JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E.-G. BJÖRLING

Sur l'intégration de l'équation différentielle
$\left(\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}xy+\mathrm{C}y^2+\mathrm{D}x+\mathrm{E}y+\mathrm{F}\right)dx +$
$\left(\mathrm{A}_1x^2+\mathrm{B}_1xy+\mathrm{C}_1y^2+\mathrm{D}_1x+\mathrm{E}_1y+\mathrm{F}_1\right)dy = 0$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 417-442.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__417_0>

SUR

L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

$$(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F)\,dx$$
$$+ (A_1 x^2 + B_1 xy + C_1 y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1)\,dy = 0;$$

PAR M. E.-G. BJÖRLING.

LU A L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE STOCKHOLM LE 12 FÉVRIER 1855.

Deux espèces particulières de l'équation différentielle

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l}(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F)\,dx\\ + (A_1 x^2 + B_1 xy + C_1 y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1)\,dy = 0,\end{array}\right.$$

l'une pourtant renfermant l'autre, ont déjà été traitées par Euler et par Jacobi, mais sans égard à leur propriété d'être des cas particuliers de l'équation (1).

Euler, dans ses *Institutiones Calculi integralis* [*], en considérant l'équation

$$(2)\qquad y\,dy + dy(a + bx + nx^2) = y\,dx(c + nx) \text{ [**]},$$

a trouvé, par une divination heureuse, que les variables y peuvent être séparées à l'aide de la substitution

$$u = \frac{y(c + nx)}{y + a + bx + nx^2};$$

mais il ajoute aussi à la fin cet aveu : *Casu autem hic vix prævi-*

[*] Tome I, *Petropol.*, 1792, page 269 (probl. 55).

[**] Ou, ramenée à la forme (1) :

$$(\alpha)\qquad (nxy + cy)\,dx - (nx^2 + bx + y + a)\,dy = 0.$$

dendo evenit, ut hæc substitutio ad votum successerit, neque hoc problema magnopere juvabit.

D'un autre côté, Jacobi, en traitant [*] l'équation un peu plus générale

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&(A + A'x + A''y)(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)dy\\&\qquad + (C + C'x + C''y)dx = 0\ [**],\end{aligned}\right.$$

parvient par une méthode, comme il s'exprime : *ab Euleriana toto cœlo diversa*, à en trouver l'intégrale. Cependant cette méthode, quelque ingénieuse qu'elle soit, laisse à part, elle aussi, tout égard à la propriété de l'équation (3) d'être un cas particulier de l'équation générale (1); de sorte qu'à la rigueur le résultat obtenu par Jacobi, quoiqu'un peu plus général que celui d'Euler déjà mentionné, exige pourtant encore lui-même l'aveu dont Euler (*voyez* la citation plus haut) se croyait obligé d'accompagner le sien.

C'est précisément cette omission du caractère de l'équation *jacobique* d'être un cas particulier de l'équation (1) qui a donné lieu au présent Mémoire. Non pas que nous nous proposions d'intégrer ici d'abord l'équation générale (1), pour en déduire ensuite l'intégrale de l'espèce *jacobique* (3). En effet, on sait bien que l'équation *complète* (1) n'est pas intégrable dans le sens ordinaire [***]; mais en observant que

---

[*] *Journal de Crelle*, tome XXIV (1842).

[**] Ou bien, ramenée à la forme (1) :

$$\begin{aligned}&[A'xy + A''y^2 - C'x + (A - C'')y - C]\,dx\\ -&[A'x^2 + A''xy + (A - B')x - B''y - B]\,dy = 0,\end{aligned}$$

ou, plus brièvement,

$$(\beta)\quad (axy + by^2 + cx + dy + e)\,dx - (ax^2 + bxy + c'x + d'y + e')\,dy = 0,$$

d'où en effet on voit bien que l'équation d'Euler (2), ou (α), se trouve renfermée, comme un cas particulier, dans celle de Jacobi (3).

[***] A cet égard il suffira de se rappeler qu'en effet l'équation

$$(\gamma)\qquad (Ax^2 + Cy^2)\,dx + F_1\,dy = 0$$

se trouve, elle-même déjà, parmi celles de *Riccati* que l'on ne sait pas intégrer à l'ordinaire.

(comme on le sait aussi) l'intégrale de l'équation complète

$$(4) \qquad (Ax + By + C)dx + (A_1x + B_1y + C_1)dy = 0,$$

comprise elle-même parmi les espèces de l'équation (1), peut être obtenue d'une manière très-simple et directe, pourvu que l'on ait d'abord intégré l'équation (sans termes C et C_1)

$$(4') \qquad (Ax + By)dx + (A_1x + B_1y)dy = 0,$$

il m'a paru tout naturel d'essayer au moins si l'on ne réussirait pas aussi à trouver, par une méthode tout à fait analogue [*], l'intégrale de l'epèce *jacobique*. *Qu'en effet cet essai vienne d'être couronné d'un succès parfait*, c'est ce qui se fera voir dans les pages suivantes, lesquelles au reste donneront peut-être lieu quelquefois de faire discuter plus en détail la question de l'intégration de l'équation plus générale (sans termes F et F_1)

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey)dx \\ &+ (A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D_1x + E_1y)dy = 0. \end{aligned} \right.$$

Effectivement il était naturel, en m'étant proposé d'essayer de faire dériver l'intégrale de l'équation *jacobique* de l'intégration d'une pareille équation *sans* termes F et F_1, de considérer d'abord l'équation générale (5), pour passer ensuite à l'espèce de celle-ci, représentée par l'équation de Jacobi *sans* les termes nommés. A la vérité, je reconnus bientôt que l'intégration de l'équation (5) dans sa généralité est au moins assujettie à des difficultés assez grandes pour ne pas admettre ici la discussion en détail; mais en même temps je constatai qu'outre l'espèce particulière de l'équation (5) dont il vient d'être question, et qui se rapporte à celle de Jacobi de même que l'équation (4') se rapporte à la complète (4), il existe d'autres espèces très-remarquables de cette même équation dont les intégrales se présentent

---

[*] Cette idée m'a été premièrement suggérée par mon ami M. Lindman, à Strengnas, lorsque, il y a quelque temps, il m'adressa la question si jamais j'avais vu faire l'essai d'intégrer l'équation (1) en général, et en me rappelant en même temps le caractère de l'équation de Jacobi de n'en être effectivement qu'une espèce particulière.

aussi spontanément que celle de l'espèce nommée. Faire remarquer toutes ensemble ces espèces de l'équation (5), parvenir par l'intégration de cette dernière à l'intégrale de l'équation *jacobique* complète (3), de même que l'on fait dériver l'intégrale de l'équation complète (4) de l'intégration de l'équation (4'), et enfin ajouter quelques mots des espèces de l'équation complète (1) qui se rapportent aux autres espèces qu'on vient de nommer de l'équation (5), voilà donc le sujet du présent Mémoire.

§ I.

1. Pour frayer le chemin aux recherches suivantes, considérons d'abord l'équation

$$(4') \qquad (Ax + By)dx + (A_1 x + B_1 y)dy = 0.$$

Comme à la place de celle-ci on peut écrire

$$\left[A\left(\frac{x}{y}\right) + B\right]dx + \left[A_1\left(\frac{x}{y}\right) + B_1\right]dy = 0,$$

ou, en mettant z au lieu de $\frac{x}{y}$,

$$(6) \qquad [Az^2 + (B + A_1)z + B_1]dy + y(Az + B)dz = 0$$

ce qui, si l'on excepte seulement le cas particulier

$$(7) \qquad 0 = A = B + A_1 = B_1,$$

revient à l'équation suivante :

$$dy + y \cdot \frac{(Az + B)dz}{Az^2 + (B + A_1)z + B_1} = 0,$$

ou bien enfin à celle-ci :

$$\frac{d\left[ye^{\int_0^z \frac{(Az + B)dz}{Az^2 + (B + A_1)z + B_1}}\right]}{ye^{\int_0^z \frac{(Az + B)dz}{Az^2 + (B + A_1)z + B_1}}} = 0,$$

il s'ensuit qu'au moins en exceptant le cas particulier (7), l'intégrale générale de l'équation (4') sera

$$(8)\qquad y e^{\int_0^z \frac{(Az+B)dz}{Az^2+(B+A_1)z+B_1}} = \text{const.},$$

pourvu qu'après avoir éliminé le signe d'intégrale, l'on ait soin de remplacer z par $\frac{x}{y}$.

Dans le cas particulier (7) l'intégrale est bien évidemment

$$z = \frac{x}{y} = \text{const.}$$

2. Cela étant, comme évidemment l'équation complète

$$(4)\qquad (Ax + By + C)dx + (A_1 x + B_1 y + C_1)dy = 0$$

(à savoir, C et C_1 n'étant pas $= 0$ à la fois) peut être ramenée, en posant

$$(9)\qquad x = \xi + \alpha,\quad y = \eta + \beta,$$

à la forme (4'), savoir, à

$$(A\xi + B\eta)d\xi + (A_1\xi + B_1\eta)d\eta = 0,$$

toutes les fois qu'il existe des constantes finies α et β qui remplissent les conditions

$$(10)\qquad \begin{cases} A\alpha + B\beta + C = 0, \\ A_1\alpha + B_1\beta + C_1 = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire au moins toutes les fois que l'on n'a pas

$$(11)\qquad AB_1 - A_1 B = 0,$$

il s'ensuit, en vertu de l'article précédent **1**, que l'intégrale générale de l'équation (4) sera :

1°. Dans le cas particulier (7)

$$\frac{\xi}{\eta} = \frac{x-\alpha}{y-\beta} = \text{const.};$$

2°. Dans tout autre cas

$$(y-\beta)e^{\int_0^\xi \frac{(A\xi+B)d\xi}{A\xi^2+(B+A_1)\xi+B_1}} = \text{const.}$$

$\left(\text{pourvu qu'après l'intégration indiquée l'on ait soin de remplacer } \xi \text{ par } \frac{\xi}{\eta}\right)$, au moins si l'on excepte le seul cas (11). Et à l'égard de ce dernier il suffit de remarquer que, si l'un au moins des quatre coefficients A, B, A_1, B_1 n'est pas $= 0$, il sera toujours aisé, comme on le sait bien, de séparer immédiatement et sans emploi des formules (9) les variables dans l'équation (4) elle-même [*]; et que, du reste, si tous les quatre coefficients sont 0 à la fois, alors aussi les variables par cela même sont déjà séparées.

§ II.

Passons maintenant à l'équation (5), savoir,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}&(Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey)\,dx\\&\qquad+(A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+E_1y)\,dy=0,\end{aligned}\right.$$

ou bien

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}&(Ax^2+Bxy+Cy^2)\,dx+(A_1x^2+B_1xy+C_1y^2)\,dy\\&\qquad+(Dx+Ey)\,dx+(D_1x+E_1y)\,dy=0\end{aligned}\right.$$

---

[*] Par exemple, lorsque A n'est pas $= 0$, on pourra mettre, au lieu de (11), $B_1 = \frac{A_1}{A}B$, et, par suite

1°. B n'étant pas non plus $= 0$,

$$\frac{B_1}{B} = \frac{A_1}{A} = k,$$

et l'équation (4) se réduira à

$$(Ax+By)(dx+k\,dy)+C\,dx+C_1\,dy=0,$$

Comme à la place de celle-ci on peut écrire

$$y\left\{\left[A\left(\frac{x}{y}\right)^2+B\left(\frac{x}{y}\right)+C\right]dx+\left[A_1\left(\frac{x}{y}\right)^2+B_1\left(\frac{x}{y}\right)+C_1\right]dy\right\}$$
$$+\left[D\left(\frac{x}{y}\right)+E\right]dx+\left[D_1\left(\frac{x}{y}\right)+E_1\right]dy=o,$$

ou, en mettant z au lieu de $\frac{x}{y}$,

$$(13)\quad \begin{cases} y\left\{[Az^3+(B+A_1)z^2+(C+B_1)z+C_1]\dfrac{dy}{y}+(Az^2+Bz+C)\,dz\right\} \\ \quad +[Dz^2+(E+D_1)z+E_1]\dfrac{dy}{y}+(Dz+E)\,dz=o; \end{cases}$$

et qu'à la place de cette dernière on peut prendre encore

$$(14)\quad \begin{cases} y[Az^3+(B+A_1)z^2+(C+B_1)z+C_1]\left[\dfrac{dy}{y}+\dfrac{(Az^2+Bz+C)\,dz}{Az^3+(B+A_1)z^2+(C+B_1)z+C_1}\right] \\ \quad +[Dz^2+(E+D_1)z+E_1]\left[\dfrac{dy}{y}+\dfrac{(Dz+E)\,dz}{Dz^2+(E+D_1)z+E_1}\right]=o, \end{cases}$$

au moins si l'on excepte les cas où les coefficients de l'équation (5) remplissent les deux systèmes de conditions

$$(15)\qquad o=A=B+A_1=C+B_1=C_1,$$
$$(16)\qquad o=D=E+D_1=E_1,$$

ou bien l'un ou l'autre, au moins, d'entre eux [*], il est bon de

---

ou bien, en posant $Ax+By=\xi$,

$$(\xi+C)\,d\xi+[AC_1-BC+(kA-B)\xi]\,dy=o,$$

dans laquelle les variables pourront aisément être séparées; et

2°. B étant $=o$, et par conséquent aussi $B_1=o$, l'équation (4) se réduit immédiatement à celle-ci :

$$(Ax+C)dx+(A_1x+C_1)dy=o.$$

[*] On conçoit bien que ces cas renferment non-seulement celui où les coefficients des x^2, xy, y^2 sont $=o$ tous ensemble [partant l'équation (4') déjà traitée], mais encore celui même où les coefficients de x et de y sont $=o$ tous ensemble, c'est-à-dire, l'équation

$$(\delta)\qquad (Ax^2+Bxy+Cy^2)\,dx+(A_1x^2+B_1xy+C_1y^2)\,dy=o.$$

considérer d'abord, l'un après l'autre, ces trois cas particuliers.

(a) *Si les deux systèmes de conditions* (15) *et* (16) *sont remplis à la fois*, et que par suite l'équation primitive (5) ait la forme

$$(5') \qquad (Bxy + Cy^2 + Ey)\,dx - (Bx^2 + Cxy + Ex)\,dy = 0,$$

et l'équation (13) y correspondante la forme

$$(13') \qquad [y(Bz + C) + E]\,dz = 0;$$

alors évidemment l'intégrale générale sera

$$(17') \qquad z = \frac{x}{y} = \text{const.}$$

(b) *Si le système de conditions* (16), *mais non pas le* (15), *est rempli*, et que par suite l'équation (5) ait la forme

$$(5'') \quad (Ax^2+Bxy+Cy^2+Ey)\,dx+(A_1x^2+B_1xy+C_1y^2-Ex)\,dy=0,$$

alors, comme l'équation (13) se réduit à

$$y[Az^3+(B+A_1)z^2+(C+B_1)z+C_1]\left[\frac{dy}{y}+\frac{(Az^2+Bz+C)\,dz'}{Az^3+(B+A_1)z^2+(C+B_1)z+C_1}\right] + E\,dz = 0,$$

ou bien, après division par $Az^3+\ldots$, à

$$(13'') \quad dy+y\cdot\frac{(Az^2+Bz+C)\,dz}{Az^3+(B+A_1)z^2+(C+B_1)z+C_1} = -\frac{E\,dz}{Az^3+(B+A_1)z^2+(C+B_1)z+C_1};$$

il s'ensuit que l'intégrale générale sera

$$(17'') \quad y e^{\int_0^z \frac{(Az^2+Bz+C)\,dz}{Az^3+(B+A_1)z^2+\ldots}} = \text{const.} - \int_0^z \frac{E e^{\int_0^z \frac{(Az^2+Bz+C)\,dz}{Az^3+(B+A_1)z^2+\ldots}}}{Az^3+(B+A_1)z^2+\ldots}\,dz;$$

et enfin, dans le cas contraire,

(c) *Si le système de conditions* (15), *mais non pas le* (16), *est* *rempli*, et que par suite l'équation (5) ait la forme

$$(5''') \qquad \begin{aligned} &(\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y)\,dx \\ &- (\mathrm{B}x^2 + \mathrm{C}xy - \mathrm{D}_1 x - \mathrm{E}_1 y)\,dy = 0, \quad [*] \end{aligned}$$

comme alors l'équation (13) se réduit à

$$y(\mathrm{B}z+\mathrm{C})dz + [\mathrm{D}z^2 + (\mathrm{E}+\mathrm{D}_1)z + \mathrm{E}_1]\left[\frac{dy}{y} + \frac{(\mathrm{D}z+\mathrm{E})\,dz}{\mathrm{D}z^2+(\mathrm{E}+\mathrm{D}_1)z+\mathrm{E}_1}\right] = 0,$$

ou bien, après division par $y[\mathrm{D}z^2 + (\mathrm{E}+\mathrm{D}_1)z + \mathrm{E}_1]$, à

$$\frac{dy}{y^2} + \frac{1}{y}\cdot\frac{(\mathrm{D}z+\mathrm{E})\,dz}{\mathrm{D}z^2+(\mathrm{E}+\mathrm{D}_1)z+\mathrm{E}_1} = -\frac{(\mathrm{B}z+\mathrm{C})\,dz}{\mathrm{D}z^2+(\mathrm{E}+\mathrm{D}_1)z+\mathrm{E}_1},$$

c'est-à-dire, à celle-ci :

$$(13''') \qquad d\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{1}{y}\cdot\frac{(\mathrm{D}z+\mathrm{E})\,dz}{\mathrm{D}z^2+\ldots} = \frac{(\mathrm{B}z+\mathrm{C})\,dz}{\mathrm{D}z^2+\ldots},$$

il s'ensuit que l'intégrale générale sera

$$(17''') \qquad \frac{1}{y}e^{-\int_0^z \frac{(\mathrm{D}z+\mathrm{E})dz}{\mathrm{D}z^2+\ldots}} = \text{const.} + \int_0^z \frac{\mathrm{B}z+\mathrm{C}}{\mathrm{D}z^2+\ldots}\, e^{-\int_0^z \frac{(\mathrm{D}z+\mathrm{E})dz}{\mathrm{D}z^2+\ldots}}\,dz.$$

4. Considérons, en second lieu, le cas général où les systèmes (15) et (16) ne sont remplis, ni l'un ni l'autre, par les coefficients de l'équation (5). Alors, comme à l'équation (13) on peut toujours substituer l'équation (14), ou en posant, pour abréger,

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi' &= \frac{\mathrm{A}z^2+\mathrm{B}z+\mathrm{C}}{\mathrm{A}z^3+(\mathrm{B}+\mathrm{A}_1)z^2+(\mathrm{C}+\mathrm{B}_1)z+\mathrm{C}_1}, \\ \psi' &= \frac{\mathrm{D}z+\mathrm{E}}{\mathrm{D}z^2+(\mathrm{E}+\mathrm{D}_1)z+\mathrm{E}_1}, \end{aligned} \right.$$

---

[*] Évidemment l'équation même de Jacobi (β), dans la Note sous l'Introduction, mais dépourvue des termes C et C_1.

celle-ci :

$$(19)\quad \begin{cases} y[Az^3+(B+A_1)z^2+(C+B_1)z+C_1]\left(\dfrac{dy}{y}+\varphi' dz\right) \\ \qquad\qquad +[Dz^2+(E+D_1)z+E_1]\left(\dfrac{dy}{y}+\psi' dz\right)=0, \end{cases}$$

on en conclut immédiatement que *dans le cas particulier* où l'on aura

$$(20)\qquad \varphi'=\psi'=\frac{\varphi'+\psi'}{2},$$

ce qui arrive, lorsqu'on aura

$$(AD_1-A_1D)z^3+\begin{Bmatrix} BD_1-B_1D \\ +AE_1-A_1E \end{Bmatrix}z^2+\begin{Bmatrix} CD_1-C_1D \\ +BE_1-B_1E \end{Bmatrix}z+CE_1-C_1E=0,$$

et, par suite, dans le cas nouveau

(d) *Où les coefficients de l'équation* (5) *remplissent le système de conditions*

$$(21)\quad 0=AD_1-A_1D=\begin{Bmatrix} BD_1-B_1D \\ +AE_1-A_1E \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} CD_1-C_1D \\ +BE_1-B_1E \end{Bmatrix}=CE_1-C_1E$$

[sans que ni (15) ni (16) ne soient remplis], l'équation dont il s'agit ici (19) se réduira à

$$(19')\qquad [y(Az^3+\ldots)+(Dz^2+\ldots)]\left(\frac{dy}{y}+\frac{\varphi'+\psi'}{2}dz\right)=0,$$

et, par suite, son intégrale générale à

$$(22)\qquad ye^{\int_0^z \frac{\varphi'+\psi'}{2}dz}=\text{const.}=ye^{\frac{\varphi+\psi}{2}}\ \text{(pour abréger)}.$$

Mais, *en général*, en posant, pour abréger,

$[A]$ au lieu de $Az^3+(B+A_1)z^2+(C+B_1)z+C_1$,

$[D]$ . . . . . . $Dz^2+(E+D_1)z+E_1$,

u^2 . . . . . . $y\left(\text{d'où } \dfrac{dy}{y}=2\dfrac{du}{u}\right)$, on en réduit l'équation (19) à

$$u^2[\mathrm{A}]\left(\frac{du}{u}+\frac{\varphi'}{2}dz\right)+[\mathrm{D}]\left(\frac{du}{u}+\frac{\psi'}{2}dz\right)=0,$$

ou, en divisant par u,

$$[\mathrm{A}]\left(du+u\frac{\varphi'}{2}dz\right)-[\mathrm{D}]\left[d\left(\frac{1}{u}\right)-\frac{1}{u}\frac{\psi'}{2}dz\right]=0,$$

et, par suite, si l'on désigne le rapport $\frac{[\mathrm{D}]}{[\mathrm{A}]}$ par Z^2, à celle-ci :

$$(23)\qquad \frac{1}{\mathrm{Z}}\left(du+u\frac{\varphi'}{2}dz\right)-\mathrm{Z}\left[d\left(\frac{1}{u}\right)-\frac{1}{u}\frac{\psi'}{2}dz\right]=0.$$

Cela étant, si l'on pose encore

$$(24)\qquad v=\frac{u}{\mathrm{Z}},\quad \text{d'où}\quad \frac{1}{v}=\frac{\mathrm{Z}}{u},$$

d'où

$$\frac{1}{\mathrm{Z}}\,du=dv-ud\left(\frac{1}{\mathrm{Z}}\right)=dv+v\frac{d\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}},$$
$$\mathrm{Z}d\left(\frac{1}{u}\right)=d\left(\frac{1}{v}\right)-\frac{1}{u}d\mathrm{Z}=d\left(\frac{1}{v}\right)-\frac{1}{v}\frac{d\mathrm{Z}}{dz},$$

l'équation (23) et, par suite, l'équation (19) elle-même, se réduira à

$$(25)\qquad dv+v\left(\frac{\mathrm{Z}'}{\mathrm{Z}}+\frac{\varphi'}{2}\right)dz=d\left(\frac{1}{v}\right)-\frac{1}{v}\left(\frac{\mathrm{Z}'}{\mathrm{Z}}+\frac{\psi'}{2}\right)dz$$

$\left(\text{on a mis } \mathrm{Z}' \text{ au lieu de } \frac{d\mathrm{Z}}{dz}\right)$, vu qu'en effet,

$$(26)\left\{\begin{aligned}&\varphi'-\psi'=\frac{(\mathrm{AD}_1-\mathrm{A}_1\mathrm{D})z^3+\left(\begin{matrix}\mathrm{BD}_1-\mathrm{B}_1\mathrm{D}\\+\mathrm{AE}_1-\mathrm{A}_1\mathrm{E}\end{matrix}\right)z^2+\left(\begin{matrix}\mathrm{CD}_1-\mathrm{C}_1\mathrm{D}\\+\mathrm{BE}_1-\mathrm{B}_1\mathrm{E}\end{matrix}\right)z+\mathrm{CE}_1-\mathrm{C}_1\mathrm{E}}{[\mathrm{A}][\mathrm{D}]},\\&2\frac{\mathrm{Z}'}{\mathrm{Z}}=\frac{d[\mathrm{D}]}{[\mathrm{D}]}-\frac{d[\mathrm{A}]}{[\mathrm{A}]},\end{aligned}\right.$$

et, par suite,

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} & 2\left(\frac{Z'}{Z}+\frac{\varphi'}{2}\right) \\ & = \frac{[BD-A(E+D_1)]z^3+\begin{bmatrix} B_1D-A_1(E+D_1) \\ +2(CD-AE_1)\end{bmatrix}z^2+\begin{bmatrix} C(E+D_1)-BE_1 \\ +2(C_1D-A_1E_1)\end{bmatrix}z+C_1(E+D_1)-B_1E_1}{[A][D]}, \end{aligned}\right.$$

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} & 2\left(\frac{Z'}{Z}+\frac{\psi'}{2}\right) \\ & = \frac{\begin{bmatrix} BD-A(E+D_1) \\ -(AD_1-A_1D)\end{bmatrix}z^3+\begin{bmatrix} B_1D-A_1(E+D_1) \\ +2(CD-AE_1) \\ -\begin{pmatrix} BD_1-B_1D \\ +AE_1-A_1E\end{pmatrix}\end{bmatrix}z^2+\begin{bmatrix} C(E+D_1)-BE_1 \\ +2(C_1D-A_1E_1) \\ -\begin{pmatrix} CD_1-C_1D \\ +BE_1-B_1E\end{pmatrix}\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix} C_1(E+D_1)-B_1E_1 \\ -(CE_1-C_1E)\end{bmatrix}}{[A][D]}. \end{aligned}\right.$$

Maintenant, comme l'équation (25) peut s'écrire sous la forme

$$(29)\qquad \frac{d\left[ve^{\int_0^z\left(\frac{Z'}{Z}+\frac{\varphi'}{2}\right)dz}\right]}{e^{\int_0^z\left(\frac{Z'}{Z}+\frac{\varphi'}{2}\right)dz}} = \frac{d\left[\frac{1}{v}e^{-\int_0^z\left(\frac{Z'}{Z}+\frac{\psi'}{2}\right)dz}\right]}{e^{-\int_0^z\left(\frac{Z'}{Z}+\frac{\psi'}{2}\right)dz}},$$

on voit sans peine qu'il sera aisé de trouver son intégrale, non-seulement dans le cas que l'on vient de considérer (20), et, par suite, dans le cas particulier (d), où en effet l'équation (29) se réduit à

$$dw = e^{\int_0^z\left(2\frac{Z'}{Z}+\frac{\varphi'+\psi'}{2}\right)dz}\, d\left(\frac{1}{w}\right),$$

w designant $ve^{\int_0^z\left(\frac{Z'}{Z}+\frac{\varphi'+\psi'}{4}\right)dz}$, dont l'intégrale générale est

$$(30)\qquad w = \text{const} = ve^{\int_0^z\left(\frac{Z'}{Z}+\frac{\varphi'+\psi'}{4}\right)dz} = ue^{\frac{\varphi+\psi}{4}},$$

ou, en effet, la (22) elle-même, mais encore aussi dans les trois nouveaux cas suivants, savoir :

1°. Lorsque

$$\frac{Z'}{Z} + \frac{\varphi'}{2} \text{ est} = 0,$$

attendu qu'alors l'équation (29) se réduit d'abord à

$$(29') \qquad dv = \frac{d\left(\frac{1}{v} e^{\int_0^z \frac{\varphi' - \psi'}{2} dz}\right)}{e^{\int_0^z \frac{\varphi' - \psi'}{2} dz}} = \frac{d\left(\frac{1}{v} e^{\frac{\varphi - \psi}{2}}\right)}{e^{\frac{\varphi - \psi}{2}}},$$

puis, au moyen du facteur v, à

$$v dv = \frac{d\left(\frac{1}{v} e^{\frac{\varphi - \psi}{2}}\right)}{\frac{1}{v} e^{\frac{\varphi - \psi}{2}}},$$

et que, par suite, l'intégrale générale sera alors

$$(30') \qquad v^2 e^{v^2} = C e^{\varphi - \psi}.$$

2°. Lorsque

$$\frac{Z'}{Z} = \frac{\psi'}{2} \text{ est} = 0,$$

attendu que l'équation se réduit alors à

$$(29'') \qquad \frac{d\left(v e^{\frac{\varphi - \psi}{2}}\right)}{e^{\frac{\varphi - \psi}{2}}} = d\left(\frac{1}{v}\right),$$

laquelle, après division par v, fournira l'intégrale générale

$$(30'') \qquad \left(\frac{1}{v}\right)^2 e^{\left(\frac{1}{v}\right)} = C e^{\varphi - \psi};$$

et, enfin, 3° lorsque

$$(31)\qquad \mu\left(\frac{Z'}{Z}+\frac{\varphi'}{2}\right) \text{ est } = \rho\left(\frac{Z'}{Z}+\frac{\psi'}{2}\right),$$

(μ et ρ constantes), ou, ce qui revient au même,

$$(\mu-\rho)\frac{Z'}{Z} = -\left(\mu\frac{\varphi'}{2}-\rho\frac{\psi'}{2}\right),$$

partant, si l'on excepte le cas déjà traité $\mu=\rho$ (c'est-à-dire $\varphi'=\psi'$), lorsque

$$\frac{Z'}{Z} \text{ est } = -\frac{\mu\frac{\varphi'}{2}-\rho\frac{\psi'}{2}}{\mu-\rho},$$

et, par conséquent,

$$\frac{Z'}{Z}+\frac{\varphi'}{2} = -\frac{\rho}{\mu-\rho}\cdot\frac{\varphi'-\psi'}{2}, \qquad \frac{Z'}{Z}+\frac{\psi'}{2} = -\frac{\mu}{\mu-\rho}\cdot\frac{\varphi'-\psi'}{2}.$$

Dans ce cas, l'équation (29) se réduit d'abord à

$$\frac{d\left(ve^{-\frac{\rho}{\mu-\rho}\frac{\varphi-\psi}{2}}\right)}{e^{-\frac{\rho}{\mu-\rho}\frac{\varphi-\psi}{2}}} = \frac{d\left(\frac{1}{v}e^{\frac{\mu}{\mu-\rho}\frac{\varphi-\psi}{2}}\right)}{e^{\frac{\mu}{\mu-\rho}\frac{\varphi-\psi}{2}}},$$

ou bien, si l'on désigne ici par w l'une quelconque des expressions entre crochets [ ], et que par exemple on fasse

$$w = ve^{-\frac{\rho}{\mu-\rho}\frac{\varphi-\psi}{2}},$$

à celle-ci :

$$(29''')\qquad dw = e^{-\frac{\mu+\rho}{\mu-\rho}\frac{\varphi-\psi}{2}}\, d\left(\frac{1}{w}e^{\frac{\varphi-\psi}{2}}\right) = \left(e^{\frac{\varphi-\psi}{2}}\right)^{-\frac{\mu+\rho}{\mu-\rho}} d\left(\frac{1}{w}e^{\frac{\varphi-\psi}{2}}\right),$$

puis, au moyen du facteur $w^{\frac{\mu+\rho}{\mu-\rho}}$, à

$$w^{\frac{\mu+\rho}{\mu-\rho}}\, dw = \left(\frac{1}{w}e^{\frac{\varphi+\psi}{2}}\right)^{\frac{\mu-\psi}{\mu-\rho}} d\left(\frac{1}{w}e^{\frac{\varphi-\psi}{2}}\right);$$

d'où il suit que dans ce cas l'intégrale générale, si l'on excepte seulement les deux particularités $\frac{\mu+\rho}{\mu-\rho} = \pm 1$ [c'est-à-dire les deux cas précédents (1°) et (2°), savoir, $\rho = 0$, $\mu = 0$], se réduira à

$$\frac{\omega^{\frac{2\mu}{\mu-\rho}}}{\frac{2\mu}{\mu-\rho}} = \frac{\left(\omega e^{-\frac{\varphi-\psi}{2}}\right)^{\frac{2\rho}{\mu-\rho}}}{\frac{2\rho}{\mu-\rho}} + \text{const.},$$

c'est-à-dire, à

$$\mu\left[\upsilon^2 e^{-\frac{\mu}{\mu-\rho}(\varphi-\psi)}\right]^{\frac{\rho}{\mu-\rho}} + \rho\left[\upsilon^2 e^{-\frac{\rho}{\mu-\rho}(\varphi-\psi)}\right]^{\frac{\mu}{\mu-\rho}} = \text{const.}$$

ou bien

$$(30''') \qquad \mu(\upsilon^2)^{\frac{\rho}{\mu-\rho}} + \rho(\upsilon^2)^{\frac{\mu}{\mu-\rho}} = Ce^{\frac{\mu\rho}{(\mu-\rho)^2}(\varphi-\psi)},$$

qui sera ainsi l'intégrale de l'équation (29) ou (25), toutes les fois que la condition (31) est remplie, au moins si l'on excepte les trois cas particuliers,

$$(32) \qquad \mu = 0, \quad \rho = 0, \quad \mu - \rho = 0;$$

et dans ces derniers cas l'intégrale est fournie, respectivement, par les formules (30″), (30′) et (30).

Nota. En mettant dans (30‴) $\rho - \varpi$ au lieu de μ, on la réduit à

$$\left[\frac{\rho}{\varpi}(\upsilon^2+1) - 1\right](\upsilon^2)^{-\frac{\rho}{\varpi}} = Ce^{\frac{\rho}{\varpi}\left(\frac{\rho}{\varpi}-1\right)(\varphi-\psi)},$$

qui sera, par suite, l'intégrale de l'équation (29) ou (25), lorsque la condition (31) ou, ce qui revient au même, la condition

$$\frac{Z'}{Z} + \frac{\varphi'}{2} = \frac{\rho}{\varpi}\cdot\frac{\varphi'-\psi'}{2}$$

(ρ et ϖ constantes), sera remplie, au moins si l'on excepte les trois cas particuliers,

$$\rho - \varpi = 0, \quad \rho = 0, \quad \varpi = 0.$$

Et en posant ici, pour abréger, λ au lieu de $\frac{\rho}{\varpi}$, l'on voit bien que

$$(33) \qquad [\lambda(v^2+1)-1]v^{-2\lambda} = Ce^{\lambda(\lambda-1)(\varphi-\psi)},$$

sera l'intégrale de l'équation (29) ou (25), lorsque la condition

$$(34) \qquad \frac{Z'}{Z} + \frac{\varphi'}{2} = \lambda . \frac{\varphi' - \psi'}{2}$$

(λ étant une constante), sera remplie, au moins si l'on excepte les deux cas particuliers,

$$\lambda = 0, \quad \lambda = 1;$$

et dans ces cas enfin l'intégrale est fournie, respectivement, par les formules (30′) et (30″).

Cela étant, il importe d'observer que, tout comme l'égalité (20) renferme le cas (d), de même les trois égalités (1°), (2°), (3°), qu'on vient de considérer, renferment aussi trois nouveaux cas [autres que les précédents (a), (b), (c), (d)] dans lesquels on peut trouver sans peine l'intégrale de l'équation (19) ou de (5) elle-même, aucun des deux systèmes de conditions (15) et (16) n'étant rempli [*]. Effectivement, si dans les équations (30′), (30″), (33) au lieu de v^2 on remet encore $\frac{u^2}{z^2}$, c'est-à-dire $\frac{[A]}{[D]}y$, eu égard en outre aux formules (26), (27), (28), on obtiendra immédiatement le résultat suivant :

(e) *Dans le cas où les coefficients de l'équation* (5) *remplissent le système de conditions*

$$(35) \qquad \left\{ \begin{aligned} 0 &= BD - A(E+D_1) = \begin{bmatrix} B_1D - A_1(E+D_1) \\ +2(CD - AE_1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C(E+D_1) - BE_1 \\ +2(C_1D - AE_1) \end{bmatrix} = C_1(E+D_1) - B_1E, \end{aligned} \right.$$

[*] Et, par suite, aucune des deux quantités [A] et [D] n'étant pas non plus $= 0$.

son intégrale générale sera

$$(36)\qquad \frac{[A]y}{[D]}e^{\frac{[A]y}{[D]}} = Ce^{\varphi-\psi};$$

(f) *Lorsque les coefficients sont tellement composés que chacune des quatre expressions dans* (35) *soit* = *à celle des quatre dans* (21) *qui a le même nombre d'ordre*, l'intégrale sera

$$(36')\qquad \frac{[D]}{[A]y}e^{\frac{[D]}{[A]y}} = Ce^{\varphi-\psi};$$

et enfin

(g) *Dans le cas plus général où les quatre expressions dans* (35) *sont, non plus égales à, mais proportionnelles à celles de même nombre d'ordre parmi les quatre dans* (21), c'est-à-dire, où

$$(37)\qquad BD - A(E + D_1) \text{ soit } = \lambda(AD_1 - A_1 D), \ldots$$

(λ étant une constante, autre que o ou 1), l'intégrale générale sera

$$(36'')\qquad \left[\lambda\frac{[A]y}{[D]} + \lambda - 1\right]\left[\frac{[D]}{[A]y}\right]^{\lambda} = Ce^{\lambda(\lambda-1)(\varphi-\varphi)}.$$

Pour $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ on a bien, respectivement, les formules (36) et (36') elles-mêmes.

Reste à savoir si l'équation (29) ou (25), et, par conséquent, l'équation (19) ou (14) ou bien l'équation (5) elle-même est, ou n'est pas, intégrable *en général* (dans le sens ordinaire). Mais c'est bien dans ce détail-là que, comme nous l'avons dit précédemment, nous ne pouvons pas entrer ici.

5. Après avoir, suivant le plan précédemment indiqué du présent Mémoire, fait passer en revue les divers cas particuliers, dans lesquels l'intégrale de l'équation (5) se présente, pour ainsi dire, d'elle-même, nous observerons, en passant, que c'est parmi ces espèces mêmes de l'équation (5) que se trouve aussi celle de Jacobi précédemment citée (mais bien *sans* les termes F et F_1), savoir, l'équation (5''') elle-même, ce que l'on voit sans peine en la comparant à l'équation (β) dans la note sous l'introduction ci-dessus, et qu'en effet son intégrale

sera donnée toujours par l'équation ($17'''$), excepté seulement le cas très-particulier où ses coefficients remplissent en outre le système des conditions (16), dans lequel cas enfin l'intégrale est fournie par la formule ($17'$); et nous allons actuellement considérer l'équation complète (1), dans le but qui se trouve indiqué brièvement à la fin de l'introduction.

§ III.

6. Tout comme (*voy.* § I) l'équation complète (4) par la *position* (9), je veux dire en posant les équations (9), peut être ramenée à la forme ($4'$) toutes les fois qu'il existe des constantes finies α et β, propres à satisfaire aux deux conditions (10), de même aussi, comme on le voit aisément, l'équation complète (1) pourra, par la même position, être délivrée de ses termes F et F_1, et ainsi ramenée à la forme (5), savoir,

$$(38)\quad \left\{\begin{array}{l} o = \left\{ A\xi^2 + B\xi\eta + C\eta^2 + \begin{array}{r|r|} D & \xi + \;\; E \\ +2A\alpha & + \;\; B\alpha \\ + \;\; B\alpha & +2C\beta \end{array}\,\eta \right\} d\xi \\ \quad + \left\{ A_1\xi^2 + B_1\xi\eta + C_1\eta^2 + \begin{array}{r|r|} D & \xi + \;\; E_1 \\ +2A_1\alpha & + \;\; B_1\alpha \\ + \;\; B_1\beta & +2C_1\beta \end{array}\,\eta \right\} d\eta, \end{array}\right.$$

seulement, dans les cas où il existera effectivement des constantes finies α et β propres à satisfaire aux deux conditions suivantes :

$$(39)\quad \left\{\begin{array}{l} A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha + E\beta + F = o, \\ A_1\alpha^2 + B_1\alpha\beta + C_1\beta^2 + D_1\alpha + E_1\beta + F_1 = o. \end{array}\right.$$

Nota. S'il existait *toujours* de telles constantes α et β, on en pourrait définitivement conclure qu'il n'y aurait aucun moyen d'intégrer l'équation (5) *en général*, attendu qu'il est bien clair que, si *toute* équation (5) était intégrable, aussi *toute* équation (1) pourrait être rendue intégrable par ladite transformation (s'il existait bien toujours des constantes finies α et β); ce qui est pourtant de toute impossibilité, comme on le sait. Mais comme, au contraire, il n'existe pas toujours des constantes finies α et β, propres à satisfaire aux conditions (39), il n'y a pas non plus lieu de décider de cette manière la question de l'intégrabilité de l'équation (5) en général. Au reste, il est bien clair aussi que, s'il pouvait être montré que l'équation (1) dans quelqu'un des cas où elle n'est pas intégrable se ramène à la forme (5), ladite question serait aussi par là décidée.

De plus, les coefficients des ξ^2, $\xi\eta$, η^2 dans l'équation (38), que l'on obtient par la transformation ci-dessus, étant tout à fait identiques aux coefficients, respectivement, des x^2, xy, y^2 dans l'équation complète (1), on est par là conduit évidemment à chercher l'intégrale de *toute équation* (1) *dont les coefficients* A, B, C, A_1, B_1, C_1, *remplissent le système de conditions* (15), c'est-à-dire de l'équation *jacobique* (3) elle-même, sur la même voie, précisément où l'on parvient (*voy.* § 1) à l'intégrale de l'équation complète (4). Qu'en effet cette recherche réussisse parfaitement, c'est ce que nous allons montrer à présent.

7. En effet, en considérant l'équation différentielle

$$(40)\qquad \left\{\begin{array}{l} (Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F)\,dx \\ -(Bx^2 + Cxy - D_1 x - E_1 y - F_1)\,dy = 0, \end{array}\right.$$

on voit d'abord que, dans le cas particulier où les deux termes F, F_1 sont $= 0$ l'un et l'autre, cette équation se réduit à l'équation (5''') elle-même, qu'on vient de traiter ci-dessus dans le cas (c), et que, par suite, son intégrale sera donnée alors par la formule (17'''), ou bien, si en même temps le système de conditions (16) est rempli, par la formule (17').

Mais dans tout *autre* cas elle pourra, au moyen de la position (9), être délivrée de ses termes F et F_1, et en même temps réduite à la forme (5'''), savoir :

$$(41)\qquad 0 = \left\{ B\xi\eta + C\eta^2 + \left.\begin{array}{r} D \\ +B\beta \\ \end{array}\right| \xi + \left.\begin{array}{r} E \\ +B\alpha \\ +2C\beta \end{array}\right| \eta \right\} d\xi + \left\{ B\xi^2 + C\xi\eta - \left.\begin{array}{r} D_1 \\ +2B\alpha \\ +C\beta \end{array}\right| \xi - \left.\begin{array}{r} E_1 \\ +C\alpha \\ \end{array}\right| \eta \right\} d\eta,$$

toutes les fois qu'il existera des constantes finies α et β propres à satisfaire aux deux conditions

$$(42)\qquad \begin{cases} B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha + E\beta + F = 0,\\ B\alpha^2 + C\alpha\beta - D_1\alpha - E_1\beta - F_1 = 0;\end{cases}$$

et il sera montré ici qu'en effet, *dans les cas exceptionnels où il n'existe point de telles α et β, les variables dans l'équation* (40) *pourront être séparées immédiament, c'est-à-dire sans l'aide de ladite transformation.*

Pour cet effet, considérons en premier lieu le cas où

$$\text{B } \textit{n'est pas} = 0.$$

En divisant par B, les conditions (42) se réduisent à la forme

$$(43)\qquad \begin{cases} \alpha\beta + \mathcal{C}\beta^2 + \mathcal{D}\alpha + \mathcal{E}\beta + \mathcal{F} = 0,\\ \alpha^2 + \mathcal{C}\alpha\beta - \mathcal{D}_1\alpha - \mathcal{E}_1\beta - \mathcal{F}_1 = 0.\end{cases}$$

1°. *Lorsque* $\mathcal{D}$ *est* $= 0$, l'on pourra satisfaire à la première, savoir, à

$$(44)\qquad \alpha\beta = -(\mathcal{C}\beta^2 + \mathcal{E}\beta + \mathcal{F}),$$

En premier lieu, par $\beta = 0$, dans le seul cas $\mathcal{F} = 0$,

et alors l'autre, savoir, $\alpha^2 - \mathcal{D}_1\alpha - \mathcal{F}_1 = 0$ fournira toujours une valeur finie de α;

En second lieu, $\mathcal{F}$ n'étant pas $= 0$, par

$$\alpha = -\frac{\mathcal{C}\beta^2 + \mathcal{E}\beta + \mathcal{F}}{\beta},$$

à savoir, β n'étant pas $= 0$, et, du reste, en vertu de l'équation inférieure (43), donnée par

$$\left.\begin{array}{r}\mathcal{C}(\mathcal{E} - \mathcal{D}_1)\\ +\,\mathcal{E}_1\end{array}\right|\beta^3 + \left.\begin{array}{r}\mathcal{E}(\mathcal{E} + \mathcal{D}_1)\\ +\,\mathcal{C}\mathcal{F} - \mathcal{F}_1\end{array}\right|\beta^2 + \mathcal{F}(2\mathcal{E} + \mathcal{D}_1)\beta + \mathcal{F} = 0,$$

par conséquent toujours finie (autre que zéro), excepté seulement le cas très-particulier où les coefficients ici de β^3, β^2, β seraient $= 0$ tous ensemble, c'est-à-dire où l'on aurait

$$-\mathcal{D}_1 = 2\mathcal{E},\quad -\mathcal{E}_1 = \mathcal{C}\mathcal{E},\quad -\mathcal{F}_1 = \mathcal{E}^2 - \mathcal{C}\mathcal{F}.$$

Or dans ces cas l'équation (40), après division par B, se réduit à

$$[(x+\mathcal{E})y + \mathcal{C}y^2 + \mathcal{F}]dx - [(x+\mathcal{E})^2 + \mathcal{C}(x+\mathcal{E})y - \mathcal{C}\mathcal{F}]dy = 0,$$

ou, faisant $x + \mathcal{E} = \xi$, à

$$(\xi + \mathcal{C}y)(y d\xi - \xi dy) + \mathcal{F}(d\xi + \mathcal{C}dy) = 0,$$

et par suite, en posant $\xi + \mathcal{C}y = z$, à celle-ci :

$$z(ydz - zdy) + \mathcal{F}dz = 0,$$

dans laquelle on peut évidemment séparer les variables. — Ainsi, en résumé, dans ce dernier cas exceptionnel il n'y aura pas besoin, ni l'on ne le pourra non plus au moyen de la position (9), de délivrer l'équation *jacobique* de ses termes $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$; elle se réduit alors, après division par B, à l'aide de la position

$$x + \mathcal{C}y + \mathcal{E} = z, \tag{45}$$

à une équation où les variables y et z pourront être séparées aisément.

2°. *Lorsque, au contraire,* $\mathcal{D}$ *n'est pas* $= 0$, alors, comme la première des équations (43), savoir,

$$\alpha(\beta + \mathcal{D}) + \mathcal{C}\beta^2 + \mathcal{E}\beta + \mathcal{F} = 0,$$

où j'ai mis γ au lieu de $\beta + \mathcal{D}$, se ramène à la formule (44), savoir, à

$$\alpha\gamma = -[\mathcal{C}\gamma^2 + (\mathcal{E} - 2\mathcal{C}\mathcal{D})\gamma + \mathcal{C}\mathcal{D}^2 + \mathcal{F}], \tag{44'}$$

et en même temps la dernière (43) à

$$\alpha^2 + \mathcal{C}\alpha\gamma - (\mathcal{D}_1 + \mathcal{C}\mathcal{D})\alpha - \mathcal{E}_1\gamma + \mathcal{D}\mathcal{E}_1 - \mathcal{F}_1 = 0,$$

il est clair que le raisonnement demeurera bien le même que dans le cas précédent, pourvu que

Au lieu de β on dise ici γ,
» $\mathcal{E}$ » $\mathcal{E} - 2\mathcal{C}\mathcal{D}$,
» $\mathcal{F}$ » $\mathcal{F} + \mathcal{C}\mathcal{D}^2$,
» $\mathcal{D}_1$ » $\mathcal{D}_1 + \mathcal{C}\mathcal{D}$,
» $\mathcal{F}_1$ » $\mathcal{F}_1 - \mathcal{D}\mathcal{E}_1$.

Concevons, en second lieu, que

B *soit* $= 0$, *mais non pas* $\mathcal{C}$.

Comme alors l'équation de Jacobi (40) a la forme

$$(\mathrm{C}y^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F})dx - (\mathrm{C}xy - \mathrm{D}_1 x - \mathrm{E}_1 y - \mathrm{F}_1)dy = 0$$

(F et F_1 n'étant pas $= 0$ tous deux à la fois), ou, après division par C,

$$(40') \quad (y^2 + \mathcal{D}x + \mathcal{E}y + \mathcal{F})dx - (xy - \mathcal{D}_1 x - \mathcal{E}_1 y - \mathcal{F}_1)dy = 0,$$

et qu'en même temps les équations de conditions (42), après division par C, se réduisent à celles-ci :

$$(46) \qquad \begin{cases} \beta^2 + \mathcal{D}\alpha + \mathcal{E}\beta + \mathcal{F} = 0, \\ \alpha\beta - \mathcal{D}_1\alpha - \mathcal{E}_1\beta - \mathcal{F}_1 = 0; \end{cases}$$

l'on en conclura, 1° *lorsque* $\mathcal{D}$ *n'est pas* $= 0$,

$$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{\beta^2 + \mathcal{E}\beta + \mathcal{F}}{\mathcal{D}}, \\ \beta^3 + (\mathcal{E} - \mathcal{D}_1)\beta^2 + (\mathcal{D}\mathcal{E}_1 - \mathcal{D}_1\mathcal{E} + \mathcal{F})\beta + \mathcal{D}\mathcal{F}_1 - \mathcal{D}_1\mathcal{F} = 0, \end{cases}$$

par conséquent toujours des valeurs finies de α et β ; et

2°. *Lorsque* $\mathcal{D}$ *est* $= 0$, il est clair que l'on pourra prendre pour β l'une quelconque des deux

$$-\frac{\mathcal{E}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathcal{E}^2}{4} - \mathcal{F}\right)},$$

et que par suite, en vertu de la dernière (46), ou

$$(\beta - \mathcal{D}_1)\alpha = \mathcal{E}_1\beta + \mathcal{F}_1,$$

l'on aura toujours une valeur finie de α correspondante, au moins si l'on en excepte le seul cas où les deux expressions

$$-\left(\mathcal{D}_1 + \frac{\mathcal{E}}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\mathcal{E}^2}{4} - \mathcal{F}\right)}$$

sont $=0$ l'une et l'autre, c'est-à-dire le cas où l'on a à la fois

$$\mathfrak{D}_1 = -\frac{\mathcal{E}}{2}, \quad \mathcal{F} = \frac{\mathcal{E}^2}{4}.$$

Or dans ce cas exceptionnel l'équation (40′) se réduit à

$$\left(y + \frac{\mathcal{E}}{2}\right)^2 dx - \left[\left(y + \frac{\mathcal{E}}{2}\right)x - \mathcal{E}_1 y - \mathcal{F}_1\right] dy = 0,$$

ou bien, par la position $y + \frac{\mathcal{E}}{2} = \eta$, à

$$\eta(\eta dx - x d\eta) + \left[\mathcal{E}_1\left(\eta - \frac{\mathcal{E}}{2}\right) + \mathcal{F}_1\right] d\eta = 0,$$

dans laquelle on pourra évidemment séparer les variables.

Enfin, pour ce qui concerne le cas

$$B = 0 = C,$$

il suffit de rappeler qu'il est déjà traité dans ce qui a été dit (§ **1**) de l'équation différentielle (4).

8. Après avoir ainsi montré *que* et *combien* pour l'espèce particulière de l'équation (1) que fournit effectivement l'équation de Jacobi (3), et, par suite, aussi celle d'Euler (2), l'intégration peut s'effectuer d'une manière tout à fait analogue à celle dont on se sert ordinairement pour l'équation (4), il ne nous reste plus, pour l'effet qui se trouve indiqué dans l'Introduction de ce Mémoire, qu'à ajouter enfin quelques mots des espèces de l'équation complète (1) qui correspondent aux espèces de l'équation (5), dont se constituent les divers cas particuliers désignés (§ **2**) par les lettres (b), (d), (e), (f) [*].

Pour trouver les espèces de l'équation complète (1) dont il s'agit ici, il faudrait, à la rigueur, chercher quelles sont, parmi les équations de la forme (1), celles qui, par la position (9), se laissent réduire à des équations (5) composées comme celles des cas qu'on vient de nommer. Cependant nous ne pouvons pas avoir ici l'intention de poursuivre cette recherche en détail; dans les lignes suivantes nous ne ferons que men-

---

[*] Il est bon de remarquer ici, en passant, qu'en effet l'équation de Jacobi est *la seule* des espèces de l'équation (1) qui, à l'aide de la position (9), puisse se réduire à une équation (5) telle que celle dont se constitue le cas (c).

tionner seulement deux des espèces en question, pour faire juger, au moins, combien une pareille recherche pourrait offrir d'intérêt.

(A) Pour apprendre quelles sont, parmi les équations complètes (1) [*], celles qui au moyen de la position (9) pourront être transformées en de *telles* équations (5) dont les coefficients remplissent le système de conditions (16), il suffit d'observer, 1° que par ladite position l'on pourra en effet réduire l'équation (1) à la forme (5), savoir à (38), toutes les fois qu'il existera des constantes finies, α et β, propres à satisfaire aux conditions (39); et 2° que, pour la nouvelle équation ainsi obtenue, le système de conditions (16) se réduira évidemment au suivant :

$$(16')\qquad \left\{\begin{array}{l} D + 2A\alpha + B\beta = 0, \\ \left.\begin{array}{r} D_1 + 2A_1\alpha + B_1\beta \\ + E + B\alpha + 2B\beta \end{array}\right\} = 0, \\ E_1 + B_1\alpha + 2C_1\beta = 0. \end{array}\right.$$

En effet, on en peut conclure définitivement qu'il n'y a pas d'autres équations complètes (1) propres à se laisser réduire, au moyen de la position (9), à la forme en question, que celles dont les coefficients, et en même temps des quantités finies α et β, remplissent à la fois et les conditions (39) et les trois précédentes (16'), ou, ce qui revient au même, les cinq conditions suivantes [**] :

$$(47)\qquad \left\{\begin{array}{l} A\alpha^2 - C\beta^2 - E\beta - F = 0, \\ A_1\alpha^2 - C_1\beta^2 + D_1\alpha + F_1 = 0, \\ D + 2A\alpha + B\beta = 0, \\ \left.\begin{array}{r} D_1 + 2A_1\alpha + B_1\beta \\ + E + B\alpha + 2C\beta \end{array}\right\} = 0, \\ E_1 + B_1\alpha + 2C_1\beta = 0; \end{array}\right.$$

---

[*] Évidemment nous entendons parler des équations (1) où les termes F et F_1 ne manquent pas tous les deux à la fois.

[**] On voit bien aisément que les deux premières d'entre elles ne sont que le résultat qu'on obtient en éliminant des équations (39) les lettres D et E_1, au moyen de la première et de la troisième des formules (16').

d'où l'on voit aussi en outre qu'il n'y a pas d'autres équations complètes (1), *dont les coefficients* EUX-MÊMES *satisfassent au système de conditions* (16), c'est-à-dire des équations de la forme

$$\begin{gathered}(\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + \mathrm{E}y + \mathrm{F})\,dx \\ + (\mathrm{A}_1 x^2 + \mathrm{B}_1 xy + \mathrm{C}_1 y^2 + \mathrm{E}x + \mathrm{F}_1)\,dy = 0\end{gathered}$$

(F et F_1 n'étant pas $= 0$ tous les deux à la fois), qui soient réductibles, au moyen de la position (9), à la forme dont il s'agit ici, que celles dont les coefficients, conjointement avec des quantités finies α et β, remplissent les cinq conditions suivantes :

$$(47') \quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}\alpha^2 - \mathrm{C}\beta^2 - \mathrm{E}\beta - \mathrm{F} = 0, \\ \mathrm{A}_1\alpha^2 - \mathrm{C}_1\beta^2 - \mathrm{E}\alpha + \mathrm{F}_1 = 0, \\ 2\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta = 0, \\ \left.\begin{array}{l} \quad 2\mathrm{A}_1\alpha + \mathrm{B}_1\beta \\ + \quad \mathrm{B}\alpha + 2\mathrm{C}\beta \end{array}\right\} = 0, \\ \mathrm{B}_1\alpha + 2\mathrm{C}_1\beta = 0. \end{array}\right.$$

(B) Comme pour l'équation (38) provenant de la position (9), le système de conditions (21) se réduit à

$$(21') \quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{AD}_1 - \mathrm{A}_1\mathrm{D} + (\mathrm{AB}_1 - \mathrm{A}_1\mathrm{B})\beta = 0, \\ \left.\begin{array}{l} \mathrm{AE}_1 - \mathrm{A}_1\mathrm{E} \\ + \mathrm{BD}_1 - \mathrm{B}_1\mathrm{D} \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l} (\mathrm{AB}_1 - \mathrm{A}_1\mathrm{B})\alpha \\ -2(\mathrm{AC}_1 - \mathrm{A}_1\mathrm{C})\beta \end{array}\right\} = 0, \\ \left.\begin{array}{l} \mathrm{BE}_1 - \mathrm{B}_1\mathrm{E} \\ + \mathrm{CD}_1 - \mathrm{C}_1\mathrm{D} \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l} 2(\mathrm{AC}_1 - \mathrm{A}_1\mathrm{C})\alpha \\ -(\mathrm{BC}_1 - \mathrm{B}_1\mathrm{C})\beta \end{array}\right\} = 0, \\ \mathrm{CE}_1 - \mathrm{C}_1\mathrm{E} - (\mathrm{BC}_1 - \mathrm{B}_1\mathrm{C})\alpha = 0, \end{array}\right.$$

on en peut conclure, de même que dans le cas précédent, qu'il n'y a pas d'autres équations complètes (1) réductibles au moyen de la position (9) à des équations de la forme (5) dont les coefficients remplissent le système des conditions (21), que celles dont les coefficients, et en même temps des quantités finies α et β, satisfont aux six conditions (39) et (21′).

Par exemple. Comme le système de conditions (21) étant rempli par les coefficients de l'équation complète (1) *eux-mêmes*, le système (21′) se réduit à

$$(21'') \qquad o = AB_1 - A_1B = AC_1 - A_1C = BC_1 - B_1C,$$

quelques valeurs finies qui soient assignées aux α et β (pourtant pas *zéro* à tous les deux à la fois), on peut énoncer définitivement qu'il n'y a pas d'autres équations complètes (1), *dont les coefficients eux-mêmes satisfont au système des conditions* (21), propres à être réduites, au moyen de la position (9), à des équations de la même espèce *sans* termes F et F_1, que celles où ces coefficients sont propres à remplir en même temps les conditions (21″) [*].

---

[*] Évidemment il n'en faut pas conclure, réciproquement, que chaque équation complète (1) dont les coefficients remplissent à la fois les deux systèmes (21) et (21″), se laisserait transformer toujours comme il vient d'être dit, par la position (9); en effet, le contraire s'est fait voir déjà par l'équation (7), dans la note sous l'Introduction ci-dessus; la propriété de satisfaire aux conditions (21) et (21″) est bien une condition *nécessaire*, mais non pas une condition *suffisante*, en tous cas, pour la possibilité de la transformation citée.

FIN DU TOME TROISIÈME (2e SÉRIE).

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
Rue du Jardinet, 12.