JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres (neuvième article)

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 4 (1859), p. 111-120.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4__111_0>

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

NEUVIÈME ARTICLE.

Le mode de partition que nous avons appliqué, dans nos deux derniers articles, au nombre fondamental m (pair ou impair) que nos formules concernent, consiste à poser

$$m = m'^2 + m'' = m'^2 + 2^{\alpha''} d'' \delta'',$$

où m' est un entier quelconque, pair ou impair, positif ou négatif, ou même zéro, tandis que m'' est essentiellement positif, aussi bien que d'' et δ'', lesquels, de plus, sont impairs : quant à l'exposant α'', il peut se réduire à zéro, ou être plus grand que zéro, suivant les cas. C'est à l'ensemble des groupes m', m'' et aux diverses valeurs des diviseurs $2^{\alpha''} d''$, δ'' que se rapportent les sommes doubles que nous avons considérées dans les articles cités. Il en sera de même, dans l'article actuel, pour la somme nouvelle

$$\sum\sum (-1)^{m''-1} \delta'' f(2^{\alpha''} d'' + m'),$$

dont nous voulons nous occuper, et où $f(x)$ désigne une fonction algébrique ou numérique paire, je veux dire telle, que

$$f(-x) = f(x),$$

pour toutes les valeurs de x dont on aura à faire usage : ces valeurs sont des entiers de même espèce que m, constamment pairs ou constamment impairs, suivant que m est pair ou impair.

Mais à côté de cette somme double figurera une somme simple

$$\sum \zeta_1(m_2) f(m_1),$$

où la fonction f sera la même, mais qui proviendra d'un mode de partition un peu différent et plus limité, en ce que pour compléter la valeur de m, en ajoutant un entier à un carré moindre que m, nous exigerons que cet entier soit pair. En d'autres termes, nous faisons

$$m = m_1^2 + 2m_2,$$

m_1 étant un entier positif, nul ou négatif, et m_2 un entier positif. C'est aux groupes m_1, m_2, ainsi définis, que se rapporte la somme simple

$$\sum \zeta_1(m_2) f(m_1),$$

dans laquelle $\zeta_1(m_2)$ représente à l'ordinaire la somme des diviseurs de m_2. On voit que les valeurs de m_1 ne peuvent être que paires quand m est pair, et qu'impaires quand m est impair : au contraire m_2 est indifféremment pair ou impair.

Cela posé, je trouve que les deux sommes indiquées sont généralement égales entre elles : il n'y a exception que quand m est un carré; et alors l'excès de la première sur la seconde a pour valeur $mf(\sqrt{m})$. En d'autres termes, on a

$$(\zeta) \sum (-1)^{m''-1} \delta'' f(2^{\alpha''} d'' + m') - \sum \zeta_1(m_2) f(m_1) = mf(\sqrt{m}), \text{ ou } = 0,$$

suivant que m est ou n'est pas un carré.

Pour $m = 1$, on ne peut prendre que $m' = 0$, $m'' = 1$, et il n'y a aucun groupe m_1, m_2 qui soit admissible. La première somme se réduit donc au seul terme $f(1)$ et l'autre à zéro : la valeur du second membre est en effet $f(1)$, l'unité étant un carré.

Pour $m = 2$, on a d'une part les trois systèmes

$$m' = 0, \quad m'' = 2; \quad m' = 1, \quad m'' = 1; \quad m' = -1, \quad m'' = 1;$$

et d'autre part celui-ci

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 1.$$

Les deux quantités à retrancher ont donc la même valeur $f(0)$.

Il en est de même pour $m = 3$. Alors on doit prendre successivement

$$m' = 0, \quad m'' = 3; \quad m' = 1, \quad m'' = 2; \quad m' = -1, \quad m'' = 2,$$

et

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 1; \quad m_1 = -1, \quad m_2 = 1.$$

La valeur commune des deux sommes est $2f(1)$.

Enfin pour $m = 4$, on a $4f(2)$ au second membre; et c'est bien là ce qui résulte des groupes à employer, savoir

$$m' = 0, \quad m'' = 4; \quad m' = 1, \quad m'' = 3; \quad m' = -1, \quad m'' = 3;$$

et

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 2.$$

Prenons, comme nous en avons le droit,

$$f(x) = x \sin(xt),$$

t désignant une constante quelconque; et la formule (ζ) nous donnera la valeur de la différence des deux sommes

$$\sum\sum (-1)^{m''-1} \delta'' (2^{\alpha''} d'' + m') \sin(2^{\alpha''} d'' + m') t$$

et

$$\sum m_1 \zeta_1(m_2) \sin(m_1 t),$$

dont la première peut être mise sous la forme

$$\sum\sum (-1)^{m''-1} m'' \sin(2^{\alpha''} d'' t) \cos m' t$$
$$+ \sum\sum (-1)^{m''-1} \delta'' m' \cos(2^{\alpha''} d'' t) \sin m' t,$$

en développant le sinus qu'elle contient et en supprimant les termes qui se détruisent deux à deux à cause des valeurs égales et de signes contraires que m' doit prendre. La différence dont il s'agit est généralement nulle : il n'y a exception que quand m est un carré, et alors elle est égale à

$$m\sqrt{m} \sin(t\sqrt{m});$$

mais ce cas ne se présentera jamais si nous supposons m impair et de la forme $8\nu + 5$. Développons les calculs dans cette hypothèse de

$m = 8\nu + 5$, en faisant de plus $t = \frac{\pi}{2}$: nous obtiendrons un résultat intéressant.

Nous avons trois sommes à considérer, savoir

$$\sum\sum(-1)^{m''-1} m'' \sin\left(2^{\alpha''} d'' \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(m' \frac{\pi}{2}\right)$$

et

$$\sum\sum(-1)^{m''-1} \delta'' m' \cos\left(2^{\alpha''} d'' \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(m' \frac{\pi}{2}\right),$$

puis

$$\sum m_1 \zeta_1(m_2) \sin\left(m_1 \frac{\pi}{2}\right):$$

le total des deux premières équivaut à la troisième.

On n'aura égard, dans

$$\sum\sum(-1)^{m''-1} m'' \sin\left(2^{\alpha''} d'' \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(m' \frac{\pi}{2}\right),$$

qu'aux valeurs paires de m', vu que pour les autres $\cos\left(m' \frac{\pi}{2}\right) = 0$. Ainsi on fera successivement $m' = 0$, $m'' = \pm 2, \ldots$, $m' = \pm 2\mu$, en désignant par $4\mu^2$ le plus grand carré pair contenu dans m. A ces valeurs de m' répondront les valeurs de m'' que voici : $m'' = m$, $m'' = m - 4, \ldots$, $m'' = m - 4\mu^2$. Elles sont toutes impaires, en sorte que toujours

$$(-1)^{m''-1} = 1, \quad \alpha'' = 0, \quad \sin\left(2^{\alpha''} d'' \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(d'' \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{\frac{d''-1}{2}}.$$

Cela étant, posons à l'ordinaire, pour tout nombre impair $m = d\delta$,

$$\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}} = \rho(m);$$

et nous trouverons que la somme dont nous nous occupons revient à

$$m\rho(m) - 2(m-4)\rho(m-4) + 2(m-16)\rho(m-16) + \ldots$$
$$\pm 2(m - 4\mu^2)\rho(m - 4\mu^2).$$

On la simplifie d'ailleurs, en se rappelant l'équation

$$\rho(m) - 2\rho(m-4) + 2\rho(m-16) - \ldots \pm 2\rho(m - 4\mu^2) = 0,$$

que nous avons donnée dans notre huitième article. Il reste simplement

$$8\rho(m-4) - 32\rho(m-16) + \ldots \mp 8\mu^2\rho(m-4\mu^2).$$

Dans la somme

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}\delta''m'\cos\left(2^{\alpha''}d''\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(m'\frac{\pi}{2}\right),$$

ce sont les valeurs paires de m' que l'on doit négliger comme donnant

$$\sin\left(m'\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Les valeurs de m' à employer sont donc $m' = \pm 1$, $m' = \pm 3, \ldots$, $m' = \pm \omega$, en désignant par ω^2 le plus grand carré impair contenu dans m. Comme m est de la forme $8\nu + 5$ et m'^2 de la forme $8\nu + 1$, l'équation

$$m'' = m - m'^2$$

nous montre que m'' est ici le quadruple d'un nombre impair i, en sorte que

$$m'' = 2^{\alpha''}d''\delta'' = 4i, \quad \alpha'' = 2, \quad \cos\left(2^{\alpha''}d''\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad (-1)^{m''-1} = -1:$$

de plus δ'' représente un quelconque des diviseurs de i. Nous voyons donc que

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}\delta''m'\cos\left(2^{\alpha''}d''\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(m'\frac{\pi}{2}\right)$$

s'exprime finalement par

$$-2\zeta_1\left(\frac{m-1}{4}\right) + 6\zeta_1\left(\frac{m-9}{4}\right) - 10\zeta_1\left(\frac{m-25}{4}\right) + \ldots \pm 2\omega\zeta_1\left(\frac{m-\omega^2}{4}\right).$$

Nous ferons passer cette quantité, changée de signe, dans le second membre de l'équation que nous venons de former, afin de l'ajouter à

$$\sum m_1\zeta_1(m_2)\sin\left(m_1\frac{\pi}{2}\right),$$

qui dépend des mêmes fonctions ζ_1. On doit faire successivement

$$m_1 = \pm 1, \quad m_1 = \pm 3, \quad m_1 = \pm 5, \ldots, \quad m_1 = \pm \omega,$$

avec

$$m_2 = \frac{m - m_1^2}{2}.$$

Or m_2 se trouve être ainsi le double d'un impair (dans notre hypothèse de $m = 8\nu + 5$). Par suite

$$\zeta_1(m_2) = 3\zeta_1\left(\frac{m_2}{2}\right) = 3\zeta_1\left(\frac{m - m_1^2}{4}\right).$$

La somme

$$\sum m_1 \zeta_1(m_2) \sin\left(m_1 \frac{\pi}{2}\right)$$

est donc égale à

$$6\zeta_1\left(\frac{m-1}{4}\right) - 18\zeta_1\left(\frac{m-9}{4}\right) + 30\zeta_1\left(\frac{m-25}{4}\right) - \ldots \pm 6\,\omega\zeta_1\left(\frac{m-\omega^2}{4}\right).$$

Cela nous conduit, après la suppression du facteur 8 dans les deux membres, à conclure définitivement que les deux quantités suivantes

$$\rho(m-4) - 4\rho(m-16) + 9\rho(m-36) - \ldots \pm \mu^2\rho(m - 4\mu^2)$$

et

$$\zeta_1\left(\frac{m-1}{4}\right) - 3\zeta_1\left(\frac{m-9}{4}\right) + 5\zeta_1\left(\frac{m-25}{4}\right) - \ldots \pm \omega\zeta_1\left(\frac{m-\omega^2}{4}\right),$$

ont la même valeur, pour tout entier m de la forme $8\nu + 5$. Pour $m = 37$, par exemple, on doit avoir

$$\rho(33) - 4\rho(21) + 9\rho(1) = \zeta_1(9) - 3\zeta_1(7) + 5\zeta_1(3),$$

chose aisée à vérifier en observant que

$$\rho(33) = 0,\quad \rho(21) = 0,\quad \rho(1) = 1,\quad \zeta_1(9) = 13,\quad \zeta_1(7) = 8,\quad \zeta_1(3) = 4:$$

la valeur commune des deux membres est 9.

L'égalité que nous venons d'obtenir entraîne des corollaires dont il est bon de dire un mot.

Posons, de toutes les manières possibles,

$$m = 4s^2 + s_1^2 + s_2^2,$$

s étant un entier positif, tandis que s_1 et s_2 sont des entiers indifféremment positifs ou négatifs, ou même zéro. La somme

$$\sum (-1)^{s-1} s^2,$$

étendue à toutes les valeurs de s, dont plusieurs peuvent être égales entre elles, s'exprime aisément à l'aide du signe ρ, dès qu'on se rappelle que $4\rho(m)$ est le nombre des représentations de m par une somme de deux carrés. Dès lors, en effet, on voit que les diverses valeurs possibles de s qui sont contenues dans la suite $1, 2, 3, \ldots, \mu$ (en continuant à désigner par $4\mu^2$ le plus grand carré pair inférieur à m) répondent aux représentations de $m - 4s^2$ par une somme de deux carrés $s_1^2 + s_2^2$, et dès lors chacune d'elles figure dans l'ensemble des équations

$$m = 4s^2 + s_1^2 + s_2^2$$

un nombre de fois marqué par

$$4\rho(m - 4s^2).$$

La somme

$$\sum (-1)^{s-1} s^2$$

est donc égale à quatre fois celle-ci :

$$\rho(m-4) - 4\rho(m-16) + 9\rho(m-36) - \ldots \pm \mu^2 \rho(m - 4\mu^2).$$

Posons, en second lieu,

$$m = n^2 + 4(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2),$$

n étant un entier positif et impair, tandis que n_1, n_2, n_3, n_4 sont des entiers à volonté pairs ou impairs, positifs, nuls ou négatifs. Nous trouverons semblablement (dans notre hypothèse de $m = 8\nu + 5$) que la somme

$$\sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} n$$

est égale à huit fois celle-ci :

$$\zeta_1\left(\frac{m-1}{4}\right) - 3\zeta_1\left(\frac{m-9}{4}\right) + 5\zeta_1\left(\frac{m-25}{4}\right) - \ldots \pm \omega\zeta_1\left(\frac{m-\omega^2}{4}\right),$$

ω^2 étant toujours le plus grand carré impair contenu dans m. Il suffit de se rappeler que $8\zeta_1(m)$ est le nombre des représentations de l'entier impair m par une somme de quatre carrés, et d'appliquer ce théorème à $\frac{m - n^2}{4}$, en donnant à n les valeurs successives $1, 3, 5, \ldots, \omega$.

Le résultat obtenu plus haut concernant les fonctions ρ et ζ_1 nous apprend donc que

$$\sum(-1)^{\frac{n-1}{2}} n = 2\sum(-1)^{s-1} s^2,$$

ce qui est assez curieux.

Soit, par exemple, $m = 5$. Les équations

$$5 = 4.1^2 + 1^2 + 0^2, \qquad 5 = 4.1^2 + 0^2 + 1^2,$$
$$5 = 4.1^2 + (-1)^2 + 0^2, \quad 5 = 4.1^2 + 0^2 + (-1)^2,$$

nous donnent

$$\sum(-1)^{s-1} s^2 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4,$$

tandis que les équations

$$5 = 1^2 + 4(1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2) = 1^2 + 4[(-1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2],$$
$$5 = 1^2 + 4(0^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2) = 1^2 + 4[0^2 + (-1)^2 + 0^2 + 0^2],$$
$$5 = 1^2 + 4(0^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2) = 1^2 + 4[0^2 + 0^2 + (-1)^2 + 0^2],$$
$$5 = 1^2 + 4(0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2) = 1^2 + 4[0^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2],$$

prouvent que

$$\sum(-1)^{\frac{n-1}{2}} n = 8,$$

ce qui est bien le double de 4.

Au lieu de décomposer m sous la forme

$$n^2 + 4(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2),$$

on aurait pu décomposer ce nombre ($m = 8\nu + 5$) en une somme de cinq carrés à racines impaires et positives, de manière à avoir

$$m = r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2,$$

les entiers r, r_1, r_2, r_3, r_4 étant tous positifs impairs, tandis que tout à l'heure n seul était soumis à cette condition. Il faudra donc prendre successivement pour r, comme on le faisait pour n, les valeurs $1, 3, 5, \ldots, \omega$, puis décomposer en quatre carrés impairs, à racines positives, l'entier $m - r^2$, qui est le quadruple du nombre impair

$$\frac{m - r^2}{4}.$$

Pour chaque valeur de r le nombre des décompositions dont il s'agit est, comme on le sait,

$$\zeta_1\left(\frac{m-r^2}{4}\right).$$

La somme

$$\sum(-1)^{\frac{r-1}{2}} r,$$

étendue à toutes les valeurs de r égales ou inégales dans l'ensemble des décompositions, s'exprime donc par

$$\zeta_1\left(\frac{m-1}{4}\right)-3\zeta_1\left(\frac{m-9}{4}\right)+5\zeta_1\left(\frac{m-25}{4}\right)-\ldots\pm\omega\zeta_1\left(\frac{m-\omega^2}{4}\right).$$

Il s'ensuit que l'égalité

$$\sum(-1)^{\frac{n-1}{2}} n = 2\sum(-1)^{s-1} s^2$$

peut être remplacée par celle-ci :

$$\sum(-1)^{s-1} s^2 = 4\sum(-1)^{\frac{r-1}{2}} r.$$

Pour $m=5$, le premier membre est égal à 4. Il faut donc qu'on ait alors

$$\sum(-1)^{\frac{r-1}{2}} r = 1.$$

Or cela est vrai ; car 5 ne peut se décomposer en cinq carrés à racines positives impaires que d'une seule manière, où $r=1$:

$$5 = 1^2+1^2+1^2+1^2+1^2.$$

Pour le nombre 13, qui est aussi de la forme $8\nu+5$, on trouvera (quoique le nombre des décompositions soit beaucoup plus grand) les mêmes valeurs pour nos sommes, savoir

$$\sum(-1)^{\frac{r-1}{2}} r = 1,\quad \sum(-1)^{s-1} s^2 = 4,\quad \sum(-1)^{\frac{n-1}{2}} n = 8.$$

Mais pour $m = 21$, il vient

$$\sum(-1)^{\frac{r-1}{2}} r = -6, \quad \sum(-1)^{\delta-1} s^2 = -24, \quad \sum(-1)^{\frac{n-1}{2}} n = -24.$$

Toujours on a

$$\sum(-1)^{\frac{n-1}{2}} n = 2\sum(-1)^{\delta-1} s^2 = 8\sum(-1)^{\frac{r-1}{2}} r.$$

Revenons à l'équation générale (ζ) afin d'indiquer au moins la formule importante qu'elle fournit quand on y pose

$$f(x) = \cos(xt),$$

t étant une constante quelconque. On voit d'abord que la différence des deux sommes

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}\delta''\cos(2^{\alpha''}d'' + m')\,t$$

et

$$\sum\zeta_1(m_2)\cos m_1 t$$

est généralement nulle : il n'y a exception que quand m est un carré, auquel cas elle devient

$$m\cos(t\sqrt{m}).$$

Mais en développant $\cos(2^{\alpha''}d'' + m')\,t$, et en supprimant les termes égaux et de signes contraires qui naissent du double signe que m' peut prendre, on a un résultat plus élégant, savoir

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}\delta''\cos(2^{\alpha''}d''t)\cos m't - \sum\zeta_1(m_2)\cos m_1 t = m\cos(t\sqrt{m}), \text{ ou } = 0,$$

suivant que m est ou n'est pas un carré.