JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BOURGET

Note à l'occasion du mémoire de M. Hirst sur l'attraction des paraboloïdes elliptiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 47-52.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__47_0>

NOTE

A L'OCCASION DU MÉMOIRE DE M. HIRST SUR L'ATTRACTION DES PARABOLOIDES ELLIPTIQUES;

PAR M. BOURGET,

Professeur à la Faculté de Clermont-Ferrand.

M. Hirst a traité dans le cahier de novembre dernier la question de l'attraction des paraboloïdes elliptiques, en suivant une marche analogue à celle que j'avais choisie dans une Thèse présentée à la Faculté de Paris en mai 1852.

Toutefois nos procédés diffèrent en plus d'un point. Pensant que les considérations géométriques nouvelles qui me servaient de base méritent l'attention des lecteurs de ce Journal, je vais présenter ici un résumé rapide de cette Thèse.

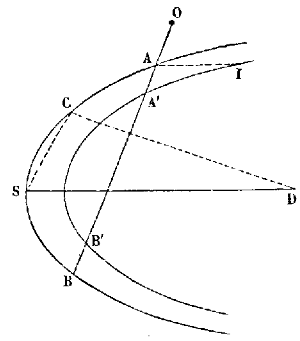
1. Si, par un point O extérieur ou intérieur à un paraboloïde elliptique, on mène une sécante OAB, puis par le sommet S une parallèle SC, puis par le point C un plan perpendiculaire à la sécante, on intercepte sur l'axe principal une longueur SD que je nomme *sous-corde*. Je nomme aussi *parallèle* la ligne OI menée du point O parallèlement à l'axe du paraboloïde jusqu'à la rencontre de sa surface. Ces définitions posées, on démontre sans peine le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Le produit de la sécante entière par sa partie extérieure*, ou bien *le produit des deux parties de la sécante dans le cas où le point est intérieur, est égal au produit de la sous-corde par la parallèle.*

En d'autres termes,

$$OA.OB = SD.OI.$$

2. Considérons maintenant deux paraboloïdes isothétiques, et cherchons l'attraction exercée sur le point O de masse unité par l'élément



infiniment petit intercepté dans un cône partant du point O et infiniment mince. Cette action élémentaire sera pour l'élément en A

$$\psi = \frac{\mathrm{f}\rho\, dv}{r^2},$$

f étant l'attraction de l'unité de masse à l'unité de distance, ρ étant la densité de la couche. Prenons trois axes rectangulaires passant par O, $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$; désignons par θ l'angle de OA avec $O\xi$, par φ l'angle de sa projection avec $O\eta$, nous pourrons prendre pour dv

$$r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr,$$

donc

$$\psi = \mathrm{f}\rho\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

La quantité dr n'est autre chose que AA'; or si, par le point A, nous menons la *parallèle* $\mathrm{AI} = \omega$, puis la sous-corde de la sécante OA, il vient

$$\mathrm{AA'}.\mathrm{AB'} = \omega\,\mathrm{SD};$$

donc

$$dr = \mathrm{AA'} = \omega\frac{\mathrm{SD}}{\mathrm{AB'}},$$

ou bien

$$dr = \omega\frac{\mathrm{SD}}{\mathrm{AB}},$$

en négligeant un infiniment petit d'ordre supérieur. Donc il nous vient

$$\psi = f\rho\omega \frac{SD}{AB} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi. \tag{1}$$

3. Nous avons laissé arbitraire l'axe $O\xi$; choisissons maintenant l'axe principal du cône circonscrit au paraboloïde par le point O. On établit sans peine que *tout cône formé par des sécantes telles que*

$$\frac{SD}{AB} = \text{const.},$$

a même axe principal que ce cône circonscrit; et cet axe est normal au paraboloïde passant par le point O, et homofocal à la couche externe, d'après un théorème de M. Chasles.

De là on conclut évidemment, en ayant égard à la formule (1), les deux théorèmes suivants :

Théorème II. — *Un point intérieur n'est pas attiré par une couche infiniment mince.*

Théorème III. — *L'attraction d'une couche infiniment mince sur un point extérieur est dirigée suivant la normale en ce point au paraboloïde qui y passe, et qui est homofocal à la surface extérieure de la couche.*

4. Les surfaces de niveau étant connues par ce qui précède, j'en déduisais, comme M. Hirst, la valeur de l'attraction et du potentiel, et je trouvais, après une intégration et la détermination de la constante par la recherche directe de l'attraction sur un point de la surface,

$$\frac{dV}{d\varepsilon} = -\frac{4\pi\rho\omega\sqrt{4pq}}{\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}}; \tag{2}$$

ε est le paramètre du paraboloïde homofocal passant par le point O, il est déterminé par l'équation

$$\frac{y^2}{2p+4\varepsilon} + \frac{z^2}{2q+4\varepsilon} = x + \varepsilon. \tag{3}$$

5. De la formule (2) on déduit immédiatement pour un point exté-

rieur

$$V = A - 4\pi\rho\omega\sqrt{4pq}\int\frac{d\varepsilon}{\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}},$$

l'intégration est facile; il reste à déterminer la constante A, qui est indépendante de ε. Mais mon but étant de prouver que A est infini, je puis me placer dans le cas particulier d'un paraboloïde de révolution; faisons donc

$$p = q,$$

il vient

$$V_1 = A_1 - 8\pi\rho\omega p\int\frac{d\varepsilon}{2p+4\varepsilon},$$

et, par suite,

$$V_1 = A_1 - 2\pi\rho\omega p\,\mathcal{L}(2p+4\varepsilon).$$

Cette expression se réduit à

$$V_1 = A_1 - 2\pi\rho\omega p\,\mathcal{L}(2p),$$

si je prends un point situé au sommet de la couche attirante, ce qui ne change rien à A_1.

Dans cette dernière hypothèse, il est facile de déterminer directement V_1. Prenons pour élément de volume le petit cylindre formé par l'élément de surface de la couche externe, et la portion de normale δn comprise entre les deux couches, on aura

$$dv = \sigma\delta n;$$

prenons pour élément de surface le rectangle formé par l'élément ds de la parabole génératrice, et l'arc $y\,d\varphi$ de la rotation élémentaire, nous aurons

$$dv = y\,d\varphi\,ds\,\delta n.$$

Mais si par les extrémités de ds on mène des parallèles à l'axe, on forme un parallélogramme $\omega\,dy$ équivalent au rectangle $ds\,\delta n$; donc

$$dv = \omega y\,dy\,d\varphi:$$

nous aurons donc pour la différentielle du potentiel

$$\frac{\rho\omega\, y\, dy\, d\varphi}{r} = \frac{\rho\omega\, y\, dy\, d\varphi}{\sqrt{y^2 + x^2}},$$

ou

$$\frac{\rho\omega\, dy\, d\varphi}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{4p^2}}};$$

intégrons pour φ de 0 à 2π, et par rapport à y de 0 à ∞, nous aurons

$$V_1 = 2\rho\omega\pi \int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{4p^2}}} = \infty;$$

donc

$$A_1 = \infty;$$

donc aussi

$$A = \infty. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

6. La valeur du potentiel relativement à un point intérieur s'obtient directement avec facilité par les considérations suivantes :

Par le point O en question menons une sécante OAB et imaginons dans la direction de cette ligne un cône infiniment petit d'ouverture qui intercepte en A et B dans la couche infiniment mince des éléments de volume dv, dv'. Nous aurons deux éléments correspondants du potentiel

$$\frac{\rho\, dv}{\mathrm{OA}}, \quad \frac{\rho\, dv'}{\mathrm{OB}}.$$

Si par le point O nous imaginons trois axes rectangulaires $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, et si nous désignons par θ l'angle de OA avec la ligne $O\xi$, par φ l'angle de sa projection avec $O\eta$, nous avons déjà trouvé

$$\frac{\rho\, dv}{\mathrm{OA}^2} = \rho\omega \frac{\mathrm{SD}}{\mathrm{AB}} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

donc

$$\frac{\rho\, dv}{\mathrm{OA}} = \rho\omega \frac{\mathrm{SD}}{\mathrm{AB}} \mathrm{OA} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

et aussi

$$\frac{\rho\, dv'}{\mathrm{OB}} = \rho\omega \frac{\mathrm{SD}}{\mathrm{AB}} \mathrm{OB} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

donc

$$\frac{\rho\, dv}{\mathrm{OA}} + \frac{\rho\, dv'}{\mathrm{OB}} = \rho\omega\, \mathrm{SD} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

On trouve facilement

$$\mathrm{SD} = \frac{1}{\sin^2\theta\left(\frac{\cos^2\varphi}{2p} + \frac{\sin^2\varphi}{2q}\right)},$$

en prenant les axes parallèles aux anciens.

Substituant et intégrant par rapport à θ de 0 à $\frac{\pi}{2}$, et par rapport à φ de 0 à 2π, nous obtiendrons le potentiel demandé. Donc nous aurons

$$\mathrm{V} = \rho\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta\, d\varphi}{\sin\theta\left(\frac{\cos^2\varphi}{2p} + \frac{\sin^2\varphi}{2q}\right)}.$$

Or la première intégration

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin\theta}$$

donne l'infini; donc

$$\mathrm{V} = \infty. \qquad \text{C. Q. F. D [*].}$$

---

[*] Par inadvertance, j'avais posé dans mes Notes

$$\mathrm{SD} = \frac{1}{\sin\theta\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{2p} + \frac{\sin^2\varphi}{2q}}};$$

c'est la raison de mon assertion erronée, rectifiée par M. Hirst.