JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HERMITE

Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 26-36.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__26_0>

SUR

QUELQUES FORMULES RELATIVES A LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. HERMITE.

L'expression générale des quatre fonctions θ sur lesquelles repose la théorie des fonctions elliptiques est, comme on sait, la suivante :

$$(A) \qquad \theta_{\mu,\nu}(x) = \sum_{m}^{+\infty}{}_{-\infty} (-1)^{m\nu} e^{i\pi\left[(2m+\mu)x + \frac{\omega}{4}(2m+\mu)^2\right]},$$

μ et ν étant zéro ou l'unité et ω une constante imaginaire telle, qu'en faisant

$$\omega = \omega_0 + i\omega_1$$

on ait ω_1 essentiellement différent de zéro et positif. Ces quatre fonctions sont définies, à un facteur constant près, par les équations

$$\theta_{\mu,\nu}(x+1) = (-1)^{\mu}\,\theta_{\mu,\nu}(x),$$
$$\theta_{\mu,\nu}(x+\omega) = (-1)^{\nu}\,\theta_{\mu,\nu}(x).e^{-i\pi(2x+\omega)},$$

et elles jouissent des propriétés exprimées par les relations suivantes :

$$\theta_{\mu,\nu}(-x) = (-1)^{\mu\nu}\,\theta_{\mu,\nu}(x),$$
$$\theta_{\mu+2,\nu}(x) = (-1)^{\nu}\theta_{\mu,\nu}(x),$$
$$\theta_{\mu,\nu+2}(x) = \theta_{\mu,\nu}(x),$$
$$\theta_{\mu+\mu',\nu+\nu'}(x) = \theta_{\mu',\nu'}\left(x + \frac{\mu\omega+\nu}{2}\right)e^{i\pi\left(\mu x + \frac{\mu^2\omega}{4} - \frac{\nu\mu'}{2}\right)}.$$

La première de ces relations montre que des quatre fonctions θ une seule est impaire, celle qui correspond aux valeurs $\mu = 1$, $\nu = 1$; les deux suivantes montrent comment la formule (A), quels que soient les entiers μ et ν, ne donne effectivement que quatre fonctions distinctes; enfin la dernière permet d'exprimer ces fonctions par une seule d'entre elles. A ces relations nous joindrons enfin, bien que nous n'ayons pas à l'employer ici, la suivante, qui fournit les équations algébriques ou différentielles auxquelles satisfont nos fonctions, et où je suppose

$$\mu - \mu' = \alpha, \quad \nu - \nu' = \beta,$$

savoir :

$$\begin{aligned}
&2\,\theta_{\mu,\nu}(x+y)\,\theta_{\mu',\nu'}(x-y)\,\theta_{\alpha,0}(0)\,\theta_{0,\beta}(0)\\
&= \theta_{\mu,\nu}(x)\,\theta_{\mu',\nu'}(x)\,\theta_{\alpha,0}(y)\,\theta_{0,\beta}(y)\\
&+ (-1)^{\nu}\,\theta_{\mu+1,\nu}(x)\,\theta_{\mu'+1,\nu'}(x)\,\theta_{\alpha+1,0}(y)\,\theta_{1,\beta}(y)\\
&+ (-1)^{\nu}\,\theta_{\mu+1,\nu+1}(x)\,\theta_{\mu'+1,\nu'+1}(x)\,\theta_{\alpha+1,1}(y)\,\theta_{1,\beta+1}(y)\\
&+ \theta_{\mu,\nu+1}(x)\,\theta_{\mu',\nu'+1}(x)\,\theta_{\alpha,1}(y)\,\theta_{0,\beta+1}(y).
\end{aligned}$$

Cela posé, soient a, b, c, d des entiers tels, que $ad - bc = k$, k étant essentiellement différent de zéro et positif, faisons

$$\Omega = \frac{c + d\omega}{a + b\omega},$$

$$\mathfrak{m} = a\mu + b\nu + ab,$$

$$\mathfrak{n} = c\mu + d\nu + cd,$$

$$\Pi(x) = \theta_{\mu,\nu}[(a + b\omega)x]\,e^{i\pi b(a+b\omega)x^2},$$

on aura les relations fondamentales

$$\Pi(x+1) = (-1)^{\mathfrak{m}}\,\Pi(x),$$

$$\Pi(x+\Omega) = (-1)^{\mathfrak{n}}\,\Pi(x)\,e^{-ki\pi(2x+\Omega)},$$

qui servent à exprimer $\Pi(x)$, quels que soient μ et ν, au moyen des quatre fonctions analogues à θ, mais relatives au module Ω, et que nous représenterons par

$$\Theta_{\mu,\nu}(x).$$

A cet effet, je désigne par T_i une fonction homogène du degré i

4..

des carrés de deux des fonctions Θ; cela étant, on aura pour k impair cette expression très-simple

$$\Pi(x) = \Theta_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}(x) . \mathrm{T}_{\frac{k-1}{2}} .$$

Laissant ici de côté la détermination de ces fonctions désignées par $\mathrm{T}_{\frac{k-1}{2}}$, je vais seulement, dans le cas de $k=1$, où T est une simple constante, en donner la valeur, qui exige une analyse assez délicate.

Supposons le nombre b positif, comme on le peut toujours, car s'il en était autrement on chercherait la formule de transformation relative au système des nombres $-a$, $-b$, $-c$, $-d$, ainsi qu'on y est autorisé par la nature de la condition $ad - bc = 1$, qui n'est pas altérée par ce changement, et cette formule trouvée, on en déduirait immédiatement celle qu'il s'agissait primitivement d'obtenir, la constante T restant la même ou changeant seulement de signe, comme il est aisé de le reconnaître par le changement dont nous parlons. Cela étant, on aura

$$\mathrm{T} = \frac{\delta \sum\limits_{0}^{b-1}{}_{\rho}\, e^{-i\pi \frac{a\left(\rho - \frac{1}{2}b\right)^2}{b}}}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}},$$

δ étant une racine huitième de l'unité dont voici la détermination :

$$\delta = e^{-\frac{1}{4}i\pi(ac\mu^2 + 2bc\mu\nu + bd\nu^2 + 2abc\mu + 2abd\nu + ab^2c)},$$

et le signe du radical carré $\sqrt{-ib(a+b\omega)}$ étant pris de manière que la partie réelle de ce radical soit positive [*].

---

[*] Pour $b=0$, la formule de transformation se réduit à l'équation suivante :

$$\theta_{\mu,\nu}(x,\omega) = e^{-\frac{i\pi}{4}\alpha\mu^2}\,\theta_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}(x, \omega+\alpha),$$

α étant un nombre entier arbitraire, $\mathfrak{m}$ étant égal à μ et $\mathfrak{n}$ à $\alpha(\mu+1)+\nu$.

Des cas particuliers de cette relation ont été déjà donnés par Jacobi dans un Mémoire sur l'équation différentielle à laquelle satisfont les séries

$$1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9 + \ldots, \qquad 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \ldots$$

(*Journal* de M. Crelle, tome XXXIV, et *Journal* de M. Liouville, traduction de M. Puiseux). Mais l'illustre auteur, laissant de côté la détermination de δ, se borne à annoncer que le signe de la constante dépend de la quantité désignée par le symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ dans la théorie des résidus quadratiques. Ce fait si remarquable résulte, en effet, des propriétés de la série

$$\sigma = \sum_{0}^{b-1}{}_{\rho}\, e^{-i\pi \frac{a\left(\rho - \frac{1}{2}b\right)^2}{b}},$$

qui se trouve comme facteur dans la valeur de T. Soit d'abord

$$b = 2^\alpha \beta,$$

β étant impair, on aura

$$e^{\frac{i\pi}{4}\left[1 + \frac{3(\alpha\beta+1)^2 + (\beta-1)^2}{2}\right]} \cdot \left(\frac{-a}{\beta}\right)\sqrt{b},$$

si α est pair, et

$$e^{\frac{i\pi}{4}\left[1 + \frac{3(a\beta+1)^2 + (\beta-1)^2 + a^2 - 1}{2}\right]} \left(\frac{-a}{\beta}\right)\sqrt{b},$$

lorsque α est impair.

En second lieu, supposons b impair; alors on pourra déterminer deux nombres entiers m et n par l'équation

$$a = mb - 8n,$$

et l'on aura

$$\sigma = e^{-\frac{mi\pi}{4}} \cdot \left(\frac{n}{b}\right) i^{\left(\frac{b-1}{2}\right)^2} \sqrt{b}.$$

Ces résultats [*] se déduisent des formules données par Gauss dans le célèbre Mémoire intitulé : *Summatio serierum quarumdam singularium;* seulement j'ai fait usage, pour éviter autant que possible une énumération de cas, de la forme sous laquelle elles ont été présentées par M. Lebesgue dans un Mémoire intitulé : *Sur le symbole* $\left(\frac{a}{b}\right)$ *et sur quelques-unes de ses applications*. Je remarque enfin que l'introduction des nombres μ et ν d'une part, $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ de l'autre, permet de résumer dans une seule équation, savoir :

$$\Pi(x) = \theta_{\mu,\nu}\left[(a+b\omega)x, \omega\right] e^{i\pi b(a+b\omega)x^2} = \mathrm{T}\theta_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}\left(x, \frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right),$$

ce que Jacobi nomme la théorie des formes en nombre infini des fonctions θ, théorie sur laquelle il avait annoncé un travail important que la mort l'a empêché de publier.

Pour établir les formules précédentes, je m'occuperai d'abord des deux égalités

$$\Pi(x+1) = (-1)^{\mathfrak{m}}\,\Pi(x),$$
$$\Pi(x+\Omega) = (-1)^{\mathfrak{n}}\,\Pi(x)\,e^{-ki\pi(2x+\Omega)},$$

dans lesquelles, ainsi que je l'ai dit plus haut, on a

$$\mathfrak{m} = a\mu + b\nu + ab,$$

$$\mathfrak{n} = c\mu + d\nu + cd,$$

$$\Omega = \frac{c+d\omega}{a+b\omega},$$

---

[*] Peut-être n'est-il pas inutile d'observer que l'imaginaire i, qui figure dans la série σ ou dans l'expression de cette série par les symboles de la théorie des résidus quadratiques, est absolument la même quantité qui entre dans la définition des fonctions θ par l'équation (A). Je ferai enfin remarquer que σ se présente toujours, comme le produit de $\sqrt{b}$, par une racine huitième de l'unité; de sorte qu'en résumé la constante T a cette valeur :

$$\mathrm{T} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{a+b\omega}} \quad \text{ou} \quad \varepsilon^8 = 1.$$

et

$$k = ad - bc.$$

Pour cela, j'observe qu'on peut écrire

$$\Pi(x) = \theta_{\mu,\nu}[(a+b\omega)x]\,e^{i\pi b(a+b\omega)x^2} = \sum_{m}^{-\infty,+\infty} e^{i\pi\varphi(x,m)},$$

en posant

$$\varphi(x,m) = b(a+b\omega)x^2 + (2m+\mu)(a+b\omega)x + \frac{\omega}{4}(2m+\mu)^2 - m\nu.$$

Or cette fonction jouit de la propriété exprimée par l'équation suivante :

$$\varphi(x-1,m) - \varphi(x,m+b) = 2am + \mathfrak{m} \equiv \mathfrak{m} \pmod{2},$$

qu'on vérifie par un calcul très-facile, et il en résulte qu'on peut écrire

$$\Pi(x+1) = \sum_{m}^{-\infty,+\infty} e^{i\pi\varphi(x+1,m)} = (-1)^{\mathfrak{m}} \sum_{m}^{-\infty,+\infty} e^{i\pi\varphi(x,m+b)},$$

et par suite

$$\Pi(x+1) = (-1)^{\mathfrak{m}}\,\Pi(x),$$

car le nombre m devant prendre toutes les valeurs, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, on peut, sans altérer la somme $\sum$, changer m en $m+b$ dans la fonction $\varphi(x,m)$.

Soit ensuite, pour un moment,

$$\Pi_0(x) = e^{i\pi k\Omega x^2}\,\Pi(\Omega x) = \sum_{m}^{-\infty,+\infty} e^{i\pi\varphi_0(x,m)},$$

il est clair que la nouvelle fonction $\varphi_0(x,m)$ sera liée à celle dont nous venons de parler par l'égalité

$$\varphi_0(x,m) = k\Omega x^2 + \varphi(\Omega x, m).$$

Or en recourant à la valeur de Ω et réduisant les deux termes en x^2, on obtiendra immédiatement

$$\varphi_0(x, m) = d(c + d\omega)x^2 + (2m + \mu)(c + d\omega)x + \frac{\omega}{4}(2m+\mu)^2 - m\nu,$$

de sorte qu'on peut passer de la fonction $\varphi(x, m)$ à la fonction $\varphi_0(x, m)$ par le simple changement de a et b en c et d. On a donc la relation

$$\varphi_0(x + 1, m) - \varphi_0(x, m + d) = 2cm + \mathfrak{n} \equiv \mathfrak{n} \pmod{2},$$

et par suite celle-ci :

$$\Pi_0(x + 1) = (-1)^{\mathfrak{n}}\, \Pi_0(x).$$

On en déduit qu'on a, relativement à la fonction $\Pi(x)$,

$$e^{i\pi k\Omega(x+1)^2}\, \Pi(\Omega x + \Omega) = (-1)^{\mathfrak{n}}\, e^{i\pi k\Omega x^2}\, \Pi(x),$$

d'où, après avoir dans les deux membres supprimé le facteur $e^{i\pi k\Omega x^2}$ et remplacé Ωx par x,

$$\Pi(x + \Omega) = (-1)^{\mathfrak{n}}\, \Pi(x)\, e^{-ki\pi(2x+\Omega)}.$$

Ces deux égalités démontrées, voici maintenant comment on parvient, dans le cas où l'on suppose $k = 1$, à la détermination de la constante T dans l'équation

$$\theta_{\mu,\nu}[(a + b\omega)x, \omega]\, e^{i\pi b(a+b\omega)x^2} = \mathrm{T}\,\theta_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}\left(x, \frac{c + d\omega}{a + b\omega}\right).$$

Remplaçant d'abord les fonctions par leurs développements et mettant pour cela dans le second membre Ω au lieu de $\frac{c + d\omega}{a + b\omega}$, on aura

$$(\mathrm{A}) \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, e^{i\pi\varphi(x, m)} = \mathrm{T}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, (-1)^{m\mathfrak{n}}\, e^{i\pi\left[(2m+\mathfrak{m})x + \frac{\Omega}{4}(2m+\mathfrak{m})^2\right]}.$$

Cela posé, nous introduirons au lieu de $\varphi(x, m)$ l'expression

$$\psi(x, m) = \varphi(x, m) - \mathfrak{m}x,$$

ce qui permettra de supprimer dans les deux membres de l'équation précédente le facteur $e^{\mathfrak{m} i \pi^x}$, de manière à avoir

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m e^{i\pi\psi(x, m)} = \mathrm{T}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^{m\mathfrak{n}} e^{i\pi\left[2mx + \frac{\Omega}{4}(2m+\mathfrak{m})^2\right]}.$$

On en conclura par suite, en intégrant entre les limites zéro et l'unité,

$$\int_0^1 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m e^{i\pi\psi(x, m)}\, dx = \mathrm{T} e^{i\pi \mathfrak{m}^2 \frac{\Omega}{4}},$$

et il s'agira maintenant d'obtenir l'intégrale définie du premier membre.

A cet effet, j'observe que la fonction $\psi(x, m)$ donne lieu à cette relation :

$$\psi(x+1, m) \equiv \psi(x, m+b) \quad \text{mod. } 2,$$

ou plus généralement

$$\psi(x+n, m) \equiv \psi(x, m+nb) \ \text{mod. } 2,$$

n désignant un entier arbitraire. Supposons donc, comme il a été admis précédemment, que b soit différent de zéro et positif, et décomposons la série des nombres entiers m en b progressions arithmétiques dont la raison soit b, on aura

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m e^{i\pi\psi(x, m)} = & \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n e^{i\pi\psi(x, nb)} \\ & + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n e^{i\pi\psi(x, nb+1)} \\ & + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n e^{i\pi\psi(x, nb+2)} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n e^{i\pi\psi(x, nb+b-1)}. \end{aligned}$$

Or, en vertu de la propriété de la fonction $\psi(x, m)$, cette relation pourra encore s'écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m e^{i\pi\psi(x,\,m)} = & \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n e^{i\pi\psi(x+n,\,0)} \\ & + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n e^{i\pi\psi(x+n,\,1)} \\ & + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n e^{i\pi\psi(x+n,\,2)} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n e^{i\pi\psi(x+n,\,b-1)}.\end{aligned}$$

Ainsi l'intégrale définie cherchée

$$\int_0^1 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m e^{i\pi\psi(x,\,m)}\,dx,$$

se trouve exprimée par la somme d'un nombre b d'intégrales telles que

$$\int_0^1 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n e^{i\pi\psi(x+n,\,\rho)}\,dx,$$

ρ formant la suite des valeurs $0, 1, 2, \ldots, b-1$. Maintenant, en vertu d'une transformation bien connue de ces sortes d'expressions, on a simplement

$$\int_0^1 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n e^{i\pi\psi(x+n,\,\rho)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi\psi(x,\,\rho)}\,dx,$$

de sorte que l'on parvient pour la détermination de T à cette relation

$$\mathrm{T}e^{i\pi\frac{\Omega}{4}\mathfrak{m}^2} = \sum_0^{b-1}{}_\rho \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi\psi(x,\,\rho)}\,dx.$$

Les intégrales qui y figurent s'obtiennent par la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi(px^2+qx+r)}\,dx = \frac{1}{\sqrt{-ip}}\, e^{i\pi\frac{4pr-q^2}{4p}},$$

où le radical carré $\sqrt{-ip}$ est pris de manière que la partie réelle soit positive. Ce résultat est dû, comme on sait, à M. Cauchy, et a été donné par l'illustre géomètre dans les anciens *Exercices mathématiques*. On en conclut par un calcul très-facile la valeur de la constante T, qui se présente d'abord sous cette forme :

$$\mathrm{T} = \frac{\delta \sum e^{-i\pi\frac{a\left(\rho-\frac{1}{2}b\right)^2}{b}}}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}},$$

δ ayant pour valeur

$$e^{-\frac{i\pi}{4b}(a\mu^2-2\mu\mathfrak{m}+d\mathfrak{m}^2-ab^2)}.$$

Pour prouver ensuite que δ est une racine huitième de l'unité, il faut remplacer $\mathfrak{m}$ par sa valeur

$$a\mu + b\nu + ab,$$

et l'on parvient ainsi, en faisant usage de l'équation

$$ad - bc = 1,$$

à l'expression

$$\delta = e^{-\frac{i\pi}{4}(ac\mu^2+2bc\mu\nu+bd\nu^2+2abc\mu+2abd\nu+ab^2c)}.$$

Quant à la réduction aux symboles de la théorie des résidus quadratiques par les formules de Gauss de la somme

$$\sum_{0}^{b-1}{}_{\rho}\, e^{-i\pi\frac{a\left(\rho-\frac{1}{2}b\right)^2}{b}}$$

je pense qu'il suffit d'avoir donné les résultats du calcul sans rapporter le calcul lui-même qui est sans difficulté, et je terminerai cette Note en donnant les formules pour l'expression des fonctions $\Pi(x)$ par les fonctions $\Theta_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}(x)$ au module Ω lorsque le nombre $k = ad - bc$ est pair.

Pour cela je distinguerai deux cas :

$$1^{\circ}. \qquad (\mathfrak{m}+1)(\mathfrak{n}+1) \equiv 1 \pmod{2}.$$

Alors, pour $\mu\nu \equiv 0 \pmod{2}$, on a

$$\Pi(x) = \mathrm{T}_{\frac{k}{2}},$$

et pour $\mu\nu \equiv 1 \pmod{2}$,

$$\Pi(x) = \Theta_{0,0}(x)\,\Theta_{0,1}(x)\,\Theta_{1,0}(x)\,\Theta_{1,1}(x)\,\mathrm{T}_{\frac{k-4}{2}},$$

$$2^{\circ}. \qquad (\mathfrak{m}+1)(\mathfrak{n}+1) \equiv 0 \pmod{2}.$$

En supposant encore $\mu\nu \equiv 0 \pmod{2}$, on aura

$$\Pi(x) = \Theta_{\mathfrak{m},0}(x)\,\Theta_{0,\mathfrak{n}}(x)\,\mathrm{T}_{\frac{k-2}{2}},$$

et pour $\mu\nu \equiv 1 \pmod{2}$,

$$\Pi(x) = \Theta_{1,1}(x)\,\Theta_{\mathfrak{m}+1,\,\mathfrak{n}+1}(x)\,\mathrm{T}_{\frac{k-2}{2}}.$$

T_i, comme il a été dit précédemment, désigne une fonction de degré i des carrés de deux des fonctions Θ. Je me réserve de revenir dans une autre occasion sur ces formules pour la transformation des fonctions elliptiques, qui représentent pour un ordre donné une classe de transformations qu'il importe de considérer d'une manière particulière dans l'ensemble de toutes les transformations possibles.