable i, *dépendante* de K, devient aussi égale à zéro.

9. Ainsi il faut bien se garder de confondre en dynamique cette ligne infiniment petite K, qui représente le bras d'inertie du système, avec la ligne infiniment petite i, qui marque la distance du centre de gravité g au point massif μ attaché en I, quoique ces deux lignes deviennent également *nulles* dans notre hypothèse de $\mu = \infty$. Il faut aussi bien distinguer les vraies valeurs des expressions $\frac{K^2}{i}$ et $\frac{K^2}{x}$, dont la première, où i et K sont toutes deux variables avec μ, donne une ligne *finie* $l = d + \frac{D^2}{d}$, tandis que l'autre $\frac{K^2}{x}$, où x est indépendante de μ, donne une ligne *infinie* dans le cas de $x = 0$. Ces distinctions délicates sont aussi nécessaires en dynamique qu'en analyse; car pour peu qu'on les néglige, on s'expose à tomber dans des erreurs grossières.

10. Pour en donner un exemple, supposons que notre système ayant reçu l'impulsion d'un couple donné N, on demande avec quelle force Q le corps frapperait un point fixe T qu'on viendrait à lui présenter à une distance quelconque x du centre de gravité g. Nous avons démontré ailleurs qu'on aura pour la grandeur Q de cette percussion

$$Q = N\frac{x}{K^2 + x^2},$$

et que le maximum de Q se trouve au point T qui répond à la distance $x = K$, c'est-à-dire à l'extrémité du bras K de l'inertie du système. Or, comme cette ligne K est ici *nulle*, on pourrait conclure que le centre T de la percussion maximum se confond avec le centre de gravité g : ce qui serait en dynamique une erreur très-grande; car il est aisé de voir qu'au point g la percussion est entièrement nulle, tandis qu'au point T, quoique infiniment proche de g, la percussion est infinie.

Et en effet l'expression

$$Q = N\frac{x}{x^2 + K^2} = N\frac{1}{x + \frac{K^2}{x}}$$

devient pour $x = 0$

$$Q = N\frac{1}{0 + \infty} = 0,$$

comme il est évident d'ailleurs que cela doit être, puisque le système tourne réellement sur son centre g et ne peut ainsi causer aucune percussion par ce point.

Mais en faisant $x = K$, l'expression devient

$$Q = N\frac{1}{2K};$$

laquelle, en prenant pour K sa valeur qui est ici *nulle*, devient

$$Q = N\frac{1}{0} = \infty.$$

11. De même, si le corps, au lieu d'être animé par un couple N, avait reçu l'impulsion d'une simple force P passant à une distance donnée δ du centre g, auquel cas la percussion Q dont le corps serait capable à une distance quelconque x de ce même centre aurait pour expression

$$Q = P \frac{K^2 + \delta x}{K^2 + x^2},$$

on pourrait conclure que le centre T de la percussion maximum, qui se trouve à la distance

$$x = -\frac{K^2}{\delta} \pm \sqrt{K^2 + \frac{K^4}{\delta^2}},$$

se confond ici, à cause de $K = 0$, avec le centre de gravité g : ce qui serait une erreur de doctrine toute semblable à la précédente.

Car au point g, c'est-à-dire quand on a $x = 0$, la percussion Q est actuellement égale à la force P, tandis qu'au point T, qui répond à la valeur précédente de x, on a une percussion Q *infinie*.

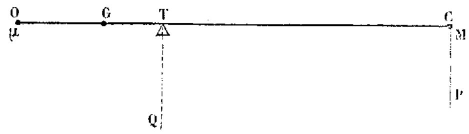
12. Au reste, pour se faire des idées plus nettes et pour éviter toute erreur dans les applications, il vaudra toujours mieux supposer que la masse μ n'est point infinie, mais seulement très-grande, et conserver ainsi cette lettre μ dans toutes les expressions de notre analyse. Toutes les quantités seront alors bien distinctes, et l'on pourra voir leurs vraies valeurs mathématiques dans l'hypothèse de $\mu = \infty$. Cette manière de voir, en supposant μ non pas infinie, mais seulement très-grande, est d'ailleurs plus conforme à la nature, car en réalité il n'existe pas de corps ni de point dont la masse soit infinie; cette supposition n'est pas moins imaginaire que celle d'un point fixe. Tout ce qu'on voit de réel, c'est qu'un corps, tel qu'un levier par exemple, peut très-bien s'appuyer par un de ses points contre un autre corps dont la masse est très-grande et dont le mouvement, en vertu des forces appliquées, sera très-petit et comme insensible par rapport à celui que prendra le mobile que l'on considère.

Mais il ne sera peut-être pas inutile d'éclaircir encore ces points de doctrine par quelques applications numériques.

13. Soit CO une verge immatérielle chargée à ses bouts C et O de deux points massifs M et μ. Si la verge est frappée en C avec une force

P, on demande la percussion Q que cette verge roide peut causer sur un point T pris à la distance $GT = x$ du centre de gravité G du système des deux masses μ et M.

EXEMPLE.



Le moment d'inertie du système autour de son centre G sera, en faisant $GO = i$, $GC = l - i$ (l étant la longueur CO),

$$(M + \mu) K^2 = \mu i^2 + M(l - i)^2,$$

K désignant le bras de l'inertie; or on a

$$i = l.\frac{M}{M+\mu}, \quad l - i = l\frac{\mu}{M+\mu};$$

donc

$$(M + \mu) K^2 = l^2.\frac{\mu M^2 + M\mu^2}{(M+\mu)^2} = l^2 \frac{\mu M}{M+\mu};$$

d'où l'on tire

$$K^2 = l^2.\frac{\mu M}{(M+\mu)^2} = i.(l - i).$$

La percussion Q causée en T, à la distance x de G, est exprimée par

$$Q = P.\frac{K^2 + x(l - i)}{K^2 + x^2};$$

si l'on cherche la valeur de x qui répond au maximum de la percussion Q, et qu'on la désigne par x_0, on trouvera

$$x_0 = -i \pm \sqrt{il},$$

et mettant cette valeur de x dans l'expression de Q, on aura, pour la valeur maximum de cette percussion,

$$Q_0 = \frac{P}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{l-i}{i}}\right),$$

ou, si l'on veut,

$$Q_0 = \frac{P}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{\mu}{M}}\right).$$

Exemple. Prenons le cas de $M = 1$, $\mu = 9999$, ce qui donne $\frac{\mu}{M} = 9999$; on aura

$$K^2 = l^2 . \frac{9999}{10000^2} = i(l - i),$$

$$i = l . \frac{1}{10000},$$

d'où

$$\frac{K}{i} = l . \frac{9999}{10000}.$$

L'abscisse x_0 du point T où se fait la plus grande percussion sera

$$x_0 = l\left(-\frac{1}{10000} \pm \frac{1}{100}\right),$$

et cette percussion maximum sera

$$Q_0 = \frac{P}{2}(1 + \sqrt{10000}) = \frac{P}{2} \cdot 101,$$

de même sens que la force P; ou, au point T' réciproque à T,

$$Q_0 = \frac{P}{2}(1 - \sqrt{10000}) = -\frac{P}{2} \cdot 99,$$

de sens contraire à P.

Dans cet exemple donc où la verge OC est chargée à ses deux bouts de deux points massifs μ et M qui sont entre eux dans le rapport de 9999 à 1, et où le point M est frappé par une force P, la percussion maximum Q vaut $50\frac{1}{2}$ fois la force d'impulsion P, et au point T', réciproque à T, elle est $49\frac{1}{2}$ fois cette même force P, mais de *sens contraire* à la première.

Le point T de la plus grande percussion est entre le centre G et le centre C; l'autre point T' de la percussion maximum de sens contraire

23..

à P, tombe de l'autre côté du centre G. Ces deux points T et T′ sont tous deux très-voisins du centre de gravité G : le premier T en est à une distance GT égale à $\frac{99}{10000}$ de OC; l'autre T′ à une distance GT′ égale à $\frac{101}{10000}$ de la même ligne OC: leur distance mutuelle TT′ est donc $\frac{200}{10000}\,l = \frac{1}{50}\,l$.

Le bras K de l'inertie du corps autour de G est $= l \cdot \frac{\sqrt{9999}}{10000} = \frac{1}{100}\,l$ à peu près; et $TT' = x_0 + x'_0$ est exactement le double de K′, K′ étant le bras de l'inertie autour de O; car on a

$$K'^2 = K^2 + i^2 = il - i^2 + i^2 = il = l^2 \cdot \frac{1}{10000},$$

$$K' = l \cdot \frac{1}{100} \quad \text{et} \quad 2K' = l \cdot \frac{1}{50};$$

donc

$$TT' = 2K'.$$

14. Si dans les formules de l'article **13** on veut faire μ infinie par rapport à M, afin de passer à l'hypothèse mathématique d'un point fixe O, pris dans la verge roide OC chargée en C du point massif M, on trouvera pour le moment d'inertie $(M + \mu)\,K'^2$ autour du point fixe O,

$$(M + \mu)\,K'^2 = M\,l^2,$$

le même que donnerait le simple corps M autour du point O. Mais le bras K′ deviendra

$$K' = \sqrt{\frac{M\,l^2}{M + \mu}} = 0;$$

cependant $\frac{K'^2}{i}$ deviendra une ligne finie égale à l; d'où l'on voit que K′ qui est infiniment petit, est infiniment grand par rapport à i; ainsi le bras d'inertie K′ est à l'égard de i, distance de μ au centre de gravité G du système, ce qu'un sinus d'arc infiniment petit est à l'égard du sinus verse.

Si, μ restant un point massif, G est le centre de gravité d'un corps de figure quelconque de masse M, on a pour le moment d'inertie du système de μ et de M, autour du centre de gravité G,

$$(\mathrm{M}+\mu)\,\mathrm{K}^2 = \mathrm{M}\left(\mathrm{D}^2 + l^2\frac{1}{1+\frac{\mathrm{M}}{\mu}}\right),$$

D étant le bras de l'inertie du simple corps M autour de son centre de gravité; d'où, en faisant μ infinie pour passer à l'hypothèse d'un point fixe en μ, on tire le moment d'inertie

$$(\mathrm{M}+\mu)\,\mathrm{K}^2 = \mathrm{M}\,(\mathrm{D}^2 + l^2),$$

le même que si le point μ était anéanti.

Quoi qu'il en soit, il résulte de tout ce qu'on vient de dire que dans le mouvement d'un corps M autour d'un point fixe O, le centre de percussion ordinaire n'est, pas plus que dans un corps libre, le centre de la plus grande percussion de ce corps contre un point fixe T qu'on viendrait opposer tout à coup à son mouvement actuel. Ce véritable centre T est infiniment près du point fixe Q, et cette percussion est infinie.

15. Nous avons trouvé dans un précédent travail que le point par lequel un corps M pourrait communiquer à un point libre de masse m en repos la plus grande vitesse possible, n'est pas le centre de percussion *maximum* du même corps contre un point qu'on supposerait fixe; que ce nouveau centre de plus grande vitesse communiquée à un point libre m, se trouve à une distance λ du centre spontané O du corps choquant M, qui est exprimée par

$$\lambda = \pm\sqrt{a^2 + \mathrm{K}^2\left(1+\frac{\mathrm{M}}{m}\right)},$$

K étant le bras de l'inertie du corps M autour de son centre de gravité G, et a la distance de ce même centre G au centre spontané de la rotation. Si, au lieu du simple corps M, nous considérons le système $\mathrm{M}+\mu$ composé de M et d'un point massif μ placé en I à la distance a' du centre G de ce système $\mathrm{M}+\mu$, il faudra changer dans l'expression précédente de μ, M en $\mathrm{M}+\mu$, a en a' et K en K'^2, K' étant le bras de l'inertie du système autour du centre G; ainsi on aura

$$\lambda^2 = a'^2 + K'^2\left(1 + \frac{M+\mu}{m}\right)$$

ou

$$\lambda^2 = a'^2 + K'^2 + \frac{(M+\mu)}{m}K'^2.$$

Maintenant si l'on suppose $\mu = \infty$, afin de passer à l'hypothèse d'un point fixe I autour duquel tourne le simple corps M, on aura $a' = 0$, $K' = 0$; mais $(M + \mu)K'^2$ ne deviendra pas zéro, et sa vraie valeur sera

$$(M + \mu)K'^2 = M(K^2 + d^2),$$

d étant la distance du centre G au point I, et K le bras de l'inertie du simple corps M autour de son centre G; $M(K^2 + d^2)$ sera donc le moment d'inertie du corps autour du point fixe I.

Ainsi quand un corps M tourne autour d'un point fixe I, le centre V de plus grande vitesse communiquée à un point libre m se trouve à une distance

$$IV = \sqrt{\frac{M(K^2+d^2)}{m}};$$

ce point V dépend, comme on voit, du rapport qu'il y a entre la masse M du corps choquant et la masse m du corps choqué; la distance IV est proportionnelle à la racine carrée du rapport $\frac{M}{m}$.

Si $m = M$, IV devient simplement $\sqrt{K^2 + d^2}$; c'est le bras de l'inertie du corps autour du point fixe.

Si m devenait infinie et représentait ainsi un point fixe, IV deviendrait nulle, et ce serait alors le centre de percussion *maximum*, ce qui s'accorde parfaitement avec ce qu'on a déjà établi.

Si m était très-petite par rapport à M, la distance IV serait très-grande.