JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur une intégrale définie multiple

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 4 (1859), p. 155-160.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4__155_0>

SUR UNE INTÉGRALE DÉFINIE MULTIPLE;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Je me suis beaucoup occupé, il y aura bientôt trente ans, de la détermination ou de l'abaissement de diverses classes d'intégrales définies multiples, à l'occasion du calcul des différentielles à indices quelconques qui offre pour cela de grands secours. Mais entraîné depuis vers d'autres recherches plus importantes, j'ai négligé de publier la plupart des résultats que j'avais obtenus. Plusieurs pourtant avaient de l'intérêt. Je me propose donc d'y revenir et de les présenter successivement à nos lecteurs, à mesure que je trouverai quelque page à remplir dans ce journal. Je les tirerai de mes papiers, tels qu'ils y sont inscrits, sans trop m'inquiéter si quelqu'un ne m'a pas prévenu. Dans ce genre un peu vague, on est souvent ramené, sans le savoir, à des conclusions déjà connues, qu'un simple changement de variables couvre quelquefois d'une apparence de nouveauté. Mettant donc ici de côté toute prétention d'inventeur, je ne veux écrire que pour nos jeunes étudiants, et peu leur importe à qui revient au fond telle ou telle formule sur laquelle je les exercerai : si plus tard ils reconnaissent qu'elle appartient à tel ou tel auteur, ils la lui rendront.

La formule que je vais leur donner aujourd'hui contient une fonction $f(x)$ arbitraire, mais qui, bien entendu, doit être telle, que nos intégrales aient une valeur finie et offrent un sens précis comme sommes d'éléments.

Je cite textuellement l'énoncé que je retrouve, avec la date du 15 mai 1831.

« Soient α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots, \alpha_n$ des variables qui croissent de 0 à 1, et μ_1,
» μ_2, $\mu_3, \ldots, \mu_n$ des constantes positives, ou du moins à partie réelle
» positive. Posons

$$P = (1-\alpha_1)^{\mu_1-1}(1-\alpha_2)^{\mu_2-1}\ldots(1-\alpha_n)^{\mu_n-1}$$

» et

$$Q = \alpha_2^{\mu_1}\alpha_3^{\mu_1+\mu_2}\alpha_4^{\mu_1+\mu_2+\mu_3}\ldots\alpha_n^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{n-1}}.$$

» Enfin considérons l'intégrale multiple

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 f(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)\,PQ\,d\alpha_1\,d\alpha_2\ldots d\alpha_n,$$

» que je désignerai par A. Je dis que cette intégrale multiple est ré-
» ductible (quelle que soit la fonction f) à une intégrale simple, en
» sorte que

$$(1)\qquad A = \frac{\Gamma(\mu_1)\Gamma(\mu_2)\ldots\Gamma(\mu_n)}{\Gamma(\sigma)}\int_0^1 f(\alpha)(1-\alpha)^{\sigma-1}d\alpha,$$

» où

$$\sigma = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n.$$

» Cela est aisé à vérifier en développant la fonction $f(x)$ en série
» suivant les puissances de x. »

Je n'ai pas sans doute besoin d'ajouter que le signe Γ est celui de Legendre pour l'intégrale eulérienne de seconde espèce.

Quand $n = 2$, notre formule réduit une intégrale double à une intégrale simple. Elle consiste alors dans l'équation

$$(2)\int_0^1\int_0^1 f(\alpha\beta)(1-\alpha)^{\mu-1}\beta^{\mu}(1-\beta)^{\nu-1}d\alpha\,d\beta = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}\int_0^1 f(z)(1-z)^{\mu+\nu-1}dz.$$

Soit, par exemple,

$$f(x) = x^{\rho-1},$$

ρ étant comme μ et ν une constante positive ou à partie réelle positive. Il faudra que

$$\int_0^1\int_0^1(\alpha\beta)^{\rho-1}(1-\alpha)^{\mu-1}\beta^{\mu}(1-\beta)^{\nu-1}d\alpha\,d\beta = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}\int_0^1 z^{\rho-1}(1-z)^{\mu+\nu-1}dz.$$

Or cette égalité a lieu en effet. Car par une formule d'Euler on a

$$\int_0^1 z^{\rho-1}(1-z)^{\mu+\nu-1}dz = \frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma(\rho+\mu+\nu)},$$

en sorte que le second membre a pour valeur

$$\frac{\Gamma(\rho)\,\Gamma(\mu)\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(\rho+\mu+\nu)},$$

et c'est bien là aussi la valeur du premier membre qui n'est autre que le produit des deux intégrales

$$\int_0^1 \alpha^{\rho-1}(1-\alpha)^{\mu-1}\,d\alpha$$

et

$$\int_0^1 \beta^{\rho+\mu-1}(1-\beta)^{\nu-1}\,d\beta,$$

respectivement égales à

$$\frac{\Gamma(\rho)\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(\rho+\mu)}$$

et à

$$\frac{\Gamma(\rho+\mu)\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(\rho+\mu+\nu)}.$$

Ceci suffirait pour établir la formule (2), si l'on voulait développer $f(x)$ en série sous la forme

$$f(x) = \sum \mathrm{B}_\rho\, x^{\rho-1};$$

et la même méthode pourrait être appliquée à la formule générale (1). Mais voici une démonstration plus rigoureuse et tout aussi simple.

En posant

$$\beta = \frac{z}{\alpha}$$

l'intégrale

$$\int_0^1\int_0^1 f(\alpha\beta)(1-\alpha)^{\mu-1}\beta^{\mu}(1-\beta)^{\nu-1}\,d\alpha\,d\beta$$

se change dans la suivante :

$$\int_0^1 d\alpha\int_0^{\alpha} f(z)(1-\alpha)^{\mu-1}z^{\mu}\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^{\nu-1}\frac{dz}{\alpha^{\mu+1}}.$$

Or, en regardant α et z comme deux coordonnées rectangulaires dans un plan, et l'intégrale double que je viens d'écrire comme l'expression d'un volume, on voit qu'elle peut être remplacée par celle-ci :

$$\int_0^1 f(z)\, z^\mu dz \int_z^1 (1-\alpha)^{\mu-1}\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^{\nu-1}\frac{d\alpha}{\alpha^{\mu+1}},$$

où l'ordre des intégrations est interverti. Dès lors tout se réduit à prouver que

$$z^\mu \int_z^1 (1-\alpha)^{\mu-1}\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^{\nu-1}\frac{d\alpha}{\alpha^{\mu+1}} = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}(1-z)^{\mu+\nu-1}.$$

Or il suffit pour cela de poser

$$\alpha = \frac{z}{1-(1-z)t}:$$

les limites pour la nouvelle variable t seront 0 et 1 ; on aura

$$1-\alpha = \frac{(1-z)(1-t)}{1-(1-z)t}, \quad 1-\frac{z}{\alpha} = (1-z)t, \quad d\alpha = \frac{z(1-z)\,dt}{[1-(1-z)t]^2},$$

par suite

$$z^\mu \int_z^1 (1-\alpha)^{\mu-1}\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^{\nu-1}\frac{d\alpha}{\alpha^{\mu+1}} = (1-z)^{\mu+\nu-1}\int_0^1 t^{\nu-1}(1-t)^{\mu-1}dt,$$

ce qui est bien l'équation demandée, vu la formule d'Euler rapportée plus haut.

Pour démontrer la formule générale (1), il suffit d'appliquer plusieurs fois la formule de réduction (2). Considérons le cas de $n=3$, où

$$A = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)(1-\alpha_1)^{\mu_1-1}(1-\alpha_2)^{\mu_2-1}(1-\alpha_3)^{\mu_3-1}\alpha_2^{\mu_1}\alpha_3^{\mu_1+\mu_2}d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3.$$

Ne portons notre attention que sur les deux premières variables α_1, α_2 et appliquons à l'intégrale double qui les concerne la réduction indiquée par la formule (2). Nous réduirons l'intégrale triple A à une intégrale double, savoir

$$A = \frac{\Gamma(\mu_1)\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_1+\mu_2)}\int_0^1\int_0^1 f(z\alpha_3)(1-z)^{\mu_1+\mu_2-1}\alpha_3^{\mu_1+\mu_2-1}(1-\alpha_3)^{\mu_3-1}dz\,d\alpha_3.$$

Mais celle-ci à son tour est réductible de la même manière. On a donc

$$A = \frac{\Gamma(\mu_1)\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_1+\mu_2)} \cdot \frac{\Gamma(\mu_1+\mu_2)\Gamma(\mu_3)}{\Gamma(\mu_1+\mu_1+\mu_3)} \int_0^1 f(\alpha)(1-\alpha)^{\mu_1+\mu_2+\mu_3-1}\,d\alpha,$$

d'où, finalement,

$$A = \frac{\Gamma(\mu_1)\Gamma(\mu_2)\Gamma(\mu_3)}{\Gamma(\mu_1+\mu_2+\mu_3)} \int_0^1 f(\alpha)(1-\alpha)^{\mu_1+\mu_2+\mu_3-1}\,d\alpha,$$

ce qu'il fallait démontrer.

On descendra de la même manière du cas de $n=4$ à celui de $n=3$, du cas de $n=5$ à celui de $n=4$, et ainsi de suite. La démonstration est donc complète.

Nous ne pensons pas qu'il soit nécessaire d'insister sur les applications de la formule générale (1). Bornons-nous à faire observer que dans le cas particulier où l'on prend pour $f(\alpha)$ une fonction de la forme

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^{\mu-1}}{(1+g\alpha)^s},$$

μ, g, s étant des constantes, il vient

$$A = \frac{\Gamma(\mu_1)\Gamma(\mu_2)\ldots\Gamma(\mu_n)}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 \frac{\alpha^{\mu-1}(1-\alpha)^{\sigma-1}\,d\alpha}{(1+g\alpha)^s}.$$

Dans ce cas, l'intégrale A, savoir

$$\int_0^1\int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{\alpha_1^{\mu-1}\alpha_2^{\mu+\mu_1-1}\ldots\alpha_n^{\mu+\mu_1+\ldots+\mu_{n-1}-1}(1-\alpha_1)^{\mu_1-1}\ldots(1-\alpha_n)^{\mu_n-1}\,d\alpha_1 d\alpha_2\ldots d\alpha_n}{(1+g\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)^s},$$

se ramène donc à une intégrale trinôme ou à la *série générale* de Gauss. Cette intégrale trinôme

$$\int_0^1 \frac{\alpha^{\mu-1}(1-\alpha)^{\sigma-1}\,d\alpha}{(1+g\alpha)^s}$$

s'exprime quelquefois sous forme finie; cela arrive, par exemple, quand on a

$$s = \mu + \sigma:$$

en posant en effet

$$\alpha = \frac{1 - t}{1 + gt},$$

on trouve sans peine que

$$\int_0^1 \frac{\alpha^{\mu-1}(1-\alpha)^{\sigma-1}\,d\alpha}{(1+g\alpha)^{\mu+\sigma}} = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\mu+\sigma)(1+g)^{\mu}}.$$

De là pour A, dans les conditions indiquées, la valeur fort simple

$$A = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu_1)\ldots\Gamma(\mu_n)}{(1+g)^{\mu}\Gamma(\mu+\mu_1+\ldots+\mu_n)}.$$

Ainsi, pour $n = 2$, on a l'intégrale double

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\alpha_1^{\mu-1}\alpha_2^{\mu+\mu_1-1}(1-\alpha_1)^{\mu_1-1}(1-\alpha_2)^{\mu_2-1}\,d\alpha_1\,d\alpha_2}{(1+g\alpha_1\alpha_2)^{\mu+\mu_1+\mu_2}}$$

dont la valeur est, d'après nos calculs,

$$\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu_1)\Gamma(\mu_2)}{(1+g)^{\mu}\Gamma(\mu+\mu_1+\mu_2)}.$$