JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

KRONECKER

Sur les fonctions elliptiques et sur la théorie des nombres

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 265-270.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__265_0>

SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES

ET

SUR LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. KRONECKER.

TRADUCTION DE M. HOÜEL.

(Extrait des *Comptes rendus de l'Académie de Berlin*, séance du 29 octobre 1857.)

M. Kummer donne lecture d'un Mémoire communiqué par M. Kronecker.

Dans un Mémoire d'Abel (t. Ier, p. 272 de ses *OEuvres complètes*) se trouve cette remarque, que les modules des fonctions elliptiques, pour lesquelles la multiplication complexe a lieu, peuvent s'exprimer complétement par des radicaux. Mais on n'y rencontre aucune indication sur la manière dont Abel a découvert cette propriété remarquable de cette classe de fonctions elliptiques. Qu'il y soit parvenu pour la première fois *après* la rédaction du Mémoire intitulé : *Recherches sur les fonctions elliptiques*, c'est ce qui ressort d'un passage de ce Mémoire (t. Ier, p. 248 des *OEuvres complètes*, ou t. III, p. 182 du *Journal* de Crelle), où l'auteur exprime encore un doute sur la résolubilité des équations d'où dépend la détermination des modules en question. Désirant parvenir à une démonstration de cette proposition d'Abel, je me suis occupé l'hiver dernier de recherches sur les fonctions elliptiques pour lesquelles a lieu la multiplication complexe, et j'ai trouvé non-seulement la démonstration cherchée, mais encore plusieurs résultats intéressants dont je vais ici exposer sommairement quelques-uns.

Soit n un nombre positif impair et plus grand que 3; désignons de plus par $\varkappa$ le module des fonctions elliptiques et par k le carré de ce module. Le nombre des valeurs différentes de k, pour lesquelles on peut effectuer la multiplication des fonctions elliptiques par $\sqrt{-n}$, c'est-à-dire pour lesquelles $\sin^2 \mathrm{am}\,(\sqrt{-n}.u,\ \varkappa)$ peut être exprimé en fonction rationnelle de $\sin^2 \mathrm{am}\,(u,\ \varkappa)$ et de $\varkappa$, est égal au sextuple du nombre des classes différentes de formes quadratiques appartenant au déterminant $-n$. Toutes ces valeurs de k sont des fonctions algébriques explicites d'une quelconque d'entre elles; elles sont, de plus, les racines d'une équation à coefficients *entiers*, dont le degré est égal au nombre de ces valeurs, et qui peut se décomposer en autant de facteurs *entiers* qu'il y a d'ordres différents appartenant au déterminant $-n$. A chacun de ces ordres correspond un facteur déterminé de cette équation, dont le degré est égal à six fois le nombre des classes renfermées dans l'ordre en question. Le facteur correspondant à l'ordre proprement primitif est enfin décomposable en six facteurs de même degré, dont les coefficients ne contiennent que des nombres entiers et le radical $\sqrt{n}$. Le degré de chacune de ces six équations partielles est ainsi égal au nombre des classes proprement primitives appartenant au déterminant $-n$, et c'est une de ces équations partielles qui présente le plus clairement le caractère de résolubilité. Les racines de cette équation ont en effet cette propriété, qu'elles peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles (n'ayant pour coefficients que des nombres entiers) de l'une quelconque d'entre elles, et que, pour deux quelconques de ces fonctions $\varphi(k)$, $\psi(k)$, on a la relation

$$\varphi[\psi(k)] = \psi[\varphi(k)].$$

Si n est un nombre premier et que $-n$, considéré comme déterminant d'une forme quadratique, soit régulier, l'équation partielle en question est une équation abélienne, et, dans tous les autres cas, le caractère particulier de cette équation, le nombre des périodes de ses racines, etc., dépendent du nombre des genres et de l'exposant d'irrégularité du déterminant $-n$. Si enfin n est un nombre pair, ou s'il est un des nombres 1, 3, les valeurs correspondantes de k ont des propriétés tout à fait analogues à celles que nous venons de mentionner. Mais, quelle que soit la valeur du nombre n, à une seule et même classe de formes quadratiques de déterminant $-n$ répond toujours un système déterminé de valeurs de k, et cela de telle sorte que l'on peut toujours exprimer sous forme transcendante les valeurs de k au moyen des coefficients d'une quelconque des formes contenues dans cette classe, et réciproquement ces coefficients au moyen des valeurs de k.

Les fonctions elliptiques pour lesquelles la multiplication complexe a lieu, tiennent, pour leurs propriétés essentielles, le milieu entre les fonctions circulaires et les autres fonctions elliptiques. En effet, de même que les valeurs

$$k = 0 \quad \text{et} \quad k = \pm 1,$$

correspondantes aux fonctions circulaires, doivent être considérées comme des limites extrêmes, de même aussi les valeurs des modules de chaque classe particulière de fonctions elliptiques prendront le caractère de limites extrêmes, lorsque, pour ces valeurs, les équations modulaires présenteront des racines égales, comme cela avait lieu pour les valeurs particulières 0 et ± 1. De plus, les fonctions circulaires étant susceptibles de multiplication seulement, tandis que les fonctions elliptiques, prises dans leur généralité, sont susceptibles à la fois de multiplication et de transformation, il arrive, pour cette classe particulière de fonctions elliptiques, que la transformation perd en partie son caractère propre, et devient elle-même une sorte de multiplication, puisqu'elle équivaut jusqu'à un certain point à la multiplication par un nombre imaginaire. De même, en effet, que pour un nombre p pouvant être représenté par la forme principale $x^2 + ny^2$, de déterminant $-n$, une des transformations d'ordre p donne la multiplication par $x + y\sqrt{-n}$, c'est-à-dire l'expression de $\sin^2 \operatorname{am}(x + y\sqrt{-n}).u$ en fonction rationnelle de $\sin^2 \operatorname{am} u$ et de x; de même le nombre pouvant être représenté par une des autres formes de déterminant $-n$, il y a une des transformations d'ordre q qui conduit à une fonction transformée $\sin^2 \operatorname{am}(\mu.u, \lambda)$, exprimée en fonction rationnelle de $\sin^2 \operatorname{am}(u, \varkappa)$ et de $\varkappa$, et dans laquelle λ est un des autres modules pour lesquels a lieu la multiplication par $\sqrt{-n}$, et de plus μ est une valeur déterminée de $\sqrt{-n}$ (mod. q), et joue précisément le rôle d'un facteur imaginaire de q. Ces multiplicateurs μ sont des irrationnelles algébriques explicites, et c'est une circonstance digne de remarque à plusieurs égards, que l'on rencontre ici pour la première fois un exemple dans lequel l'analyse donne des expressions irrationnelles pour représenter des nombres imaginaires.

D'après la liaison étroite qui existe entre les fonctions elliptiques pour lesquelles a lieu la multiplication par $\sqrt{-n}$ et les formes quadratiques de déterminant $-n$, il est évident que l'étude de cette classe particulière de fonctions elliptiques doit conduire à un grand nombre de résultats relatifs à la théorie des formes quadratiques. Parmi ces résultats, je me contenterai de rapporter ici quelques formules récurrentes d'une remarquable simplicité, que l'on peut établir pour la détermination des nombres de classes correspondantes aux déterminants négatifs, et qui sont éminemment propres au calcul de ces nombres. Ces formules ne sont pas non plus sans intérêt au point de vue purement théorique, d'autant plus que quelques-unes d'entre elles semblent très-difficiles à démontrer par les procédés arithmétiques. Le reste de ces formules peut, il est vrai, se déduire de la relation connue entre le nombre de représentations d'un nombre n par la somme de trois carrés et le nombre des classes de déterminant $-n$. Mais l'emploi de cette relation pour la démonstration de ces formules est entièrement nouveau, et, ce qui est bien plus important, cette relation elle-même peut réciproquement se démontrer au moyen de ces formules qui résultent de la théorie des fonctions elliptiques. Comme exemple de ces formules, on peut choisir les trois suivantes, dont la seconde seule peut se déduire de la manière que nous venons d'indiquer par les procédés arithmétiques. On a les relations

$$\text{(I)} \qquad 2F(n) + 4F(n-2^2) + 4F(n-4^2) + \ldots = \varphi(n) - \psi(n),$$

$$\text{(II)} \qquad 4F(n-1^2) + 4F(n-3^2) + 4F(n-5^2) + \ldots = \varphi(n) + \psi(n),$$

$$\text{(III)} \qquad F(n) + 2F(n-1^2) + 2F(n-2^2) + \ldots = \varphi(n),$$

en supposant

$$n \equiv 3 \pmod{4};$$

et en désignant en outre par $F(m)$ le nombre des classes proprement primitives et de leurs dérivées pour le déterminant $-m$; par $\varphi(n)$ la somme des diviseurs de n plus grands que $\sqrt{n}$, et par $\psi(n)$ la somme de tous les autres diviseurs. Je ferai encore remarquer que la suite des nombres

$$n, \quad n - 1^2, \quad n - 2^2, \ldots,$$

dans les trois formules ne doit être prolongée qu'autant que ces nombres sont positifs, et que la formule (III) est une conséquence immédiate des formules (I) et (II).

Si l'on désigne par $H(m)$ le nombre des classes proprement primitives de déterminant $-m$, les résultats renfermés dans les formules précédentes peuvent encore être présentés sous une autre forme remarquable. En désignant par D tous les nombres positifs pour lesquels n peut être représenté par la forme $x^2 + Dy^2$ et par h le nombre de ces représentations différentes (en ayant soin de faire la distinction entre les valeurs positives et négatives de x et de y), on obtient l'équation

$$\sum h . H(D) = 2\varphi(n),$$

qui est précisément le résultat exprimé par la formule (III).

Nos trois formules fournissent encore une solution très-élégante du problème posé par M. Dirichlet dans le t. III du *Journal* de Crelle, p. 407, solution qui me semble préférable à celle qu'a publiée Jacobi dans le t. IX du même journal. Ce problème consiste à déterminer, pour les nombres premiers n qui divisés par 4 donnent pour reste 3, la valeur de l'exposant ν dans la congruence

$$1.2.3 \ldots \frac{n-1}{2} \equiv (-1)^\nu \pmod{n}.$$

Or, en s'aidant de la célèbre expression donnée par M. Dirichlet (*Journal* de Crelle, t. XXI, p. 152) pour le nombre des classes relatives au déterminant $-n$, les formules précédentes fournissent la règle suivante pour déterminer le nombre ν : *Le nombre ν est égal au nombre des déterminants négatifs et impairs différents, pour lesquels n peut être représenté par la forme principale, et qui sont des nombres premiers ou des puissances de nombres premiers.* Cette règle peut encore s'énoncer ainsi : *ν est la multitude de ceux parmi les nombres*

$n - 2^2$, $n - 4^2$, $n - 6^2, \ldots$, *qui sont de la forme*

$$r^2 . p^{4i+1},$$

p étant un nombre premier et r un nombre non divisible par p. Et l'on voit par là que la détermination du nombre ν se réduit à la décomposition en leurs facteurs premiers de certains nombres, tous plus petits que n, et dont la multitude est moindre que $\frac{1}{2}\sqrt{n}$.