JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BESGE

Sur deux intégrales définies doubles

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 324.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__324_0>

SUR

DEUX INTÉGRALES DÉFINIES DOUBLES;

PAR M. BESGE.

Soient a et b deux constantes, et x, y deux variables continues de 0 à 1. Posons

$$\alpha = \frac{\sqrt{xy(1-y)}}{(1+\sqrt{1+ax})\sqrt{1+by}}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{y(1-y)(1-x)}}{1+\sqrt{1+ax}},$$

et

$$\gamma = \frac{\sqrt{xy(1-y)}}{(1+\sqrt{1+bx})\sqrt{1+ay}}, \qquad \delta = \frac{\sqrt{y(1-y)(1-x)}}{1+\sqrt{1+bx}},$$

expressions dont les deux dernières se déduisent des deux premières par une simple permutation des constantes a et b.

Je trouve que les deux intégrales définies doubles

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{f(\alpha, \beta)\, dx\, dy}{x(1-x)\sqrt{y(1-y)}}$$

et

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{f(\gamma, \delta)\, dx\, dy}{x(1-x)\sqrt{y(1-y)}},$$

sont égales entre elles, quelle que soit la fonction f, pourvu cependant qu'elle soit telle, que les deux intégrales citées aient un sens précis et représentent en géométrie des volumes finis.

On peut démontrer ce théorème de plusieurs manières. Bornons-nous à indiquer le développement des fonctions $f(\alpha, \beta)$, $f(\gamma, \delta)$ suivant les puissances des variables α, β ou γ, δ.