JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

TCHEBICHEF

Sur les fractions continues

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 289-323.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__289_0>

SUR LES FRACTIONS CONTINUES;

Par M. TCHEBICHEF [*].

TRADUIT DU RUSSE PAR M. I.-J. BIENAYMÉ.

PRÉSENTÉ LE 12 JANVIER 1855 A L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE SAINT-PÉTERSBOURG.

Au mois d'octobre de l'année dernière, j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences un des résultats de mes recherches sur l'interpolation : c'était une formule qui représente approximativement une fonction cherchée, d'après plusieurs de ses valeurs particulières, et dont les coefficients sont déterminés par les conditions de la *Méthode des moindres carrés*. Cette formule, comme on le voit par mon écrit inséré dans le *Bulletin de l'Académie* (t. XIII, n° 13) sous le titre de *Note sur une formule d'Analyse*, s'obtient à l'aide du développement d'une certaine fonction en fraction continue. Ajournant ce qui touche aux conséquences de cette formule relatives à l'interpola-

[*] M. Tchebichef a considéré le Mémoire dont nous donnons la traduction comme se rattachant aux fractions continues. Mais on verra que ce Mémoire traite réellement d'un procédé d'interpolation par la méthode des moindres carrés. Le problème de l'auteur ne diffère en effet que par l'énoncé de ceux que se sont posés, d'une part Legendre ou Gauss, en demandant que la somme des carrés des premiers membres d'un système d'équations fût réduite au minimum : de l'autre Laplace, en cherchant le minimum des erreurs dont se trouvent affectées les solutions de ce système, obtenues à l'aide de multiplicateurs linéaires.

On peut voir p. 306-307 du XVIII^e volume de ce journal (ou bien *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 4 juillet 1853) qu'il est toujours possible d'interpoler une série quelconque par la méthode des moindres carrés. On trouve, en résolvant les équations, les fonctions que Gauss a distinguées le premier, et qui se présentaient si naturellement dans la théorie des équations du premier degré. Lorsqu'au lieu de donner un certain nombre de valeurs de la fonction à interpoler, on la regarde comme continue entre deux limites données, les fonctions signalées par Gauss (et qui sont celles que M. Cauchy a désignées par Δ dans le II^e volume de ce Journal), ces fonctions deviennent aussi continues, au moins entre ces limites. Elles tion, jusqu'à la fin de mes recherches sur ce sujet, je vais la considérer ici dans ses rapports avec les fractions continues, comme exprimant une propriété particulière de ces fractions.

Je commencerai par la déduction de la formule que j'avais présentée sans démonstration dans l'écrit cité tout à l'heure. Ensuite je ferai voir ce qu'on peut en tirer relativement aux propriétés des fractions convergentes qu'on obtient en développant de certaines fonctions en fractions continues.

§ I.

Nous commencerons nos recherches par la solution de la question suivante :

On connaît des valeurs de la fonction $\mathrm{F}(x)$ *pour* $(n+1)$ valeurs de la variable, $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, *et l'on suppose que la fonction puisse être représentée par la formule*

$$a + bx + cx^2 + \ldots + gx^{m-1} + hx^m,$$

l'exposant m ne surpassant pas n. Il s'agit de trouver les coefficients de la formule en les assujettissant à ne laisser aux erreurs des valeurs $\mathrm{F}(x_0)$, $\mathrm{F}(x_1)$, $\mathrm{F}(x_2)$, ..., $\mathrm{F}(x_n)$, *que la moindre influence possible sur une valeur quelconque* $\mathrm{F}(\mathrm{X})$.

---

satisfont alors à des équations aux différentielles partielles du second ordre, et ce sont les fonctions mêmes qui ont été discutées par MM. Sturm et Liouville dans plusieurs beaux Mémoires (*voir* notamment les deux premiers volumes de ce Journal). Toutes les fonctions que MM. Sturm et Liouville ont indiquées par la lettre V, satisfont aux conditions de la méthode des moindres carrés, et fournissent autant de procédés d'interpolation, jouissant d'un minimum d'erreurs; de même que la formule trigonométrique de Fourier, qui a été employée par Bessel. Réciproquement les coefficients que détermine la méthode des moindres carrés jouissent des propriétés qui appartiennent aux fonctions V. C'est là ce qui rattache cette méthode à l'ensemble des théories analytiques dont elle paraîtrait isolée par son origine, due au calcul des probabilités. Le travail de M. Tchebichef, en reliant aux fractions continues une classe au moins des fonctions ou des coefficients mis en évidence par Gauss dans la *Méthode des moindres carrés*, répand une clarté nouvelle sur les liens cachés qui réunissent les diverses parties de l'analyse des séries ou de l'interpolation. Ce sont ces considérations qui nous ont porté à traduire ce morceau, intéressant d'ailleurs à d'autres égards. I.-J. BIENAYMÉ.

On obtient immédiatement cette suite d'équations

$$
\begin{aligned}
F(x_0) &= a + bx_0 + cx_0^2 + \ldots + gx_0^{m-1} + hx_0^m,\\
F(x_1) &= a + bx_1 + cx_1^2 + \ldots + gx_1^{m-1} + hx_1^m,\\
F(x_2) &= a + bx_2 + cx_2^2 + \ldots + gx_2^{m-1} + hx_2^m,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
F(x_n) &= a + bx_n + cx_n^2 + \ldots + gx_n^{m-1} + hx_n^m.
\end{aligned}
$$

Pour exprimer la valeur de $F(X)$ à l'aide de ces équations, nous les multiplierons par des facteurs indéterminés $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, et nous en prendrons la somme

$$
\begin{aligned}
&\lambda_0 F(x_0) + \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) + \ldots + \lambda_n F(x_n)\\
= {}& a(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)\\
+ {}& b(\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n)\\
+ {}& c(\lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2)\\
+ {}& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+ {}& g(\lambda_0 x_0^{m-1} + \lambda_1 x_1^{m-1} + \lambda_2 x_2^{m-1} + \ldots + \lambda_n x_n^{m-1})\\
+ {}& h(\lambda_0 x_0^m + \lambda_1 x_1^m + \lambda_2 x_2^m + \ldots + \lambda_n x_n^m).
\end{aligned}
$$

Si, maintenant, nous comparons cette somme à l'expression de $F(X)$, qui doit être

$$F(X) = a + bX + cX^2 + \ldots + gX^{m-1} + hX^m,$$

nous trouverons que pour assurer la relation

$$F(X) = \lambda_0 F(x_0) + \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) + \ldots + \lambda_n F(x_n),$$

il suffit que les facteurs $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ satisfassent aux équations

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n &&= 1,\\
&\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots\ldots + \lambda_n x_n &&= X,\\
&\lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots\ldots + \lambda_n x_n^2 &&= X^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda_0 x_0^{m-1} + \lambda_1 x_1^{m-1} + \lambda_2 x_2^{m-1} + \ldots + \lambda_n x_n^{m-1} &&= X^{m-1},\\
&\lambda_0 x_0^m + \lambda_1 x_1^m + \lambda_2 x_2^m + \ldots\ldots + \lambda_n x_n^m &&= X^m.
\end{aligned}
\right.
$$

Lorsque $m = n$, ces équations déterminent complétement les facteurs $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, puisque le nombre des unes et des autres est le même. Dans ce cas le système de facteurs ainsi calculé est le seul qui puisse former les coefficients de l'expression générale

$$F(x) = \lambda_0 F(x_0) + \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) + \ldots + \lambda_n F(x_n).$$

Si, au contraire, $m < n$, ces équations pourront être satisfaites d'une infinité de manières, et chaque système de valeurs assignées aux facteurs $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, dans la formule

$$F(x) = \lambda_0 F(x_0) + \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) + \ldots + \lambda_n F(x_n),$$

fournira une expression différente de $F(X)$. Mais, d'après la dernière condition du problème, il faut choisir, parmi toutes les expressions de $F(X)$, celle dans laquelle les erreurs des valeurs $F(x_0)$, $F(x_1)$, $F(x_2), \ldots, F(x_n)$ ont le minimum d'influence sur la grandeur cherchée $F(x)$. Or on sait, par la théorie des probabilités, qu'on parviendra à ce but, en assujettissant les facteurs $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de $F(X)$ à réduire au minimum la somme

$$k_0^2 \lambda_0^2 + k_1^2 \lambda_1^2 + k_2^2 \lambda_2^2 + \ldots + k_n^2 \lambda_n^2,$$

dans laquelle $k_0^2, k_1^2, k_2^2, \ldots, k_n^2$ désignent des quantités proportionnelles aux moyennes des carrés des erreurs des valeurs $F(x_0)$, $F(x_1)$, $F(x_2), \ldots, F(x_n)$. On voit que, pour plus de généralité, nous supposons différentes les unes des autres les lois des erreurs de ces $(n+1)$ quantités. Si la loi de probabilité est la même pour toutes, on a dans ce cas

$$k_0 = k_1 = k_2 = \ldots = k_n,$$

et l'on peut réduire ces multiplicateurs à l'unité.

La solution de la question se trouve ramenée par ce qui précède à exprimer $F(X)$ par la formule

$$F(X) = \lambda_0 F(x_0) + \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) + \ldots + \lambda_n F(x_n);$$

en déterminant les facteurs λ par les équations (1), et par la condition du minimum de la somme

$$k_0^2\lambda_0^2 + k_1^2\lambda_1^2 + k_2^2\lambda_2^2 + \ldots + k_n^2\lambda_n^2.$$

Remarquons, en passant, que cette condition peut être étendue au cas même, dans lequel $m = n$. Car les facteurs λ sont alors complétement déterminés par les équations (1), et la condition du minimum de la somme des carrés n'exige plus rien; ce qui s'accorde avec ce qui a déjà été dit de ce cas particulier.

Arrivant au calcul des facteurs $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, supposons que $\theta(x)$ soit une fonction entière de x, qui pour les valeurs $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ de x, prenne respectivement les valeurs $\frac{1}{k_0}, \frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \ldots, \frac{1}{k_n}$. La somme

$$k_0^2\lambda_0^2 + k_1^2\lambda_1^2 + k_2^2\lambda_2^2 + \ldots + k_n^2\lambda_n^2$$

s'écrira sous la forme

$$\frac{\lambda_0^2}{\theta^2(x_0)} + \frac{\lambda_1^2}{\theta^2(x_1)} + \frac{\lambda_2^2}{\theta^2(x_2)} + \cdots + \frac{\lambda_n^2}{\theta^2(x_n)}.$$

Pour déterminer, par la condition du minimum de cette somme, les quantités $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, liées entre elles par les équations (1), nous en prendrons la différentielle, et, suivant le procédé ordinaire des minima et maxima, nous l'égalerons à la somme des différentielles des équations (1), multipliées chacune par des arbitraires $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ respectivement. Égalant ensuite les termes qui auront pour facteurs $d\lambda_0, d\lambda_1, d\lambda_2, \ldots, d\lambda_n$, nous trouvons les $(n+1)$ équations

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2\lambda_0}{\theta^2(x_0)} = \mu_0 + \mu_1 x_0 + \mu_2 x_0^2 + \ldots + \mu_m x_0^m, \\ \dfrac{2\lambda_1}{\theta^2(x_1)} = \mu_0 + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_1^2 + \ldots + \mu_m x_1^m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{2\lambda_n}{\theta^2(x_n)} = \mu_0 + \mu_1 x_n + \mu_2 x^2 + \ldots + \mu_m x_n^m. \end{array}\right.$$

Réunies aux équations (1), les équations (2) déterminent complétement les $(n+1)$ inconnues $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, et les $(m+1)$ arbitraires $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$.

Ainsi toute la difficulté est ramenée à la solution de ces équations. Voici le procédé particulier que nous emploierons pour y parvenir.

§ II.

En posant $\varphi(x) = \frac{\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \ldots + \mu_m x^m}{2}$, nous transformons les équations (2) en celles-ci :

$$\frac{\lambda_0}{\theta^2(x_0)} = \varphi(x_0), \quad \frac{\lambda_1}{\theta^2(x_1)} = \varphi(x_1), \ldots, \frac{\lambda_n}{\theta^2(x_n)} = \varphi(x_n);$$

et nous en tirons

$$(3)\quad \lambda_0 = \theta^2(x_0)\varphi(x_0), \quad \lambda_1 = \theta^2(x_1)\varphi(x_1), \ldots, \quad \lambda_n = \theta^2(x_n)\varphi(x_n).$$

Transportant ces valeurs dans les équations (1), elles prendront la forme

$$\begin{aligned}
&\theta^2(x_0)\varphi(x_0) + \theta^2(x_1)\varphi(x_1) + \ldots\ldots + \theta^2(x_n)\varphi(x_n) &&= 1,\\
&x_0\theta^2(x_0)\varphi(x_0) + x_1\theta^2(x_1)\varphi(x_1) + \ldots + x_n\theta^2(x_n)\varphi(x_n) &&= X,\\
&x_0^2\theta^2(x_0)\varphi(x_0) + x_1^2\theta^2(x_1)\varphi(x_1) + \ldots + x_n^2\theta^2(x_n)\varphi(x_n) &&= X^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_0^{m-1}\theta^2(x_0)\varphi(x_0) + x_1^{m-1}\theta^2(x_1)\varphi(x_1) + \ldots + x_n^{m-1}\theta^2(x_n)\varphi(x_n) &&= X^{m-1},\\
&x_0^m\theta^2(x_0)\varphi(x_0) + x_1^m\theta^2(x_1)\varphi(x_1) + \ldots + x_n^m\theta^2(x_n)\varphi(x_n) &&= X^m.
\end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de remarquer, sous cette forme, que les premiers membres sont les coefficients de $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \ldots, \frac{1}{x^m}, \frac{1}{x^{m+1}}$, dans la série qu'on obtient en développant, suivant les puissances décroissantes de x, la fonction

$$\frac{\theta^2(x_0)\varphi(x_0)}{x-x_0} + \frac{\theta^2(x_1)\varphi(x_1)}{x-x_1} + \ldots + \frac{\theta^2(x_n)\varphi(x_n)}{x-x_n}.$$

Les seconds membres sont de même les coefficients du développement de

$$\frac{1}{x - X}.$$

Par conséquent ces équations peuvent être remplacées par la condition imposée à la différence des deux fonctions

$$\frac{\theta^2(x_0)\,\varphi(x_0)}{x - x_0} + \frac{\theta^2(x_1)\,\varphi(x_1)}{x - x_2} + \ldots + \frac{\theta^2(x_n)\,\varphi(x_n)}{x - x_n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x - X},$$

de ne point renfermer dans son développement suivant les puissances descendantes de x, les termes en $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \ldots, \frac{1}{x^m}, \frac{1}{x^{m+1}}$. Si donc on met cette différence sous la forme d'une fraction $\frac{M}{N}$, le degré du dénominateur N surpassera le degré du numérateur au moins de $(m+2)$. Les équations précédentes se réduiront donc à

$$\frac{\theta^2(x_0)\,\varphi(x_0)}{x - x_0} + \frac{\theta^2(x_1)\,\varphi(x_1)}{x - x_1} + \ldots + \frac{\theta^2(x_n)\,\varphi(x_n)}{x - x_n} - \frac{1}{x - X} = \frac{M}{N}.$$

D'un autre côté en posant, pour abréger,

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = f(x),$$

et désignant par U la fonction entière, contenue dans la fraction $\frac{\theta^2(x)\,\varphi(x)\,f'(x)}{f(x)}$, on sait, par la théorie de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples, que

$$\frac{\theta^2(x)\,\varphi(x)\,f'(x)}{f(x)} = U + \frac{\theta^2(x_0)\,\varphi(x_0)}{x - x_0} + \frac{\theta^2(x_1)\,\varphi(x_1)}{x - x_1} + \ldots + \frac{\theta^2(x_n)\,\varphi(x_n)}{x - x_n}.$$

L'équation formée tout à l'heure prendra donc la forme

$$\frac{\theta^2(x)\,\varphi(x)\,f'(x)}{f(x)} - U - \frac{1}{x - X} = \frac{M}{N};$$

ou bien, l'équivalente

$$\frac{(x - X)\,f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)} - \frac{U(x - X) + 1}{\varphi(x)} = \frac{(x - X)\,M}{\varphi(x)\,N}.$$

En s'appuyant sur cette relation, il n'est pas difficile de trouver l'expression de la fonction $\varphi(x)$.

Remarquons, en effet, que la fraction $\frac{(x-X)M}{\varphi(x)N}$ est d'un degré inférieur au degré de $\frac{1}{\varphi^2(x)}$. Car $\varphi(x)$ représente la quantité

$$\frac{\mu_0+\mu_1 x+\mu_2 x^2+\ldots+\mu_m x^m}{2},$$

et, par suite, ne peut être d'un degré supérieur à m. En même temps le degré de N surpasse au moins de $(m+2)$ le degré de M; ainsi la fraction $\frac{(x-X)M}{N}$ est d'un degré inférieur à celui de $\frac{1}{\varphi(x)}$.

De là, nous concluons que dans la relation ci-dessus la fraction $\frac{U(x-X)+1}{\varphi(x)}$ reproduit exactement la fonction $\frac{(x-X)f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$ au moins jusqu'au terme du degré de $\frac{1}{\varphi^2(x)}$ inclusivement, c'est-à-dire jusqu'au terme dont le degré sera celui de l'unité divisée par le carré de son dénominateur. Mais, on le sait, ce degré d'exactitude appartient exclusivement aux fractions convergentes obtenues par la réduction de $\frac{(x-X)f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$ en fraction continue. En outre, dans la suite de ces fractions convergentes, celle qui suivra $\frac{U(x-X)+1}{\varphi(x)}$ aura nécessairement un dénominateur d'un degré supérieur à m. Car, sans cela, la différence

$$\frac{(x-X)f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}-\frac{U(x-X)+1}{\varphi(x)}$$

ne serait pas d'un degré inférieur à $\frac{1}{x^m\varphi(x)}$, comme le suppose notre relation

$$\frac{(x-X)f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}-\frac{U(x-X)+1}{\varphi(x)}=\frac{(x-X)M}{\varphi(x)N},$$

où, on l'a vu, la fraction $\frac{(x-X)M}{N}$ ne peut être d'un degré supérieur à $(-m-1)$.

Ainsi, la fraction $\frac{\mathrm{U}(x-\mathrm{X})+1}{\varphi(x)}$ se trouvera au nombre des fractions convergentes dont on formera la suite, par le développement de $\frac{(x-\mathrm{X})f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$ en fraction continue; et dans cette suite la fraction convergente, qui viendra immédiatement après, aura un dénominateur de degré supérieur à m; de sorte que la fraction $\frac{\mathrm{U}(x-\mathrm{X})+1}{\varphi(x)}$, dont le dénominateur est d'un degré qui n'excède pas m, est nécessairement la dernière fraction convergente de dénominateur d'un degré qui n'excède pas m, dans la suite des fractions convergentes résultant du développement de l'expression $\frac{(x-\mathrm{X})f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$ en fraction continue.

Cherchant donc cette fraction convergente, si nous la représentons par $\frac{\varphi^0(x)}{\varphi_0(x)}$, nous aurons l'équation

$$\frac{\mathrm{U}(x-\mathrm{X})+1}{\varphi(x)}=\frac{\varphi^0(x)}{\varphi_0(x)};$$

d'où

$$\mathrm{U}(x-\mathrm{X})+1=\frac{\varphi^0(x)\,\varphi(x)}{\varphi_0(x)}.$$

Cette équation suppose que le produit $\varphi^0(x)\,\varphi(x)$ est divisible par $\varphi_0(x)$; et comme les propriétés des fractions convergentes exigent que $\varphi^0(x)$ et $\varphi_0(x)$ soient premiers entre eux, $\varphi_0(x)$ ne saurait diviser le produit sans diviser $\varphi(x)$. Représentant par q le quotient de cette division, nous aurons

$$\varphi(x)=q\,\varphi_0(x),$$

et cette valeur portée dans l'équation qui précède, donne

$$\mathrm{U}(x-\mathrm{X})+1=q\,\varphi^0(x).$$

Pour tirer de là une expression de $\varphi(x)$, nous remarquons que $\varphi(x)$ ne peut être d'un degré supérieur à m. Si donc le facteur $\varphi_0(x)$ est du degré m, le facteur q se réduit à une constante. Il est facile de la calculer, car en posant $x=\mathrm{X}$ dans la dernière équation, il en résulte

$$1=q\,\varphi^0(\mathrm{X})\quad\text{et}\quad q=\frac{1}{\varphi^0(\mathrm{X})},$$

puis enfin,

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0(x)}{\varphi^0(\mathrm{X})}.$$

Telle est la valeur de la fonction $\varphi(x)$, quand $\varphi_0(x)$ est du degré m précisément. Dans tout autre cas, le degré de $\varphi_0(x)$ étant moindre que m, le facteur q de l'expression

$$\varphi(x) = q\,\varphi_0(x)$$

peut recevoir pour valeur une fonction entière quelconque de x, pourvu que le degré du produit $q\,\varphi_0(x)$ ne surpasse pas m. Ainsi, dans ce cas, il y aura une infinité de valeurs de la fonction cherchée $\varphi(x)$. Mais si l'on convient de prendre parmi ces valeurs celle dont le degré est le moins élevé, on sera de nouveau obligé de prendre pour q une constante, et l'on trouvera, comme précédemment, pour $\varphi(x)$ la valeur

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0(x)}{\varphi^0(\mathrm{X})}.$$

D'après les équations (3), la fonction ainsi déterminée donne

$$\lambda_0 = \theta^2(x_0)\varphi(x_0),\quad \lambda_1 = \theta^2(x_1)\varphi(x_1), \ldots, \lambda_n = \theta^2(x_n)\varphi(x_n),$$

et ces valeurs sont les coefficients de la formule

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \lambda_0\mathrm{F}(x_0) + \lambda_1\mathrm{F}(x_1) + \ldots + \lambda_n\mathrm{F}(x_n),$$

par laquelle $\mathrm{F}(\mathrm{X})$ est exprimée au moyen des valeurs particulières $\mathrm{F}(x_0)$, $\mathrm{F}(x_1)$, $\mathrm{F}(x_2), \ldots, \mathrm{F}(x_n)$.

Donc on aura finalement pour $\mathrm{F}(\mathrm{X})$ l'expression

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \frac{\theta^2(x_0)\varphi_0(x_0)}{\varphi^0(\mathrm{X})}\mathrm{F}(x_0) + \frac{\theta^2(x_1)\varphi_0(x_1)}{\varphi^0(\mathrm{X})}\mathrm{F}(x_1) + \ldots + \frac{\theta^2(x_n)\varphi_0(x_n)}{\varphi^0(\mathrm{X})}\mathrm{F}(x_n).$$

Quant aux quantités $\varphi_0(x)$, $\varphi^0(x)$, on a vu qu'il suffisait, pour les déterminer, de réduire en fraction continue la fonction

$$\frac{(x-\mathrm{X})f'(x)\theta^2(x)}{f(x)},$$

et de prendre, dans la série des fractions convergentes, la dernière de celles dont le degré du dénominateur ne surpasse pas m. Le numérateur de cette dernière fraction est $\varphi^0(x)$ et le dénominateur $\varphi_0(x)$.

La question que nous nous étions proposée au commencement du premier paragraphe, est ainsi résolue.

§ III.

En examinant la formule que nous venons de trouver, nous ne pouvons manquer de nous convaincre qu'elle doit présenter d'importantes simplifications. Effectivement, d'après la nature de la question, la fonction cherchée F (X) doit être représentée par une fonction entière de X, tandis que la formule trouvée par nous contient le dénominateur $\varphi^0(\mathrm{X})$, et offre une composition telle, qu'on n'aperçoit pas comment X disparaîtra de ce dénominateur. Cela résulte de ce que les fonctions $\varphi^0(x)$, $\varphi_0(x)$, déterminées par le développement de l'expression $\frac{(x-\mathrm{X})f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$ en fraction continue, renferment X dans leurs coefficients.

Afin d'amener notre valeur de $\mathrm{F}(x)$ à une forme qui en laisse voir clairement la composition, nous allons montrer de quelle manière on passe des fractions convergentes de l'expression $\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$, aux fractions convergentes du produit $\frac{(x-\mathrm{X})f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$; et, par suite, à la fraction $\frac{\varphi^0(x)}{\varphi_0(x)}$.

Pour plus de simplicité, nous admettrons que la fraction continue

$$q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\ddots}}$$

résultant du développement de $\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$, ne contient que des dénominateurs q_1, q_2, ... du premier degré en x; et que, par suite, les fractions convergentes

$$\frac{q_0}{1},\quad \frac{q_0q_1+1}{q_1},\quad \frac{q_0q_1q_2+q_2+q_0}{q_1q_2+1},\ldots$$

ont pour dénominateurs des fonctions des degrés 0, 1, 2, ... Nous représenterons ces fractions convergentes respectivement par

$$\frac{\pi_0(x)}{\psi_0(x)},\quad \frac{\pi_1(x)}{\psi_1(x)},\quad \frac{\pi_2(x)}{\psi_2(x)},\ldots.$$

Il convient de faire observer encore que dans la fonction $\frac{f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)}$ le degré du numérateur peut être moindre, mais d'une unité seulement, que le degré du dénominateur; ce qui exclut certains cas spéciaux, dépendant de conditions particulières entre les coefficients des fonctions $\theta(x)$ et $f(x)$, et donnant au développement en fraction continue une forme telle que plusieurs des dénominateurs $q_1, q_2, \ldots$ pourraient être du deuxième, du troisième degré, ou de degrés supérieurs. De plus, il est aisé de se convaincre que cette exception ne saurait exister dans la fraction

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots}}$$

pour aucun des cas de l'interpolation ordinaire, où $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, racines de l'équation $f(x) = 0$, ont des valeurs réelles toutes différentes les unes des autres, et où la fonction $\theta(x)$ ne renfermant aucun coefficient imaginaire, prend pour $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs finies $\frac{1}{k_0}, \frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \ldots, \frac{1}{k_n}$. Dans cette hypothèse, on a effectivement, en se servant de la notation de M. Cauchy (*Journal de l'École Polytechnique*, 25^e^ Cahier),

$$\underset{-\infty}{\overset{+\infty}{\mathbf{J}}}\left(\left(\frac{f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)}\right)\right) = n + 1,$$

et, d'après le procédé qui sert à déterminer la valeur de $\underset{-\infty}{\overset{+\infty}{\mathbf{J}}}\left(\left(\frac{f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)}\right)\right)$, il est visible que pour fx de degré $(n+1)$, elle reste toujours inférieure à $(n+1)$, si dans la fraction

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots}}$$

résultant du développement de $\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$, un quelconque des dénominateurs q_1, q_2, q_3, ... est d'un degré supérieur au premier.

Convaincus par ces considérations que les limitations que nous avons apportées à la forme de la fraction continue déduite de la fonction $\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$, n'ont point d'importance particulière, nous pouvons aborder à présent la détermination de $\frac{\varphi^0(x)}{\varphi_0(x)}$, c'est-à-dire de la dernière des fractions convergentes fournies par le développement de l'expression $\frac{(x-\mathrm{X})f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$, dont les dénominateurs n'ont pas un degré plus élevé que m. Nous démontrerons que cette fraction est exprimée par la formule

$$\frac{\psi_m(\mathrm{X})\pi_{m+1}(x)-\psi_{m+1}(\mathrm{X})\pi_m(x)}{\frac{1}{x-\mathrm{X}}\left[\psi_m(\mathrm{X})\psi_{m+1}(x)-\psi_m(x)\psi_{m+1}(\mathrm{X})\right]},$$

dans laquelle $\frac{\pi_m(x)}{\psi_m(x)}$, $\frac{\pi_{m+1}(x)}{\psi_{m+1}(x)}$ désignent les fractions convergentes de l'expression $\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$, dont les dénominateurs sont des degrés m et $m+1$.

En effet, la composition de cette formule montre avec évidence que son dénominateur se réduit à une fonction entière d'un degré qui ne surpasse pas m. D'un autre côté, si nous prenons la différence entre cette même formule et l'expression $\frac{(x-\mathrm{X})f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$, nous trouvons

$$\frac{\left[\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}-\frac{\pi_{m+1}(x)}{\psi_{m+1}(x)}\right]\psi_m(\mathrm{X})\psi_{m+1}(x)-\left[\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}-\frac{\pi_m(x)}{\psi_m(x)}\right]\psi_{m+1}(\mathrm{X})\psi_m(x)}{\frac{1}{x-\mathrm{X}}\left[\psi_m(\mathrm{X})\psi_{m+1}(x)-\psi_m(x)\psi_{m+1}(\mathrm{X})\right]};$$

et cette différence ne peut être d'un degré supérieur à celui de

$$\frac{1}{x^m}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x-\mathrm{X}}\left[\psi_m(\mathrm{X})\psi_{m+1}(x)-\psi_m(x)\psi_{m+1}(\mathrm{X})\right]}.$$

Car, d'après les propriétés des fractions convergentes, les deux termes

$$\left[\frac{f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)} - \frac{\pi_{m+1}(x)}{\psi_{m+1}(x)}\right]\psi_{m+1}(x), \quad \left[\frac{f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)} - \frac{\pi_m(x)}{\psi_m(x)}\right]\psi_m(x)$$

sont d'un degré moindre que $\frac{1}{\psi_m x}$, et, par suite, que $\frac{1}{x^m}$.

Ainsi, la fraction

$$\frac{\psi_m(\mathrm{X})\,\pi_{m+1}(x) - \psi_{m+1}(\mathrm{X})\,\pi_m(x)}{\frac{1}{x-\mathrm{X}}\left[\psi_m(\mathrm{X})\,\psi_{m+1}(x) - \psi_m(x)\,\psi_{m+1}(x)\right]},$$

qui a un dénominateur dont le degré n'excède pas m, donnera exactement les termes de la fonction

$$\frac{(x-\mathrm{X})\,f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)},$$

jusqu'au terme dont le degré est le même que celui de l'expression

$$\frac{1}{x^m}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x-\mathrm{X}}\left[\psi_m(\mathrm{X})\,\psi_{m+1}(x) - \psi_m(x)\,\psi_{m+1}(\mathrm{X})\right]}.$$

Mais cette fonction ne peut être représentée avec cette exactitude que par les fractions convergentes que donne son développement en fraction continue, et seulement par celles qui sont suivies d'autres fractions convergentes dont les dénominateurs ont un degré supérieur à m. Par conséquent, notre fraction est au nombre de ces fractions convergentes, et comme le degré de son dénominateur ne surpasse pas m, elle est la dernière qui possède un dénominateur de cette espèce, et que nous avons désignée par $\frac{\varphi^0(x)}{\varphi_0(x)}$.

Cette conclusion nous permet de remplacer, dans la formule du paragraphe précédent,

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \frac{\theta^2(x_0)\,\varphi_0(x_0)}{\varphi^0(\mathrm{X})}\mathrm{F}(x_0) + \frac{\theta^2(x_1)\,\varphi_0(x_1)}{\varphi^0(\mathrm{X})}\mathrm{F}(x_1) + \ldots + \frac{\theta^2(x_n)\,\varphi_0(x_n)}{\varphi^0(\mathrm{X})}\mathrm{F}(x_n),$$

les expressions

$$\frac{\varphi_0(x_0)}{\varphi^0(\mathrm{X})},\ \frac{\varphi_0(x_1)}{\varphi^0(\mathrm{X})},\ \ldots,\ \frac{\varphi_0(x_n)}{\varphi^0(\mathrm{X})}$$

par celles-ci respectivement :

$$\frac{\frac{1}{x_0 - X}[\psi_m(X)\psi_{m+1}(x_0) - \psi_{m+1}(X)\psi_m(x_0)]}{\psi_m(X)\pi_{m+1}(X) - \psi_{m+1}(X)\pi_m(X)},$$

$$\frac{\frac{1}{x_1 - X}[\psi_m(X)\psi_{m+1}(x_1) - \psi_{m+1}(X)\psi_m(x_1)]}{\psi_m(X)\pi_{m+1}(X) - \psi_{m+1}(X)\pi_m(X)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\frac{1}{x_n - X}[\psi_m(X)\psi_{m+1}(x_n) - \psi_{m+1}(X)\psi_m(x_n)]}{\psi_m(X)\pi_{m+1}(X) - \psi_{m+1}(X)\pi_m(X)}.$$

Mais le dénominateur commun de toutes ces expressions se réduit à $(-1)^m$ d'après la théorie des fractions continues. De sorte que la formule qui donne $F(X)$ se ramène à la forme

$$\begin{aligned}
F(X) &= (-1)^m \frac{\psi_m(X)\psi_{m+1}(x_0) - \psi_{m+1}(X)\psi_m(x_0)}{x_0 - X}\theta^2(x_0)F(x_0) \\
&+ (-1)^m \frac{\psi_m(X)\psi_{m+1}(x_1) - \psi_{m+1}(X)\psi_m(x_1)}{x_1 - X}\theta^2(x_1)F(x_1) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ (-1)^m \frac{\psi_m(X)\psi_{m+1}(x_n) - \psi_{m+1}(X)\psi_m(x_n)}{x_n - X}\theta^2(x_n)F(x_n).
\end{aligned}$$

On peut l'écrire sous cette forme abrégée :

$$F(X) = (-1)^m \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\psi_m(X)\psi_{m+1}(x_i) - \psi_{m+1}(X)\psi_m(x_i)}{x_i - X}\theta^2(x_i)F(x_i).$$

Voilà donc une nouvelle formule propre à la détermination de $F(X)$ au moyen des valeurs $F(x_0)$, $F(x_1)$, $F(x_2)$, ..., $F(x_n)$. Elle se construit à l'aide des fonctions $\psi_m(x)$ et $\psi_{m+1}(x)$, qui sont les dénominateurs de deux des fractions convergentes obtenues par le développement en fraction continue de l'expression $\frac{f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)}$. De la composition même de cette nouvelle forme, on conclut sur-le-champ que c'est bien une fonction entière de X.

§ IV.

Nous allons maintenant faire voir comment la série dont nous avons parlé dans la Note présentée l'année dernière à l'Académie, se déduit de cette formule; et elle nous servira aussi à l'exposé de quelques propriétés des fonctions $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., déterminées par le développement de $\frac{f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)}$ en fraction continue.

La formule que nous venons de trouver donne $F(X)$ dans l'hypothèse de la forme

$$F(x) = a + bx + cx^2 + \ldots + gx^{m-1} + hx^m.$$

Nous représenterons cette valeur de $F(X)$ par Y_m, et par Y_{m-1} la valeur de $F(x)$, qui serait déduite de l'hypothèse où $F(x)$ serait exprimée par

$$F(x) = a + bx + cx^2 + \ldots + gx^{m-1}.$$

La formule nouvelle fournira les deux valeurs suivantes :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} Y_m &= (-1)^m \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\psi_m(X)\psi_{m+1}(x_i) - \psi_{m+1}(X)\psi_m(x_i)}{x_i - X}\,\theta^2(x_i)F(x_i),\\ Y_{m-1} &= (-1)^{m-1} \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\psi_{m-1}(X)\psi_m(x_i) - \psi_m(X)\psi_{m-1}(x_i)}{x_i - X}\,\theta^2(x_i)F(x_i). \end{aligned}\right.$$

Prenant la différence de ces valeurs, on trouve

$$Y_m - Y_{m-1} = (-1)^m \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\psi_m(X)[\psi_{m+1}(x_i) - \psi_{m-1}(x_i)] - \psi_m(x_i)[\psi_{m+1}(X) - \psi_{m-1}(X)]}{x_i - X}\,\theta^2(x_i)F(x_i).$$

Les propriétés des fonctions $\psi_{m+1}(x)$, $\psi_m(x)$, $\psi_{m-1}(x)$, permettent de simplifier notablement cette différence. Ces fonctions sont, en effet, les dénominateurs de fractions convergentes résultant du développement de l'expression $\frac{f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)}$ en une fraction continue

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots + \cfrac{1}{q_m + \cfrac{1}{q_{m+1} + \cdots}}}},$$

dans laquelle les dénominateurs $q_1, q_2, \ldots, q_m, q_{m+1}, \ldots$ doivent être, par hypothèse, des fonctions linéaires de la variable x. On a donc conséquemment

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 x + B_1, \\ q_2 &= A_2 x + B_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{m+1} &= A_{m+1} x + B_{m+1}. \end{aligned}$$

Par suite, la règle générale pour la formation des fractions convergentes donne

$$\begin{aligned} \psi_{m+1}(x) &= q_{m+1}\psi_m(x) + \psi_{m-1}(x) \\ &= (A_{m+1}x + B_{m+1})\psi_m(x) + \psi_{m-1}(x); \end{aligned}$$

et de là

$$\psi_{m+1}(x) - \psi_{m-1}(x) = (A_{m+1}x + B_{m+1})\psi_m(x).$$

Changeant x en x_i et en X, il en résulte

$$\begin{aligned} \psi_{m+1}(x_i) - \psi_{m-1}(x_i) &= (A_{m+1}x_i + B_{m+1})\psi_m(x_i), \\ \psi_{m+1}(X) - \psi_{m-1}(X) &= (A_{m+1}X + B_{m+1})\psi_m(X). \end{aligned}$$

Si l'on transporte ces valeurs dans celle de la différence $Y_m - Y_{m-1}$, on obtient

$$Y_m - Y_{m-1}$$

$$= (-1)^m \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\psi_m(X)\psi_m(x_i)(A_{m+1}x_i + B_{m+1}) - \psi_m(x_i)\psi_m(X)(A_{m+1}X + B_{m+1})}{x_i - X}\theta^2(x_i)F(x_i),$$

ou, en réduisant,

$$Y_m - Y_{m-1} = (-1)^m A_{m+1}\psi_m(X)\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m(x_i)\theta^2(x_i)F(x_i).$$

Posons dans cette relation $m = 1, 2, 3, \ldots, (m-1), m$ successivement, nous aurons

$$Y_1 - Y_0 = -A_2\psi_1(X)\sum_{i=0}^{i=n}\psi_1(x_i)\theta^2(x_i)F(x_i),$$

$$Y_2 - Y_1 = \quad A_3\psi_2(X)\sum_{i=0}^{i=n}\psi_2(x_i)\theta^2(x_i)F(x_i),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_{m-1} - Y_{m-2} = (-1)^{m-1}A_m\psi_{m-1}(X)\sum_{i=0}^{i=n}\psi_{m-1}(x_i)\theta^2(x_i)F(x_i),$$

$$Y_m - Y_{m-1} = (-1)^m A_{m+1}\psi_m(X)\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m(x_i)\theta^2(x_i)F(x_i);$$

et la somme de ces équations donnera

$$\begin{aligned} Y_m - Y_0 = & -A_2\psi_1(X)\sum_{i=0}^{i=n}\psi_1(x_i)\theta^2(x_i)F(x_i) \\ & + A_3\psi_2(X)\sum_{i=0}^{i=n}\psi_2(x_i)\theta^2(x_i)F(x_i) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + (-1)^{m-1}A_m\psi_{m-1}(X)\sum_{i=0}^{i=n}\psi_{m-1}(x_i)\theta^2(x_i)F(x_i), \\ & + (-1)^m A_{m+1}\psi_m(X)\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m(x_i)\theta^2(x_i)F(x_i). \end{aligned}$$

Y_m aura donc pour valeur

$$Y_m = Y_0 - A_2 \psi_1(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_1(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i)$$

$$+ A_3 \psi_2(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_2(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i) + \ldots$$

$$+ (-1)^m A_{m+1} \psi_m(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_m(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i).$$

Pour déterminer la quantité Y_0, faisons $m = 0$ dans la formule (4), nous trouvons

$$Y_0 = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\psi_0(X)\psi_1(x_i) - \psi_1(X)\psi_0(x_i)}{x_i - X}\,\theta^2(x_i)\,F(x_i);$$

$\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ désignent les dénominateurs des deux premières fractions convergentes de l'expression $\frac{f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)}$, dont le développement en fraction continue a reçu les formes

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q^2 + \ddots}} = q_0 + \cfrac{1}{A_1 x + B_1 + \cfrac{1}{A_2 x + B_2 + \ddots}}$$

Il en résulte

$$\psi_0(x) = 1, \qquad \psi_1(x) = A_1 x + B_1;$$

et la fonction Y_0 devient

$$Y_0 = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{A_1 x_i + B_1 - A_1 X - B_1}{x_i - X}\,\theta^2(x_i)\,F(x_i) = A_1 \sum_{i=0}^{i=n} \theta^2(x_i)\,F(x_i),$$

qu'on peut écrire

$$Y_0 = A_1 \psi_0(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_0(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i),$$

pourvu qu'on se rappelle que $\psi_0(x) = 1$.

Au moyen de cette valeur, l'expression précédente de Y_m, ou de la valeur de $F(X)$, dans l'hypothèse

$$F(x) = a + bx + cx^2 + \ldots + gx^{m-1} + hx^m,$$

prend la forme symétrique

$$Y_m = A_1\,\psi_0(X)\sum_{i=0}^{i=n}\psi_0(x_i)\theta^2(x_i)\,F(x_i) - A_2\,\psi_1(X)\sum_{i=0}^{i=n}\psi_1(x_i)\theta^2(x_i)\,F(x_i) + \ldots$$
$$+ (-1)^m A_{m+1}\,\psi_m(X)\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i).$$

Dans cette expression, les fonctions $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$,..., et les constantes A_1, A_2, A_3,..., se déterminent, par le développement de la fonction $\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$, en une fraction continue de la forme

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots}}}$$

Les fonctions $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$,... sont les dénominateurs des fractions convergentes que l'on déduit de cette fraction continue; et les constantes A_1, A_2, A_3,... sont les coefficients de x dans les dénominateurs q_1, q_2, q_3,....

Dans le cas particulier pour lequel la loi des erreurs est la même pour toutes les quantités $F(x_0)$, $F(x_1)$, $F(x_2)$,..., on peut, conformément au § I, prendre toutes les valeurs k_0, k_1, k_2,... égales à 1, et par suite la fonction $\theta(x)$ déterminée par les équations

$$\theta(x_0) = \frac{1}{k_0},\quad \theta(x_1) = \frac{1}{k_1},\quad \theta(x_2) = \frac{1}{k_2},\ldots,$$

se réduit elle-même à l'unité. La formule trouvée ci-dessus prend donc alors la forme

$$Y_m = A_1 \psi_0(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_0(x_i) F(x_i) - A_2 \psi_1(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_1(x_i) F(x_i) + \ldots$$
$$+ (-1)^m A_{m+1} \psi_m(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_m(x_i) F(x_i).$$

Ici $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$,..., A_1, A_2, A_3,... se déterminent par la fraction continue que donne la fonction $\frac{f'(x)}{f(x)}$. C'est de cette série que nous avons parlé dans la Note déjà mentionnée [*]. Mais à présent nous ne nous bornerons pas à cette hypothèse particulière, qui réduit la fonction $\theta(x)$ à l'unité, et nous considérerons la série dans sa forme générale. Nous serons ainsi conduit à des propositions curieuses sur les fonctions $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$,....

§ V.

Il n'est pas difficile de voir que si les quantités

$$F(x_0),\quad F(x_1),\quad F(x_2),\ldots, F(x_n)$$

sont déterminées exactement par la formule

$$F(x) = a + bx + cx^2 + \ldots + gx^{m-1} + hx^m,$$

notre série donnera l'expression exacte de cette fonction, quelle que puisse être la fonction $\theta(x)$. C'est ce qui devient évident, si l'on remarque que la série résulte de la formule

$$F(x) = \lambda_0 F(x_0) + \lambda_1 F(x_1) + \ldots + \lambda_n F(x_n),$$

[*] La Note de M. Tchebichef, en date du 20 *octobre* (1er novembre 1854), ne contient effectivement que cette formule particulière. Les deux pages de cette Note se trouvent ainsi reproduites ici tout entières, à l'exception du corollaire que voici :

« Dans le cas particulier de $x_0 = \frac{n}{n}$, $x_1 = \frac{n-2}{n}$, $x_2 = \frac{n-4}{n}$,..., $x_n = \frac{-n}{n}$, et de » n infiniment grand, cette formule fournit le développement de $F(x)$ suivant les va- » leurs de certaines fonctions que Legendre a désignées par X^m (*Exerc.*, part. V, § 10); » et qui sont déterminées par la réduction de l'expression $\log \frac{x+1}{x-1}$ en fraction con- » tinue. »

et que d'après l'une des conditions qui fixent les valeurs des facteurs $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, les équations suivantes doivent être satisfaites :

$$\begin{aligned}
\lambda_0 \quad + \lambda_1 \quad + \lambda_2 \quad + \ldots + \lambda_n \quad &= 1, \\
\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n &= X, \\
\lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 &= X^2, \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots & \ldots \\
\lambda_0 x_0^m + \lambda_1 x_1^m + \lambda_2 x_2^m + \ldots + \lambda_n x_n^m &= X^m.
\end{aligned}$$

Or en vertu de ces équations, la somme

$$\lambda_0 F(x_0) + \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) + \ldots + \lambda_n F(x_n),$$

quand on y remplace les quantités $F(x_0)$, $F(x_1)$, $F(x_2), \ldots, F(x_n)$, par leurs valeurs tirées de l'équation

$$F(x) = a + bx + cx^2 + \ldots + gx^{m-1} + hx^m,$$

se réduit à

$$a + bX + cX^2 + \ldots + gX^{m-1} + hX^m,$$

expression exacte de $F(X)$, d'après l'hypothèse même

$$F(x) = a + bx + cx^2 + \ldots + gx^{m-1} + hx^m.$$

Lors donc qu'il s'agit d'une fonction entière $F(x)$, la formule du paragraphe précédent permet de la représenter ainsi :

$$\begin{aligned}
F(X) = A_1 \psi_0(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_0(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i) - A_2 \psi_1(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_1(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i) + \ldots \\
+ (-1)^m A_{m+1} \psi_m(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_m(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i).
\end{aligned}$$

Si nous faisons

$$F(x) = \psi_m(x),$$

nous trouverons

$$\psi_m(\mathrm{X})=\mathrm{A}_1\psi_0(\mathrm{X})\sum_{i=0}^{i=n}\psi_0(x_i)\theta^2(x_i)\psi_m(x_i)-\mathrm{A}_2\psi_1(\mathrm{X})\sum_{i=0}^{i=n}\psi_1(x_i)\theta^2(x_i)\psi_m(x_i)+\ldots$$
$$+(-1)^m\mathrm{A}_{m+1}\psi_m(\mathrm{X})\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m^2(x_i)\theta^2(x_i);$$

ou bien, en mettant tous les termes dans un seul membre,

$$\mathrm{A}_1\psi_0(\mathrm{X})\sum_{i=0}^{i=n}\psi_0(x_i)\theta^2(x_i)\psi_m(x_i)-\mathrm{A}_2\psi_1(\mathrm{X})\sum_{i=0}^{i=n}\psi_1(x_i)\theta^2(x_i)\psi_m(x_i)+\ldots$$
$$+\psi_m(\mathrm{X})\left[(-1)^m\mathrm{A}_{m+1}\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m^2(x_i)\theta^2(x_i)-1\right]=0.$$

Mais comme les fonctions $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$,..., sont respectivement des degrés 0, 1, 2, 3,..., l'identité précédente suppose que chacun de ses termes s'évanouit séparément. On a donc, de toute nécessité,

$$(-1)^m\mathrm{A}_{m+1}\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m^2(x_i)\theta^2(x_i)-1=0,$$
$$\mathrm{A}_m\sum_{i=0}^{i=n}\psi_{m-1}(x_i)\psi_m(x_i)\theta^2(x_i)=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathrm{A}_2\sum_{i=0}^{i=n}\psi_1(x_i)\psi_m(x_i)\theta^2(x_i)=0,$$
$$\mathrm{A}_1\sum_{i=0}^{i=n}\psi_0(x_i)\psi_m(x_i)\theta^2(x_i)=0.$$

La première de ces relations nous donne

$$\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m^2(x_i)\theta^2(x_i)=\frac{(-1)^m}{\mathrm{A}_{m+1}};$$

et, en observant que les coefficients $A_m, \ldots, A_2, A_1$, diffèrent tous de zéro, les autres relations font conclure que

$$(5)\quad \begin{cases} \sum_{i=0}^{i=n} \psi_{m-1}(x_i)\,\psi_m(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=0}^{i=n} \psi_1(x_i)\,\psi_m(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0, \\ \sum_{i=0}^{i=n} \psi_0(x_i)\,\psi_m(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0. \end{cases}$$

Il est par là manifeste que, pour m' différent de m, la somme $\sum_{i=0}^{i=n} \psi_m(x_i)\,\psi_{m'}(x_i)\,\theta^2(x_i)$ est égale à zéro. Si au contraire $m' = m$, cette somme est égale à $\frac{(-1)^m}{A_{m+1}}$, comme on l'a vu tout à l'heure. On a donc pour le coefficient A_{m+1} la valeur

$$A_{m+1} = \frac{(-1)^m}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_m^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}.$$

On en déduit pour tous les autres coefficients A

$$A_1 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_0^2(x_i)\,\theta^2(x_i)},$$

$$A_2 = \frac{-1}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_1^2(x_i)\,\theta^2(x_i)},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$A_{m+1} = \frac{(-1)^m}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_m^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}.$$

Si l'on introduit ces valeurs dans la formule

$$F(X) = A_1 \psi_0(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_0(x_i)\theta^2(x_i)F(x_i) - A_2\psi_1(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_1(x_i)\theta^2(x_i)F(x_i) + \ldots$$
$$+ (-1)^m A_{m+1}\psi_m(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_m(x_i)\theta^2(x_i)F(x_i),$$

elle prend la forme

$$(6)\left\{\begin{aligned} F(X) &= \frac{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_0(x_i)\theta^2(x_i)F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_0^2(x_i)\theta^2(x_i)}\psi_0(X) + \frac{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_1(x_i)\theta^2(x_i)F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_1^2(x_i)\theta^2(x_i)}\psi_1(X) + \ldots \\ &+ \frac{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_m(x_i)\theta^2(x_i)F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_m^2(x_i)\theta^2(x_i)}\psi_m(X). \end{aligned}\right.$$

La composition de cette formule fait voir qu'elle ne change pas de valeur, quand on introduit des facteurs constants arbitraires dans les fonctions $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, etc. Il sera donc possible de prendre pour déterminer ces fonctions le développement de $\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$ en une fraction continue de la forme

$$q_0 + \cfrac{L'}{q_1 + \cfrac{L''}{q_2 + \ddots}},$$

quelles que puissent être les constantes L′, L″, etc. On sait effectivement que les termes des fractions convergentes déduites d'une expression quelconque par le développement de cette expression en fraction continue de l'une des deux formes

$$q_0 + \cfrac{L'}{q_1 + \cfrac{L''}{q_2 + \ddots}}, \qquad q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots}},$$

ne diffèrent que par des facteurs constants.

De la même manière, précisément, les équations (5) resteront complétement exactes pour les fonctions $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, etc., déterminées par le développement de $\frac{f'(x)\,\theta^2 x}{fx}$ en une fraction continue de la forme

$$q_0 + \cfrac{L'}{q_1 + \cfrac{L''}{q_2 + \ddots}},$$

car elles ne seront point altérées par l'introduction de facteurs constants quelconques dans les fonctions $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, etc. Ainsi en procédant actuellement aux applications de la formule (6) et des équations (5), nous ne serons point arrêtés par la supposition faite d'abord dans les paragraphes précédents, et d'après laquelle les numérateurs L', L'', etc., devaient être égaux à l'unité dans la fraction continue

$$q_0 + \cfrac{L'}{q_1 + \cfrac{L''}{q_2 + \ddots}},$$

qui servait à construire les fonctions $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, etc.

En vertu de ces équations (5), il existe encore des relations remarquables entre les fonctions $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, etc., et on y parvient sans peine à l'aide de la formule (6), en la comparant pour $m = n$, avec la formule d'interpolation de Lagrange.

Pour $m = n$, en effet, la formule (6) donne à l'expression d'une fonction du $n^{ième}$ degré, par les valeurs qu'elle reçoit des valeurs de la variable $x = x_0, x_1, x_2, .., x_n$, la forme que voici :

$$F(x) = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_0(x_i)\theta^2(x_i)F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_0^2(x_i)\theta^2(x_i)}\psi_0(X) + \frac{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_1(x_i)\theta^2(x_i)F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_1^2(x_i)\theta^2(x_i)}\psi_1(X) + \ldots$$

$$+ \frac{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_n(x_i)\theta^2(x_i)F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_n^2(x_i)\theta^2(x_i)}\psi_n(X).$$

La formule de Lagrange exprime la même fonction par la forme

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{(X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_{i-1})(X - x_{i+1})\ldots}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\ldots(x_i - x_{i-1})(X - x_{i+1})\ldots} F(x_i).$$

L'identité de ces deux expressions, quelles que puissent être les valeurs de $F(x_0)$, $F(x_1)$, $F(x_2)$,..., $F(x_n)$, exige que les termes qui ont ces fonctions pour facteurs, soient les mêmes dans l'une et dans l'autre. Si donc on compare les termes qui multiplient $F(x_i)$, on aura la relation

$$\frac{(X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_{i-1})(X - x_{i+1})\ldots}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots}$$

$$= \frac{\psi_0(x_i)\theta^2(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_2^0(x_i)\theta^2(x_1)}\psi_0(X) + \frac{\psi_1(x_i)\theta^2(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_1^2(x_i)\theta^2(x_i)}\psi_1(X) + \ldots$$

$$+ \frac{\psi_n(x_i)\theta^2(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_n^2(x_i)\theta^2(x_i)}\psi_n(X).$$

Si l'on fait $X = x_y$, pourvu que y ne soit pas égal à i, on obtient

$$o = \frac{\psi_0(x_i)\,\theta^2(x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_0^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\,\psi_0(x_y) + \frac{\psi_1(x_i)\,\theta^2(x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_1^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\,\psi_1(x_y) + \ldots + \frac{\psi_n(x_i)\,\theta^2(x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_n^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\,\psi_n(x_y).$$

Par l'introduction du facteur $\frac{\theta(x_y)}{\theta(x_i)}$ on peut écrire cette expression de la manière suivante :

$$o = \frac{\psi_0(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_0(x_y)\,\theta(x_y)}{\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_0^2(x_i)\,\theta^2(x_i)} + \frac{\psi_1(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_1(x_y)\,\theta(x_y)}{\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_1^2(x_i)\,\theta^2(x_i)} + \ldots + \frac{\psi_n(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_n(x_y)\,\theta^2(x_y)}{\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_n^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}.$$

Faisant au contraire $X = x_i$, nous aurons

$$1 = \frac{\psi_0^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_0^2(x_i)\,\theta^2(x_i)} + \frac{\psi_1^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_1^2(x_i)\,\theta^2(x_i)} + \ldots + \frac{\psi_n^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_n^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}.$$

§ VI.

Ces équations, réunies aux équations (5), établissent une propriété remarquable des fonctions déterminées par la formule

$$\frac{\psi_m(x)\,\theta(x)}{\sqrt{\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_m^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}}.$$

Désignons ces fonctions par $\Phi_m(x)$, les équations construites tout à l'heure nous donneront

$$\sum_{m=0}^{m=n} \Phi_m(x_i)\,\Phi_m(x_y) = 0,$$

tant que y diffère de i; et

$$\sum_{m=0}^{m=n} \Phi_m(x_i)\,\Phi_m(x_y) = 1,$$

pour $y = i$. D'après la forme de la fonction $\Phi_m(x)$ et les équations (5), il est aisé de remarquer que

$$\sum_{i=0}^{i=n} \Phi_m(x_i)\,\Phi_{m'}(x_i) = 0 \quad \text{ou} \quad = 1,$$

selon que m' différera de m, ou sera égal à m. Car la somme dont il s'agit devient, par la substitution des valeurs de $\Phi_m(x)$, $\Phi_{m'}(x)$,

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} \psi_m(x_i)\,\psi_{m'}(x_i)\,\theta^2(x_i)}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} \psi_m^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\sqrt{\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} \psi_{m'}^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}}.$$

Or, d'après les équations (5), le numérateur s'annule si m' n'est pas égal à m; et si $m' = m$, il devient égal au dénominateur, ce qui réduit la fonction à l'unité

Ces propriétés conduisent à une autre que possède encore la fonction

$$\Phi_m(x) = \frac{\psi_m(x)\,\theta(x)}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} \psi_m^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}},$$

composée avec les fonctions $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, etc., qui servent de dénominateurs aux fractions convergentes déduites du développement de la fonction $\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$ en une fraction continue de la forme

$$q_0 + \cfrac{L'}{q_1 + \cfrac{L''}{q_2 + \ddots}}$$

Si de toutes les valeurs de la fonction $\Phi_m(x)$, *obtenues en faisant* $m = 0, 1, 2, \ldots, n$ *et* $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, *on compose le carré*

$$\begin{array}{l}
\Phi_0(x_0),\ \Phi_0(x_1),\ \Phi_0(x_2), \ldots,\ \Phi_0(x_n),\\
\Phi_1(x_0),\ \Phi_1(x_1),\ \Phi_1(x_2), \ldots,\ \Phi_1(x_n),\\
\Phi_2(x_0),\ \Phi_2(x_1),\ \Phi_2(x_2), \ldots,\ \Phi_2(x_n),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Phi_n(x_0),\ \Phi_n(x_1),\ \Phi_n(x_2), \ldots,\ \Phi_n(x_n),
\end{array}$$

la somme des carrés des termes d'une rangée quelconque, horizontale ou verticale, sera égale à l'unité: la somme des produits des termes correspondants de deux rangées horizontales ou verticales sera égale à zéro.

La construction de carrés de cette espèce fait le sujet d'un Mémoire d'Euler intitulé : *Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile* (N. Comm., t. XV).

§ VII.

Les équations (5) démontrent encore facilement une propriété particulière aux fonctions

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \psi_3(x), \ldots,$$

comparées à toutes les fonctions de même degré et de même coefficient de la plus haute puissance de x : pour ces fonctions les sommes

$$\sum_{i=0}^{i=n} \psi_1^2(x_i)\,\theta^2(x_i),\quad \sum_{i=0}^{i=n} \psi_2^2(x_i)\,\theta^2(x_i),\quad \sum_{i=0}^{i=n} \psi_3^2(x_i)\,\theta^2(x_i),\ldots,$$

ont la plus petite valeur possible.

En effet, comme les fonctions $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x),\ldots$, $\psi_m(x)$ sont respectivement des degrés o, 1, 2,..., m, toute fonction entière V du degré m peut être exprimée ainsi :

$$V = A\psi_0(x) + B\psi_1(x) + C\psi_2(x) + \ldots + H\psi_m(x).$$

Mais ici il faut prendre $H = 1$, puisqu'on suppose que le coefficient de x^m est le même dans V et dans $\psi_m(x)$. On aura dans cette hypothèse

$$V = A\psi_0(x) + B\psi_1(x) + C\psi_2(x) + \ldots + \psi_m(x).$$

Il s'agit de trouver les valeurs des coefficients A, B, C, etc., qui rendent un minimum la somme

$$\sum_{i=0}^{i=n} V^2\theta^2(x_i) = \sum_{i=0}^{i=n} [A\psi_0(x_i) + B\psi_1(x_i) + C\psi_2(x_i) + \ldots + \psi_m(x_i)]^2\theta^2(x_i).$$

Le procédé connu du calcul différentiel nous donne les équations suivantes :

$$2\sum_{i=0}^{i=n} [A\psi_0(x_i) + B\psi_1(x_i) + C\psi_2(x_i) + \ldots + \psi_m(x_i)]\,\psi_0(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0,$$

$$2\sum_{i=0}^{i=n} [A\psi_0(x_i) + B\psi_1(x_i) + C\psi_2(x_i) + \ldots + \psi_m(x_i)]\,\psi_1(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0,$$

$$2\sum_{i=0}^{i=n} [A\psi_0(x_i) + B\psi_1(x_i) + C\psi_2(x_i) + \ldots + \psi_m(x_i)]\,\psi_2(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les équations (5) les réduisent à un seul terme

$$2\,A\sum_{i=0}^{i=n}\psi_0^2(x_i)\,\theta^2(x_i)=0,$$

$$2\,B\sum_{i=0}^{i=n}\psi_1^2(x_i)\,\theta^2(x_i)=0,$$

$$2\,C\sum_{i=0}^{i=n}\psi_2^2(x_i)\,\theta^2(x_i)=0.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

d'où l'on tire

$$A=0,\quad B=0,\quad C=0,\ldots.$$

Ainsi les conditions du minimum de la somme $\sum_{i=0}^{i=n}V^2\theta^2(x_i)$, quand V est de la forme

$$V=A\psi_0(x)+B\psi_1(x)+C\psi_2(x)+\ldots+\psi_m(x)$$

sont

$$A=0,\quad B=0,\quad C=0,\ldots,$$

et, par suite,

$$V=\psi_m(x).$$

On démontre encore sans difficulté que si l'on emploie la formule (6)

$$\frac{\sum_{i=0}^{i=n}\psi_0(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n}\psi_0^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\psi_0(X)+\frac{\sum_{i=0}^{i=n}\psi_1(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n}\psi_1^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\psi_1(X)+\ldots$$

$$+\frac{\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\psi_m(X),$$

à déterminer par approximation une fonction quelconque $F(X)$, on obtiendra pour l'exprimer une fonction entière du degré m telle, que la somme des carrés des différences entre les valeurs de cette fonction entière et les valeurs correspondantes de $F(x)$ pour $x = 0$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, multipliés chacun par $\theta^2(x_0)$, $\theta^2(x_1)$, $\theta^2(x_2)$, etc., respectivement, sera un minimum.

Représentons effectivement la fonction cherchée sous la forme

$$A\psi_0(X) + B\psi_1(X) + C\psi_2(X) + \ldots + H\psi_m(X),$$

et cherchons les valeurs des coefficients A, B, C,..., H pour lesquelles la somme

$$\sum_{i=0}^{i=n} [F(x_i) - A\psi_0(x_i) - B\psi_1(x_i) - C\psi_2(x_i) - \ldots - H\psi_m(x_i)]^2 \theta^2(x_i)$$

sera un minimum. Nous trouverons les équations

$$2\sum_{i=0}^{i=n} [F(x_i) - A\psi_0(x_i) - B\psi_1(x_i) - C\psi_2(x_i) - \ldots - H\psi_m(x_i)]\psi_0(x_i)\theta^2(x_i) = 0,$$

$$2\sum_{i=0}^{i=n} [F(x_i) - A\psi_0(x_i) - B\psi_1(x_i) - C\psi_2(x_i) - \ldots - H\psi_m(x_i)]\psi_1(x_i)\theta^2(x_i) = 0,$$

$$2\sum_{i=0}^{i=n} [F(x_i) - A\psi_0(x_i) - B\psi_1(x_i) - C\psi_2(x_i) - \ldots - H\psi_m(x_i)]\psi_2(x_i)\theta^2(x_i) = 0,$$

....

$$2\sum_{i=0}^{i=n} [F(x_i) - A\psi_0(x_i) - B\psi_1(x_i) - C\psi_2(x_i) - \ldots - H\psi_m(x_i)]\psi_m(x_i)\theta^2(x_i) = 0.$$

En vertu des relations (5), ces équations se réduisent à la forme

$$2\sum_{i=0}^{i=n} F(x_i)\psi_0(x_i)\theta^2(x_i) - 2A\sum_{i=0}^{i=n} \psi_0^2(x_i)\theta^2(x_i) = 0,$$

$$2\sum_{i=0}^{i=n} F(x_i)\psi_1(x_i)\theta^2(x_i) - 2B\sum_{i=0}^{i=n}\psi_1^2(x_i)\theta^2(x_i) = 0,$$

$$2\sum_{i=0}^{i=n} F(x_i)\psi_2(x_i)\theta^2(x_i) - 2C\sum_{i=0}^{i=n}\psi_2^2(x_i)\theta^2(x_i) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\sum_{i=0}^{i=n} F(x_i)\psi_m(x_i)\theta^2(x_i) - 2H\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m^2(x_i)\theta^2(x_i) = 0,$$

d'où

$$A = \frac{\sum_{i=0}^{i=n}\psi_0(x_i)\theta^2(x_i)F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n}\psi_0^2(x_i)\theta^2(x_i)},$$

$$B = \frac{\sum_{i=0}^{i=n}\psi_1(x_i)\theta^2(x_i)F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n}\psi_1^2(x_i)\theta^2(x_i)},$$

$$C = \frac{\sum_{i=0}^{i=n}\psi_2(x_i)\theta^2(x_i)F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n}\psi_2^2(x_i)\theta^2(x_i)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$H = \frac{\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m(x_i)\theta^2(x_i)F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m^2(x_i)\theta^2(x_i)}.$$

En reportant ces valeurs dans l'expression

$$A\psi_0(X) + B\psi_1(X) + C\psi_2(X) + \ldots + H\psi_m(X),$$

nous trouvons, conformément à ce qui a été avancé, que la formule cherchée pour $F(X)$ est précisément

$$\frac{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_0(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_0^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\,\psi_0(X) + \frac{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_1(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_1^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\,\psi_1(X)$$

$$+ \frac{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_2(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_2^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\,\psi_2(X) + \ldots + \frac{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_m(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_m^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\,\psi_m(X).$$

Extrait du tome III des *Outchenia Zapiski* (*Mémoires savants*) de l'Académie impériale des Sciences, pour la 1[re] et la 3[e] classe.
