JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. ROUCHÉ

Mémoire sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de mécanique relatifs au mouvement d'un point sur une surface

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 337-356.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__337_0>

MÉMOIRE

SUR

LES INTÉGRALES COMMUNES A PLUSIEURS PROBLÈMES DE MÉCANIQUE RELATIFS AU MOUVEMENT D'UN POINT SUR UNE SURFACE;

PAR M. E. ROUCHÉ,

Ancien élève de l'École Polytechnique, Professeur au lycée Charlemagne.

Introduction.

1. Tous les géomètres connaissent les belles recherches de M. Bertrand sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de mécanique. Le Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 12 mai 1851, et inséré dans le tome XVII du *Journal* de M. Liouville, renferme trois parties, suivant que le point considéré se meut dans un plan, sur une surface ou dans l'espace indéfini. C'est à la seconde partie que se rapporte mon travail.

M. Bertrand a démontré cette proposition remarquable :

Pour que les équations du mouvement d'un point placé sur une surface aient une intégrale indépendante du temps et commune à plusieurs problèmes, il faut que la surface soit applicable sur une surface de révolution.

Mais les conclusions relatives aux intégrales communes qui dépendent du temps sont loin d'être aussi simples. Il semble qu'on doive considérer deux formes d'intégrales qui imposent à la surface, l'une la condition d'être applicable sur une surface de révolution, l'autre celle d'avoir, par rapport à une série de lignes géodésiques coordonnées et à leurs trajectoires orthogonales, un élément linéaire de la forme

$$ds^2 = adm^2 + bdn^2,$$

où b est une constante et a l'expression compliquée

$$a = \frac{1}{\psi_1(m) + \mathrm{F}(n).\psi_2(m)}$$

qui renferme trois fonctions arbitraires.

Je me propose de montrer qu'on peut encore, dans ce second cas relatif aux intégrales qui dépendent du temps, tout réduire à un théorème unique, analogue au précédent, et dont voici l'énoncé :

Pour que les équations du mouvement d'un point placé sur une surface aient une intégrale dépendante du temps et commune à plusieurs problèmes, il faut que le carré de la distance de deux points infiniment voisins, par rapport à une certaine série de lignes géodésiques coordonnées et à leurs trajectoires orthogonales, soit de la forme

$$ds^2 = dr^2 + \frac{d\omega^2}{\mathrm{R} - k\omega},$$

où k est une constante et R *une fonction de la variable r seule.*

Les surfaces pour lesquelles ces conditions sont remplies, ont un degré de généralité qui n'excède pas celui des surfaces de révolution; le mouvement de la génératrice est réglé par des constantes.

Pour que mon travail présente un ensemble complet, je reprendrai entièrement le problème relatif au mouvement d'un point placé sur une surface; il y a peut-être quelque intérêt à retrouver d'une autre manière le premier théorème.

Je diviserai cette étude en cinq paragraphes, dont voici les titres :

1°. *Notions empruntées à la théorie des surfaces;*

2°. *Equations du mouvement;*

3°. *Calculs communs aux deux sortes d'intégrales;*

4°. *Intégrales indépendantes du temps;*

5°. *Intégrales qui dépendent du temps.*

2. Avant de commencer, il convient de dire un mot sur la forme des intégrales.

Le temps, ne figurant dans les équations du mouvement que par sa différentielle, doit entrer dans les intégrales ajouté à une constante; par suite, dans les équations qui font connaître en fonction du temps les coordonnées et les composantes de la vitesse du point mobile, l'une des constantes est combinée au temps par voie d'addition; et lorsqu'on résoudra ces équations par rapport aux constantes, en éliminant pour cela toutes les constantes excepté une, le temps ne subsistera que si la constante non éliminée est celle dont il est inséparable.

Dans ce dernier cas, en cherchant la valeur de cette contante α, le calcul donnera forcément la valeur de $\alpha + t$. Toutes les intégrales seront donc indépendantes du temps et de la forme

$$\alpha = \mathrm{F},$$

excepté une qui aura pour expression

$$\alpha + t = \mathrm{F},$$

F étant une fonction qui ne contient pas le temps, mais seulement les coordonnées du point et leurs dérivées. Il résulte de là que l'on peut toujours représenter une intégrale quelconque par

$$\alpha = \mathrm{F},$$

en se rappelant que $\frac{d\alpha}{dt}$ est o ou -1.

I.

Notions empruntées à la théorie des surfaces.

3. On peut déterminer la position d'un point sur une surface au moyen de deux séries de lignes tracées sur cette surface. AQ_1 et AQ_2 étant deux lignes, l'une de la première série, l'autre de la seconde, une ligne quelconque $\mathrm{P}_1\mathrm{M}$ de la deuxième série sera définie par une fonction q_1 de l'arc AP_1 intercepté sur la ligne fixe AQ_1, et une ligne quelconque $\mathrm{P}_2\mathrm{M}$ de la première série sera définie par une fonction q_2 de l'arc AP_2 intercepté sur AQ_2. Les variables q_1 et q_2, qui peuvent ne pas différer des arcs AP_1 et AP_2 eux-mêmes, seront les *coordonnées curvilignes* du point M.

Pour achever de définir un tel système de coordonnées, il faut fixer encore le sens des q_1 et q_2 positifs. On y parvient aisément par la considération de la *normale extérieure*.

Une surface partage en général l'espace entre deux régions, dont l'une, d'ailleurs arbitrairement choisie, est dite *extérieure*, tandis que l'autre prend le nom d'*intérieure*. Pour tous les points d'une même région, le premier membre de l'équation de la surface a le même signe, et ce signe change quand on passe d'une région à l'autre. On dispose ordinairement du premier membre de l'équation de manière qu'il soit positif pour les points de la région qu'on veut considérer comme extérieure.

Dès lors, si AN est la portion de la normale en A à la surface qui est située dans la région extérieure, on convient de compter les parties positives AQ_1, AQ_2, de telle façon, que ces deux directions AQ_1 et AQ_2 et la normale extérieure AN soient respectivement situées par rapport au point A, comme le sont ordinairement les parties positives des trois axes de coordonnées rectilignes, considérées dans l'ordre OX, OY, OZ, par rapport au point O. En d'autres termes, la partie positive AQ_2 est vue à droite de la partie positive AQ_1 par un observateur placé le long de AN, les pieds en A, la tête en N.

4. Cela posé, les coordonnées x, y, z des divers points de la surface, par rapport à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, sont des fonctions des deux coordonnées curvilignes q_1 et q_2; et l'élément linéaire MM'

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

d'une courbe quelconque C tracée sur la surface s'obtiendra en fonction de q_1 et de q_2 en remplaçant dx, dy, dz respectivement par

$$\frac{dx}{dq_1}dq_1 + \frac{dx}{dq_2}dq_2,$$

$$\frac{dy}{dq_1}dq_1 + \frac{dy}{dq_2}dq_2,$$

$$\frac{dz}{dq_1}dq_1 + \frac{dz}{dq_2}dq_2.$$

On trouve ainsi

$$(1) \qquad ds^2 = E\,dq_1^2 + 2F\,dq_1\,dq_2 + G\,dq_2^2,$$

en posant, pour abréger,

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} E &= \left(\frac{dx}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq_1}\right)^2, \\ F &= \frac{dx}{dq_1}\cdot\frac{dx}{dq_2} + \frac{dy}{dq_1}\cdot\frac{dy}{dq_2} + \frac{dz}{dq_1}\,\frac{dz}{dq_2}, \\ G &= \left(\frac{dx}{dq_2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq_2}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq_2}\right). \end{aligned}\right.$$

5. Les fonctions E, F, G ont des valeurs indépendantes de la position du système rectiligne auxiliaire OX, OY, OZ, qui a servi à les obtenir; car l'expression de l'élément ds ne doit pas en dépendre. Elles se prêtent à une interprétation géométrique simple.

Selon que l'on fait varier seulement q_1 ou q_2, l'arc $ds = \mathrm{MM'}$ se confond avec l'arc $\mathrm{MM}_1 = ds_1$ ou $\mathrm{MM}_2 = ds_2$ de l'une des deux lignes coordonnées du point M, et l'on a

$$(3) \qquad ds_1 = \sqrt{\mathrm{E}}\,dq_1, \qquad ds_2 = \sqrt{\mathrm{G}}\,dq_2.$$

D'ailleurs, si l'on désigne par θ l'angle des côtés ds_1, ds_2, le parallélogramme infiniment petit $\mathrm{MM_1M'M_2}$ donne

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + 2\,ds_1\,ds_2\cos\theta,$$

ou, à cause des valeurs (1) et (3),

$$(4) \qquad \mathrm{F}^2 = \mathrm{EG}\cos\theta.$$

6. Dans le cas de deux systèmes (q_1), (q_2) orthogonaux, on a

$$(5) \qquad \begin{cases} \cos\theta = 0, \quad \mathrm{F} = 0, \\ ds^2 = \mathrm{E}\,dq_1^2 + \mathrm{G}\,dq_2^2. \end{cases}$$

7. Lorsque deux courbes ont un élément commun ds, les deux éléments qui suivent ds sur ces courbes respectives forment un angle infiniment petit dv que M. Liouville nomme angle de contingence relatif; le rapport $\frac{dv}{ds}$ mesure la courbure ou déviation relative de ces deux courbes, et le rapport inverse mesure, par analogie, le rayon de cette courbure.

En particulier, M. Liouville a donné le nom de *courbure géodésique* à la courbure relative d'une courbe $mnp\ldots$, tracée sur une surface, et de la *ligne géodésique* ou *minima* qui a même tangente.

Supposons les éléments successifs mn, np, etc., égaux entre eux et à l'unité de longueur; prolongeons mn de $nt = mn$, projetons t en q sur la surface et joignons tp, nq, pq. La droite nt, faisant un angle infiniment petit avec la surface, est sensiblement égale à sa projection nq.

Or nq est le second élément de la ligne géodésique $mnq\ldots$, tangente à $mnp\ldots$, et osculatrice de la section faite dans la surface par le plan mnp. Donc le triangle rectangle infinitésimal tpq donne par ses trois côtés tp, tq, qp : 1° la courbure absolue de $mnp\ldots$, qui est aussi celle de la section oblique faite dans la surface par le plan mnp des deux premiers éléments; 2° la courbure absolue de la section normale correspondante mnq; 3° la courbure géodésique de $mnp\ldots$. Par suite, si l'on désigne par θ l'angle tpq qui n'est autre que l'angle du plan osculateur de $mnp\ldots$, avec le plan tangent, on aura

$$\frac{tq}{tp} = \sin\theta, \qquad \text{et} \qquad \frac{qq}{tp} \quad \text{ou} \quad \frac{R}{\rho} = \cos\theta.$$

La première relation exprime le théorème de Meusnier; la seconde fournit la valeur du rayon de courbure géodésique ρ.

8. Remarquons que la courbure géodésique d'une courbe en un quelconque de ses points est égale à la courbure ordinaire de la projection de cette courbe sur le plan tangent en ce point.

Il résulte de là que, *si l'on suppose la surface découpée en rectangles infiniment petits par deux séries de lignes orthogonales* (q_1), (q_2), *on aura* (en projetant sur le plan tangent en M, c'est-à-dire sur les deux éléments MM_1, MM_2, et désignant par ρ_1 le rayon de courbure de la projection de la courbe P_1MM_2),

$$\frac{MM_2}{\rho_1} = \frac{M_1M'}{\rho_1 - MM_1} = \frac{M_1M' - MM_2}{-MM_1},$$

et, par suite,

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{M_1M' - MM_2}{MM_1 . MM_2} \tag{6}$$

pour la courbure géodésique de la ligne coordonnée (q_1) *du point* M.

9. La formule (6) montre que les conditions

$$\frac{1}{\rho_1} = 0, \qquad M_1M' = MM_2$$

sont des conséquences l'une de l'autre. Donc :

Si une série de courbes (q_2) *tracées sur une surface sont telles, que les distances de deux courbes infiniment voisines* (q_2) *et* $(q_2 + dq_2)$ *quelconques soient constantes, leurs trajectoires orthogonales* (q_1) *sont des lignes géodésiques.*

Et à l'inverse, *étant données sur une surface deux séries de lignes orthogonales* (q_1), (q_2), *si les lignes* (q_1) *sont géodésiques, deux courbes quelconques de l'autre série* (q_2) *seront équidistantes* (les distances étant comptées suivant les lignes géodésiques).

10. Il résulte de là que, si l'on prend pour lignes coordonnées des lignes géodésiques et leurs trajectoires orthogonales, on pourra indiquer la position d'une ligne géodésique coordonnée quelconque par l'arc m intercepté sur une trajectoire orthogonale déterminée à partir d'un point fixe de cette trajectoire, et une trajectoire orthogonale quelconque par la longueur commune n des lignes géodésiques comptée à partir de la trajectoire orthogonale fixe. Dans ce système, l'élément linéaire d'une courbe quelconque tracée sur la surface prendra la forme simple

$$ds^2 = dn^2 + \frac{1}{\mu} dm^2,$$

où μ désigne une fonction de m et de n.

11. Deux surfaces S et S′ étant données, la condition nécessaire et suffisante pour qu'elles se composent de triangles égaux, et soient par suite applicables l'une sur l'autre, est qu'on puisse établir entre les divers points M et M′ de ces deux surfaces une correspondance telle, qu'on ait toujours $ds = ds'$.

Or en désignant par σ l'arc du méridien d'une surface de révolution, et par θ l'angle compris entre un méridien quelconque et un méridien fixe, on a

$$ds^2 = d\sigma^2 + b^2 \varphi(\sigma)\, d\theta^2$$

pour l'élément linéaire d'une courbe quelconque tracée sur la surface. Si ρ est le rayon du parallèle, et z l'abscisse comptée sur l'axe de révolution, on aura ainsi

$$\rho = b\sqrt{\varphi(\sigma)}, \qquad z = \int d\sigma \sqrt{1 - \frac{b^2 \varphi'(\sigma)^2}{4\varphi(\sigma)}};$$

en sorte que, si la constante b est prise assez petite, la surface sera réelle.

Donc, *Si une surface est telle, que, par rapport à une certaine série de lignes géodésiques coordonnées* (ω), *et à leurs trajectoires orthogonales* (r), *l'élément linéaire d'une courbe quelconque est de la forme*

$$(7) \qquad ds^2 = dr^2 + \frac{d\omega^2}{R},$$

R *étant une fonction de la variable* r *seule, la surface sera applicable sur une surface de révolution.*

Nous nous bornerons à ces notions qui nous sont seules nécessaires, en renvoyant aux *Disquisitiones circa superficies curvas* de Gauss, aux notes dont M. Liouville a enrichi l'*Analyse* de Monge, et au précieux Mémoire de M. O. Bonnet *sur la théorie générale des surfaces* (*Journal de l'École Polytechnique,* XXXII^e Cahier).

II.

Équations du mouvement.

12. Soit M un point matériel dont la masse est prise pour unité, et qui se meut sur une surface, sous l'influence d'une force dont les composantes par rapport aux axes coordonnés des x, y, z sont X, Y, Z.

Lorsque aux variables x, y, z on substitue les paramètres q_1, q_2 des lignes coordonnées orthogonales qui découpent la surface en rectangles, la demi-force vive T a pour expression

$$(8) \qquad T = \frac{1}{2}\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{1}{2}(Eq_1'^2 + Gq_2'^2),$$

où q'_1, q'_2 désignent les dérivées de q_1 et q_2 par rapport au temps; et les équations du mouvement sont, d'après les formules générales de la *Mécanique analytique,*

$$(9) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{dq'_1}\right) - \frac{dT}{dq_1} &= Q_1, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{dq'_2}\right) - \frac{dT}{dq_2} &= Q_2, \end{aligned}\right.$$

avec les relations

$$(10)\qquad \begin{cases} Q_1 = X\dfrac{dx}{dq_1} + Y\dfrac{dy}{dq_1} + Z\dfrac{dz}{dq_1}, \\ Q_2 = X\dfrac{dx}{dq_2} + Y\dfrac{dy}{dq_2} + Z\dfrac{dz}{dq_2}. \end{cases}$$

L'introduction de la valeur (8) de T donne aux équations du mouvement la forme définitive

$$(11)\qquad Eq''_1 + \frac{1}{2}\frac{dE}{dq_1}q'^2_1 + \frac{dE}{dq_2}q'_1 q'_2 - \frac{1}{2}\frac{dG}{dq_1}q'^2_2 = Q_1,$$

$$(12)\qquad Gq''_2 + \frac{1}{2}\frac{dG}{dq_2}q'^2_2 + \frac{dG}{dq_1}q'_1 q'_2 - \frac{1}{2}\frac{dE}{dq_2}q'^2_1 = Q_2.$$

III.

Calculs communs aux deux sortes d'intégrales.

13. Étant donnée une intégrale

$$(13)\qquad \alpha \quad \text{ou} \quad \alpha + t = F(q_1, q_2, q'_1, q'_2)$$

des équations du mouvement, on peut en général en déduire l'expression des forces qui produisent le mouvement, et, par suite, trouver le problème qui a conduit à cette intégrale. La solution de cette question suppose seulement que les composantes de la force puissent s'exprimer en fonction des coordonnées du point. Mais, dans certains cas, la méthode tombe en défaut; elle conduit pour les forces à des expressions indéterminées; ces cas sont les seuls où l'intégrale puisse convenir à plusieurs problèmes.

Entrons dans les détails.

14. En différentiant l'équation (13) par rapport à t, on a

$$0 \quad \text{ou} \quad +1 = \frac{d\alpha}{dq_1}q'_1 + \frac{d\alpha}{dq_2}q'_2 + \frac{d\alpha}{dq'_1}q''_1 + \frac{d\alpha}{dq'_2}q''_2,$$

et, en remplaçant q''_1, q''_2 par leurs valeurs tirées des équations du mouvement (11) et (12),

$$(\text{A})\qquad \begin{cases} 0 \quad \text{ou} \quad +1 = \dfrac{d\alpha}{dq_1}q'_1 + \dfrac{d\alpha}{dq_2}q'_2 \\ \qquad + \dfrac{1}{E}\dfrac{d\alpha}{dq'_1}\left[Q_1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{dG}{dq_1}q'^2_2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{dE}{dq_1}q'^2_1 - \dfrac{dE}{dq_2}q'_1 q'_2\right] \\ \qquad + \dfrac{1}{G}\dfrac{d\alpha}{dq'_2}\left[Q_2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{dE}{dq_2}q'^2_1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{dG}{dq_2}q'^2_2 - \dfrac{dG}{dq_1}q'_1 q'_2\right]; \end{cases}$$

Q_1 et Q_2, qui sont des fonctions de q_1 et de q_2, et qui dépendent des forces accélératrices, n'entrent qu'au premier degré.

Cette relation (A) ne contenant que t, q_1, q_2, q'_1, q'_2 auxquelles on peut attribuer des valeurs arbitraires et indépendantes les unes des autres (car on peut se donner arbitrairement à une époque quelconque les coordonnées du point M et les composantes de sa vitesse), doit être *une identité*. On peut donc la différentier par rapport à q'_1 et q'_2, et former deux équations nouvelles, qui, renfermant aussi Q_1 et Q_2 au premier degré, permettront en général de déterminer la valeur de ces inconnues.

Avant de différentier, mettons l'égalité (A) sous la forme

$$o = M + \frac{1}{E}\frac{d\alpha}{dq'_1}Q_1 + \frac{1}{G}\frac{d\alpha}{dq'_2}Q_2.$$

Dès lors, en différentiant successivement par rapport à q'_1 et q'_2, on trouve

$$o = \frac{dM}{dq'_1} + \frac{1}{E}\frac{d^2\alpha}{dq'^2_1}Q_1 + \frac{1}{G}\frac{d^2\alpha}{dq'_2\,dq'_1}Q_2,$$

$$o = \frac{dM}{dq'_2} + \frac{1}{E}\frac{d^2\alpha}{dq'_1\,dq'_2}Q_1 + \frac{1}{G}\frac{d^2\alpha}{dq'^2_2}Q_2.$$

Q_1 et Q_2 devant satisfaire à ces trois équations, auront des valeurs déterminées, à moins que deux de ces équations ne rentrent dans la troisième. Donc le seul cas où l'intégrale (13) puisse convenir à plusieurs problèmes est celui où les coefficients de Q_1 et de Q_2 dans les trois équations précédentes sont proportionnels, c'est-à-dire le cas où l'on a

$$\frac{\frac{d^2\alpha}{dq'^2_1}}{\frac{d\alpha}{dq'_1}} = \frac{\frac{d^2\alpha}{dq'_2\,dq'_1}}{\frac{d\alpha}{dq'_2}}, \quad \frac{\frac{d^2\alpha}{dq'_1\,dq'_2}}{\frac{d\alpha}{dq'_1}} = \frac{\frac{d^2\alpha}{dq'^2_2}}{\frac{d\alpha}{dq'_2}}.$$

Les fonctions

$$\log\frac{d\alpha}{dq'_1} \quad \text{et} \quad \log\frac{d\alpha}{dq'_2}$$

ont alors les mêmes dérivées par rapport à q'_1 et q'_2; la différence de ces logarithmes, c'est-à-dire le logarithme du quotient

$$\frac{\frac{d\alpha}{dq'_1}}{\frac{d\alpha}{dq'_2}},$$

et par suite ce quotient lui-même, doit être indépendant de q'_1 et q'_2, et n'être fonction que de q_1 et q_2; on a donc, en désignant par $\varphi(q_1, q_2)$ cette fonction,

$$\frac{d\alpha}{dq'_1} - \varphi(q_1, q_2)\cdot\frac{d\alpha}{dq'_2} = 0.$$

Pour intégrer cette équation aux différentielles partielles du premier ordre, on prend le système

$$\frac{d\alpha}{0} = \frac{dq'_1}{1} = \frac{dq'_2}{-\varphi},$$

qui montre que l'intégrale α, considérée relativement aux variables q'_1 et q'_2, est une fonction de

$$q'_2 + \varphi\cdot q'_1.$$

Donc une intégrale ne saurait être commune à plusieurs problèmes si elle ne rentre dans la forme

$$(14) \qquad \alpha \quad \text{ou} \quad \alpha + t = \mathrm{F}[q_1, q_2, q'_2 + \varphi(q_1, q_2)q'_1].$$

15. La somme

$$q'_2 + \varphi(q_1, q_2)q'_1,$$

multipliée par un certain facteur, peut toujours devenir une dérivée exacte m'. Adoptons pour lignes coordonnées les courbes (m), et leurs trajectoires orthogonales (n).

L'intégrale considérée prend la forme

$$\alpha \quad \text{ou} \quad \alpha + t = \mathrm{F}(m, n, m');$$

on a d'ailleurs

$$ds^2 = \frac{1}{\mu}dm^2 + \frac{1}{\nu}dn^2,$$

et l'équation (A), dans laquelle on remplace q_1 par m, q_2 par n, E par $\frac{1}{\mu}$, G par $\frac{1}{\nu}$, $\frac{d\alpha}{dq'_2}$ par o, devient

$$(\mathrm{A}_1)\quad \begin{cases} 0 \text{ ou } +1 = \dfrac{d\alpha}{dm}m' + \dfrac{d\alpha}{dn}n' \\ \qquad + \dfrac{d\alpha}{dm'}\left[\mu Q_1 - \dfrac{\mu}{2\nu^2}\dfrac{d\nu}{dm}n'^2 + \dfrac{1}{2\mu}\dfrac{d\mu}{dm}m'^2 + \dfrac{1}{\mu}\dfrac{d\mu}{dn}m'n'\right]. \end{cases}$$

Dans cette équation, qui doit être identique, n' n'entre qu'explicitement; on peut donc égaler à zéro séparément les coefficients de n' et de n'^2; on obtient ainsi les deux relations

$$(15)\qquad \frac{d\nu}{dm} = 0,$$

$$(16)\qquad \frac{d\alpha}{dn} + \frac{1}{\mu}\frac{d\alpha}{dm'}\frac{d\mu}{dn}m' = 0.$$

La première prouve que ν ne contient pas m et ne dépend que de n; la distance

$$\frac{dn}{\sqrt{\nu}}$$

des deux courbes (n), $(n+dn)$ est donc indépendante de m. Ces deux courbes sont donc équidistantes; et, en vertu du n° **9**, *leurs trajectoires orthogonales* (m) *sont des lignes géodésiques*.

La seconde (16) donne

$$\frac{d\alpha}{0} = \frac{dn}{1} = \frac{dm'}{\dfrac{m'}{\mu}\dfrac{d\mu}{dn}},$$

et par suite

$$\alpha = C, \qquad \frac{dm'}{m'} = \frac{\dfrac{d\mu}{dn}dn}{\mu}, \qquad \frac{m'}{\mu} = C_1;$$

elle montre donc que l'intégrale α, considérée relativement aux variables m' et n, est une fonction de

$$\frac{m'}{\mu}.$$

Nous substituerons, pour plus de facilité, à m' la variable u, définie par la relation

$$\frac{m'}{\mu} = u,$$

et nous aurons pour la forme de l'intégrale

$$(17) \qquad \alpha \quad \text{ou} \quad \alpha + t = \mathrm{F}(m, u).$$

16. Les courbes (m) étant des lignes géodésiques, on peut (n° **10**) dans l'élément linéaire réduire le coefficient de dn^2 à l'unité, c'est-à-dire prendre

$$ds^2 = dn^2 + \frac{1}{\mu} dm^2,$$

où μ est une fonction de m et de n.

Dès lors, si l'on profite de cette simplification qui donne $\nu = 1$, si de plus on a égard à la relation (16) et à la formule

$$\frac{d\alpha}{dm'} = \frac{d\alpha}{du}\frac{du}{dm'} = \frac{1}{\mu}\frac{d\alpha}{du},$$

qui résulte de la définition de la nouvelle variable u, l'équation (A_1) prend la forme

$$(\mathrm{A}_2) \qquad 0 \quad \text{ou} \quad +1 = \frac{d\alpha}{dm}\mu u + \frac{d\alpha}{du}\left(\mathrm{Q}_1 - \frac{1}{2}u^2\frac{d\mu}{dm}\right).$$

Rappelons que α est une fonction de m et de u, et que Q_1 et μ sont des fonctions de m et de n. La différentiation de (A_1), par rapport à la variable u, donne

$$(18) \qquad 0 = \frac{d^2\alpha}{dm\,du}\mu u + \frac{d\alpha}{dm}\mu + \frac{d^2\alpha}{du^2}\left[\mathrm{Q}_1 - \frac{1}{2}u^2\frac{d\mu}{dm}\right] - u\frac{d\mu}{dm}\frac{d\alpha}{du},$$

et si entre cette relation et (A_2) on élimine la parenthèse, ce qui se fait en multipliant (A_2) par $-\frac{d^2\alpha}{du^2}$ et (18) par $\frac{d\alpha}{du}$ et ajoutant, on obtient l'équation

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\text{o ou } -\frac{d^2\alpha}{du^2} = -u\frac{d\mu}{dm}\left(\frac{d\alpha}{du}\right)^2 \\ &\qquad + \mu\left[u\left(\frac{d^2\alpha}{dm\,du}\frac{d\alpha}{du} - \frac{d^2\alpha}{du^2}\frac{d\alpha}{dm}\right) + \frac{d\alpha}{dm}\frac{d\alpha}{du}\right],\end{aligned}\right.$$

qui va nous permettre de déterminer la forme de la fonction μ. Mais pour cela il faut distinguer deux cas, suivant que cette équation différentielle du premier ordre a pour premier membre o ou $\frac{d^2\alpha}{du^2}$, c'est-à-dire suivant que l'intégrale étudiée doit être indépendante du temps ou contenir le temps.

IV.

Intégrales indépendantes du temps.

17. Lorsque l'intégrale ne renferme pas le temps, le premier membre de l'équation (19) est zéro, et on peut donner à cette équation la forme

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dm} = \frac{1}{u\left(\frac{d\alpha}{du}\right)^2}\left[\frac{d\alpha}{dm}\frac{d\alpha}{du} + u\left(\frac{d^2\alpha}{dm\,du}\frac{d\alpha}{du} - \frac{d^2\alpha}{du^2}\frac{d\alpha}{dm}\right)\right].$$

Or μ est une fonction des variables m et n seules; elle ne contient pas u; le second membre ne dépend au contraire que de u et de m, il ne renferme pas n, car α n'est fonction que de m et de u : on doit conclure de là que la variable u disparaît d'elle-même dans le second membre, et que l'expression

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dm} = \frac{d}{dm}(\log\mu)$$

est une fonction de m seul. On a donc, en intégrant,

$$\log\mu = \log M + \log N,$$
$$\mu = M.N,$$

M et N étant deux fonctions, l'une de m, l'autre de n.

Par conséquent, l'élément des trajectoires orthogonales des lignes géodésiques (m) a pour expression

$$\frac{dm}{\sqrt{\mathrm{MN}}} = \frac{\frac{dm}{\sqrt{\mathrm{M}}}}{\sqrt{\mathrm{N}}}.$$

Or on peut toujours poser

$$\int \frac{dm}{\sqrt{\mathrm{M}}} = \omega; \tag{20}$$

et l'on voit, en désignant par r la variable n, de façon que les nouvelles variables qui servent de paramètres au système de coordonnées soient ω et r, que l'élément linéaire d'une courbe quelconque tracée sur la surface a une expression de la forme

$$ds^2 = dr^2 + \frac{d\omega^2}{\mathrm{R}},$$

où R est une fonction de r seul.

Donc, d'après ce que nous avons dit au n° **11**, *la surface est applicable sur une surface de révolution.*

C'est le théorème de M. Bertrand.

18. Il reste à calculer Q_1 et à trouver la forme générale de l'intégrale.

En désignant par u l'ancienne variable u multipliée par $\sqrt{\mathrm{M}}$, l'intégrale prend la forme

$$\alpha = \mathrm{F}(\omega, u),$$

et l'équation (A) à laquelle il faut actuellement revenir se réduit à

$$0 = \frac{d\alpha}{d\omega}\mathrm{R}u + \frac{d\alpha}{du}\mathrm{Q}_1, \tag{A$_3$}$$

dans notre nouveau système de variables. Elle donne

$$\mathrm{Q}_1 = -\frac{\frac{d\alpha}{d\omega}}{\frac{d\alpha}{du}}u\mathrm{R}.$$

Or Q_1 étant une fonction de ω et de r, et le second membre dépendant de ω, u, R, il faut que u disparaisse de lui-même, et par suite que le coefficient de R, qui est d'ailleurs indépendant de r, soit une fonction de ω seulement. On peut toujours représenter une telle fonction par une dérivée Ω'; nous aurons donc

$$Q_1 = -R\Omega'. \tag{21}$$

Cette notation est plus commode pour la recherche de la forme de l'intégrale.

19. Eu égard à cette valeur de Q_1, l'équation (A_3) devient

$$o = \frac{d\alpha}{d\omega}u - \frac{d\alpha}{du}\Omega'.$$

L'intégration dépend du système simultané

$$\frac{d\alpha}{o} = \frac{d\omega}{u} = -\frac{du}{\Omega'},$$

d'où

$$\alpha = C,$$

$$o = \Omega' d\omega + udu, \quad \frac{1}{2}u^2 + \Omega = C_1,$$

en sorte qu'on a

$$\alpha = F\left(\frac{1}{2}u^2 + \Omega\right),$$

ou simplement

$$\alpha = \frac{1}{2}u^2 + \Omega;$$

car il revient au même d'écrire qu'une expression est constante ou qu'une fonction de cette expression est constante.

D'ailleurs on a

$$\frac{u}{\sqrt{M}} = \frac{m'}{\mu} = \frac{m'}{MN},$$

et, par suite, à cause de l'équation (20),

$$u^2 = \frac{\omega'^2}{R^2}.$$

L'intégrale a donc la forme définitive

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{\omega'^2}{R^2} + \Omega. \tag{22}$$

V.

Intégrales qui dépendent du temps.

20. Lorsque l'intégrale considérée doit contenir le temps, l'équation (19) est une équation différentielle linéaire avec second membre, qui prouve que la fonction μ est de la forme

$$\mu = \mathrm{M} + \mathrm{M}_1 \mathrm{N},$$

M et M_1 étant deux fonctions de m, et N une fonction de n. Les termes en u, dans le second membre, doivent d'ailleurs s'entre-détruire, puisque μ ne dépend que de m et de n.

L'élément des trajectoires orthogonales des lignes géodésiques (m) prend alors la forme

$$\frac{dm}{\sqrt{\mathrm{M} + \mathrm{N}\mathrm{M}_1}} = \frac{\frac{dm}{\sqrt{\mathrm{M}_1}}}{\sqrt{\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}_1} + \mathrm{N}}},$$

ou

$$\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega_1 + \mathrm{R}}};$$

en posant

$$(23) \qquad \int \frac{dm}{\sqrt{\mathrm{M}_1}} = \omega,$$

appelant r la variable n, de façon à avoir ω et r pour paramètres des lignes coordonnées, et désignant par Ω_1 et R deux fonctions, l'une de ω, l'autre de r.

L'intégrale a d'ailleurs la forme $\left(\text{en changeant } u \text{ en } \frac{u}{\sqrt{\mathrm{M}_1}}\right)$

$$\alpha + t = \mathrm{F}(\omega, u);$$

et, dans ce nouveau système de variables, l'équation(A_1) à laquelle il convient actuellement de revenir, se réduit à

$$(\mathrm{A}_1) \qquad +1 = \frac{d\alpha}{d\omega}(\mathrm{R} + \Omega_1)u + \frac{d\alpha}{du}\left(\mathrm{Q}_1 - \frac{1}{2}u^2\Omega'_1\right);$$

d'où l'on déduit

$$Q_1 = -Ru\frac{\frac{d\alpha}{d\omega}}{\frac{d\alpha}{du}} + \frac{1}{2}u^2\Omega'_1 - \frac{1}{\frac{d\alpha}{du}}\left(\frac{d\alpha}{d\omega}\Omega_1 u - 1\right).$$

Q_1 ne dépendant que de ω et de r, u doit disparaître de lui-même dans le second membre, et l'on doit avoir

$$(24) \qquad Q_1 = -R\Omega'_2 + \Omega_3,$$

Ω'_2 et Ω_3 étant deux fonctions de ω; nous mettons la première sous la forme d'une dérivée, pour faciliter les calculs suivants.

21. Cette valeur de Q_1 transforme l'équation (A_4) en la suivante :

$$(A_5) \qquad -1 = \frac{d\alpha}{d\omega}(R+\Omega_1)u + \frac{d\alpha}{du}\left(-R\Omega'_2 + \Omega_3 - \frac{1}{2}u^2\Omega'_1\right),$$

dans laquelle la variable r figure explicitement, car elle n'entre que dans R. Égalant donc à zéro le coefficient de R et le terme indépendant, on trouve les deux relations

$$(25) \qquad u\frac{d\alpha}{d\omega} - \frac{d\alpha}{du}\Omega'_2 = 0,$$

$$(26) \qquad 1 + \frac{d\alpha}{d\omega}\Omega_1 u + \frac{d\alpha}{du}\left(\Omega_3 - \frac{1}{2}u^2\Omega'_1\right) = 0.$$

La première donne

$$\frac{d\alpha}{0} = \frac{d\omega}{u} = \frac{du}{-\Omega'_2};$$

d'où

$$\alpha = C,$$

$$\Omega'_2 d\omega + udu = 0, \quad \Omega_2 + \frac{1}{2}u^2 = C_1,$$

en sorte qu'on a pour l'intégrale

$$(27) \qquad \alpha + t = F\left(\frac{1}{2}u^2 + \Omega_2\right).$$

22. Posons

$$(28) \qquad \Omega_2 + \frac{1}{2}u^2 = v;$$

par ce changement de variable, l'équation (26), après élévation au carré et eu égard aux formules

$$\frac{d\alpha}{du} = \frac{d\alpha}{dv}u, \quad \frac{d\alpha}{d\omega} = \frac{d\alpha}{dv}\Omega'_2,$$

devient

$$(29) \qquad \frac{1}{2\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2} = (v - \Omega_2)[\Omega'_2\Omega_1 + \Omega_3 - (v - \Omega_2)\Omega'_1]^2.$$

Le premier membre ne dépend que de v; il doit donc en être de même du second, qui est un polynôme du troisième degré en v. Ce polynôme est ici décomposé en facteurs; pour qu'il ne depende que de v, il faut que les racines de l'équation, qu'on obtiendrait en annulant ce polynôme en v, soient constantes; donc on a déjà, à cause du premier facteur,

$$\Omega_2 = \text{constante} = p.$$

Le second facteur se réduit à

$$[\Omega_3 - (v - p)\Omega'_1],$$

et il donne à son tour

$$\Omega'_1 = \text{constante} = -k;$$

d'où

$$\Omega_1 = -k\omega + h,$$

et

$$\Omega_3 = \text{constante} = g.$$

On a donc

$$(30) \qquad 1^\circ. \quad Q_1 = g,$$

c'est la condition imposée aux forces;

$$2^\circ. \quad \Omega_1 + R = R - k\omega$$

(car la constante h passe dans R), et, par suite,

$$(31) \qquad ds^2 = dr^2 + \frac{d\omega^2}{R - k\omega},$$

c'est la forme que nous avions annoncée pour l'élément linéaire dans l'introduction.

Telles sont les conditions imposées aux forces et à la surface pour qu'il existe une intégrale commune à plusieurs problèmes et qui dépende du temps.

23. Voici, pour finir, comment on trouve la forme de cette intégrale. L'équation (29) donne

$$\frac{1}{2\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2} = (v-p)\,[g+(v-p)k]^2;$$

d'où

$$d\alpha = \frac{dv}{\sqrt{2(v-p)}\,[g+(v-p)k]},$$

ou, à cause de $2(v-p) = u^2$,

$$d\alpha = \frac{du}{g+\frac{1}{2}ku^2},$$

et par suite, en intégrant,

$$\alpha + t = \sqrt{\frac{2}{gk}}\cdot \operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{k}{2g}}\,u.$$

D'ailleurs on a

$$u = \frac{m'\sqrt{M_1}}{\mu} = \frac{\frac{m'}{\sqrt{M_1}}}{\left(\sqrt{\frac{M}{M_1}}+N\right)^2} = \frac{\omega'}{R-k\omega},$$

et l'intégrale prend la forme définitive

$$\alpha + t = \sqrt{\frac{2}{gk}}\cdot \operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{k}{2g}}\,\frac{\omega'}{R-k\omega}.$$