JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

R. CLAUSIUS

Sur la démonstration de l'équation $\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 4\pi\varepsilon\kappa_p$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 57-62.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__57_0>

SUR LA DÉMONSTRATION DE L'ÉQUATION

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = -4\pi\varepsilon k_p;$$

PAR M. R. CLAUSIUS.

Soit donné un espace rempli d'un agent (matière pondérable ou électricité, etc.) dont les éléments exercent sur un point p, dont les coordonnées sont x, y, z, une force attractive ou répulsive inversement proportionnelle au carré de la distance. Je nommerai cet espace un *corps*, et je désignerai par k la densité à un point quelconque x', y', z', en sorte que kdv soit la quantité de l'agent qui se trouve dans un élément de volume dv. La force que cette petite quantité exerce sur le point p s'exprimera par

$$\frac{\varepsilon k\, dv}{r^2},$$

où r désigne la distance entre l'élément dv et le point p, et où ε est une constante positive ou négative suivant que la force est attractive ou répulsive. Si, de plus, on représente par X, Y, Z les trois composantes de la force que le corps entier exerce sur p, on a l'équation

$$(1) \qquad \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = -4\pi\varepsilon k_p,$$

où k_p représente la densité au point p, valeur qui est égale à zéro lorsque p se trouve en dehors du corps.

La démonstration de ce théorème ne présente aucune difficulté dans le cas mentionné en dernier lieu, c'est-à-dire lorsque le point p se trouve en dehors du corps, et que tous les éléments du corps ont des distances finies à ce point. Mais si, au contraire, p se trouve au dedans du corps, la distance r devient infiniment petite pour les éléments avoisinants, d'où il suit que les expressions qu'il faut intégrer pour déterminer les coefficients différentiels $\frac{dX}{dx}$, etc., deviennent pour ces éléments infiniment grandes; et c'est de là que s'élève un obstacle qui rend pour ce cas la démonstration du théorème plus difficile.

Qu'il me soit permis de communiquer ici une démonstration qui est, je crois, nouvelle, et qui me semble plus simple que celles que je connais.

Nous supposerons que le point p soit éloigné d'une distance finie de la surface du corps, et que la densité k change seulement peu à peu dans l'intérieur du corps, ou, s'il y a des changements subits, qu'ils se fassent si loin du point p, qu'on puisse construire une surface fermée qui entoure ce point à une distance finie, et dans l'intérieur de laquelle la densité change seulement peu à peu. La partie du corps qui est hors de cette surface peut être négligée dans notre démonstration, parce qu'elle ne peut contribuer en rien à la valeur de la somme des trois coefficients différentiels. Pour plus de simplicité, soit encore supposé que la surface du corps ait une telle forme, que chaque rayon vecteur qui sort du point p ne la coupe qu'une seule fois. Si la surface donnée du corps ne remplit pas cette condition, on peut construire une nouvelle surface qui la remplisse.

Commençons maintenant par développer les expressions des composantes X, Y, Z.

Considérons pour cela une pyramide infiniment étroite qui ait pour sommet le point p, et pour base un élément $d\omega$ de la surface du corps. Qu'une partie infiniment courte de cette pyramide, limitée par deux surfaces sphériques ayant le centre commun p et les rayons r et $r+dr$, soit prise pour l'élément de volume dv. Pour déterminer la grandeur de cet élément, désignons par R la longueur du rayon vecteur mené de p jusqu'à l'élément de surface $d\omega$, et par i le cosinus de l'angle que ce rayon vecteur forme avec la normale érigée sur $d\omega$; alors on aura

$$dv = \frac{r^2}{R^2} i\, d\omega\, dr.$$

La quantité de l'agent qui se trouve dans cet élément est kdv, et la force qu'elle exerce sur p est égale à

$$\frac{\varepsilon k\, dv}{r^2} = \frac{\varepsilon k i}{R^2} d\omega\, dr,$$

et par suite la force exercée par la pyramide entière est exprimée par

$$d\omega \frac{\varepsilon i}{R^2} \int_0^R k\,dr.$$

Il sera convenable pour ce qui va suivre d'introduire, au lieu de r, une autre variable, savoir la distance de l'élément de volume dv à l'élément de surface $d\omega$. En désignant cette distance par ρ, on a

$$r = R - \rho,$$
$$dr = -d\rho,$$
$$\int_0^R k\,dr = -\int_R^0 k\,d\rho = \int_0^R k\,d\rho,$$

ce qui change l'expression ci-dessus en

$$d\omega \frac{\varepsilon i}{R^2} \int^R k\,d\rho,$$

ou en

$$d\omega\, \varepsilon K,$$

si l'on fait, pour abréger,

$$K = \frac{i}{R^2} \int_0^R k\,d\rho. \tag{2}$$

Soient maintenant a, b, c les cosinus des angles que forme le rayon vecteur R avec les axes des coordonnées : alors les trois composantes de la force exercée par la pyramide infiniment étroite seront

$$d\omega\, \varepsilon a K, \quad d\omega\, \varepsilon b K, \quad d\omega\, \varepsilon c K,$$

et par conséquent les composantes cherchées de la force totale

$$\tag{3} \left\{ \begin{aligned} X &= \varepsilon \int d\omega\, aK, \\ Y &= \varepsilon \int d\omega\, bK, \\ Z &= \varepsilon \int d\omega\, cK. \end{aligned} \right.$$

Ces trois formules doivent être différentiées, la première par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z. Comme les éléments $d\omega$, c'est-à-dire les éléments de la surface du corps auxquels le signe $\int$ est relatif, sont tout à fait indépendants des coordonnées x, y, z du point p, on peut différentier sous ce signe.

Pour effectuer cette différentiation, on peut, pour un élément donné $d\omega$, considérer la quantité K [équation (2)] comme une fonction de a, b, c et R qui, eux-mêmes, sont des fonctions de x, y, z. Car si x', y', z' sont les coordonnées de l'élément de volume dv, la densité k est une fonction de ces variables; mais en désignant par ρ, ξ, ζ les coordonnées de l'élément de surface $d\omega$, on a

$$x' = \xi - a\rho, \quad y' = \eta - b\rho, \quad z' = \zeta - c\rho.$$

Par la substitution de ces valeurs, k devient une fonction de a, b, c et ρ, et par conséquent l'intégrale $\int_0^{\mathrm{R}} k\,d\rho$ une fonction de a, b, c et R. De même, si α, β, γ sont les cosinus des angles que la normale érigée en dehors du corps sur $d\omega$ forme avec les axes des coordonnées, le cosinus i est déterminé en fonction de a, b et c par l'équation

$$i = a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\frac{d(a\mathrm{K})}{dx} &= \frac{d(a\mathrm{K})}{da}\frac{da}{dx} + \frac{d(a\mathrm{K})}{db}\frac{db}{dx} + \frac{d(a\mathrm{K})}{dc}\frac{dc}{dx} + \frac{d(a\mathrm{K})}{d\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{R}}{dx} \\ &= \mathrm{K}\frac{da}{dx} + a\left(\frac{d\mathrm{K}}{da}\frac{da}{dx} + \frac{d\mathrm{K}}{db}\frac{db}{dx} + \frac{d\mathrm{K}}{dc}\frac{dc}{dx} + \frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{R}}{dx}\right).\end{aligned}$$

Maintenant on a

$$a = \frac{\xi - x}{\mathrm{R}}, \quad b = \frac{\eta - y}{\mathrm{R}}, \quad c = \frac{\zeta - z}{\mathrm{R}},$$

$$\mathrm{R} = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

d'où il suit

$$\frac{da}{dx} = \frac{-1 + a^2}{\mathrm{R}}, \quad \frac{db}{dx} = \frac{ab}{\mathrm{R}}, \quad \frac{dc}{dx} = \frac{ac}{\mathrm{R}}, \quad \frac{d\mathrm{R}}{dx} = -a,$$

ce qui donne

$$\frac{d(a\mathrm{K})}{dx} = \frac{-1+a^2}{\mathrm{R}}\mathrm{K} - \frac{a}{\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{K}}{da} + \frac{a^2}{\mathrm{R}}\left(a\frac{d\mathrm{K}}{da} + b\frac{d\mathrm{K}}{db} + c\frac{d\mathrm{K}}{dc}\right) - a^2\frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{R}}.$$

Des expressions analogues ont lieu pour $\frac{d(b\mathrm{K})}{dy}$ et $\frac{d(c\mathrm{K})}{dz}$, et l'on trouve en définitive

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{d\mathrm{X}}{dx} &= \varepsilon\int d\omega\left[\frac{-1+a^2}{\mathrm{R}}\mathrm{K} - \frac{a}{\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{K}}{da} + \frac{a^2}{\mathrm{R}}\left(a\frac{d\mathrm{K}}{da} + b\frac{d\mathrm{K}}{db} + c\frac{d\mathrm{K}}{dc}\right) - a^2\frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{R}}\right],\\
\frac{d\mathrm{Y}}{dy} &= \varepsilon\int d\omega\left[\frac{-1+b^2}{\mathrm{R}}\mathrm{K} - \frac{b}{\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{K}}{db} + \frac{b^2}{\mathrm{R}}\left(a\frac{d\mathrm{K}}{da} + b\frac{d\mathrm{K}}{db} + c\frac{d\mathrm{K}}{dc}\right) - a^2\frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{R}}\right],\\
\frac{d\mathrm{Z}}{dz} &= \varepsilon\int d\omega\left[\frac{-1+c^2}{\mathrm{R}}\mathrm{K} - \frac{c}{\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{K}}{dc} + \frac{c^2}{\mathrm{R}}\left(a\frac{d\mathrm{K}}{da} + b\frac{d\mathrm{K}}{db} + c\frac{d\mathrm{K}}{dc}\right) - a^2\frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{R}}\right].
\end{aligned}\right.$$

Dans la somme de ces trois expressions, la plupart des termes se détruisent l'un l'autre, et il reste seulement

$$(5)\qquad \frac{d\mathrm{X}}{dx} + \frac{d\mathrm{Y}}{dy} + \frac{d\mathrm{Z}}{dz} = -\varepsilon\int d\omega\left(2\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{R}} + \frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{R}}\right).$$

D'après l'équation (2), on a

$$\frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{R}} = \frac{d}{d\mathrm{R}}\left(\frac{i}{\mathrm{R}^2}\int_0^{\mathrm{R}} kd\rho\right) = -2\frac{i}{\mathrm{R}^3}\int_0^{\mathrm{R}} kd\rho + \frac{i}{\mathrm{R}^2}\frac{d}{d\mathrm{R}}\int_0^{\mathrm{R}} kd\rho.$$

Le premier de ces deux termes se réduit, en vertu de la même équation (2), à

$$-2\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{R}}.$$

Quant au second terme, on sait généralement que

$$\frac{d}{d\mathrm{R}}\int_0^{\mathrm{R}} f(\rho)\,d\rho = f(\mathrm{R});$$

il faut donc, dans notre cas, substituer R au lieu de ρ dans la formule qui représente la densité k en fonction de a, b, c et ρ. Mais alors la formule donne cette valeur de k qui correspond au point p et qui est désignée par k_p, en sorte qu'on a

$$\frac{d}{d\mathrm{R}} \int_0^{\mathrm{R}} k\,d\rho = k_p.$$

Ainsi le coefficient différentiel $\frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{R}}$ sera déterminé par

$$\frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{R}} = -2\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{R}} + \frac{i}{\mathrm{R}^2} k_p,$$

et par suite de cette équation, l'équation (5) deviendra

$$(6) \qquad \frac{d\mathrm{X}}{dx} + \frac{d\mathrm{Y}}{dy} + \frac{d\mathrm{Z}}{dz} = -\varepsilon k_p \int d\omega \frac{i}{\mathrm{R}^2}.$$

On voit aisément que le produit $d\omega \frac{i}{\mathrm{R}^2}$ n'est autre chose que l'élément de surface que la pyramide infiniment étroite dont nous avons parlé plus haut découpe sur une sphère construite avec le rayon 1 autour du point p. L'intégrale représente donc l'aire de cette surface sphérique, c'est-à-dire 4π, et l'on obtiendra

$$\frac{d\mathrm{X}}{dx} + \frac{d\mathrm{Y}}{dy} + \frac{d\mathrm{Z}}{dz} = -4\pi\varepsilon k_p. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si le point p est situé infiniment près de la surface du corps, les coefficients différentiels $\frac{d(a\mathrm{K})}{dx}$, etc., deviennent infiniment grands pour les éléments de surface les plus voisins, et dans ce cas il faut faire usage de quelques considérations spéciales pour prouver l'exactitude de notre équation, et de même dans le cas où la densité k change subitement tout près du point p. Mais je ne veux pas entrer ici dans ces considérations, pour ne pas devenir trop long.