JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. SCHRÖTER

Extrait d'une lettre adressée à M. Liouville

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 258-264.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__258_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE;

Par M. H. SCHRÖTER.

Breslau, 10 mai 1858.

La théorie des équations modulaires étant devenue l'objet de plusieurs communications à votre illustre Académie, je prends la liberté de vous adresser par la poste deux Mémoires que j'ai publiés, il y a plusieurs années déjà, comme thèses pour le doctorat et pour l'agrégation à la Faculté des Sciences de Breslau.

J'ai pris dans mes recherches pour point de départ une formule dont M. Jacobi a donné un cas particulier (*Journal de Mathématiques* de M. Crelle, tome III, page 305). En employant les séries que M. Jacobi a introduites dans l'analyse,

$$\vartheta(x, q) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h q^{hh} \cos 2hx,$$

$$\vartheta_1(x, q) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h q^{\left(h+\frac{1}{2}\right)^2} \sin(2h+1)x,$$

$$\vartheta_2(x, q) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\left(h+\frac{1}{2}\right)^2} \cos(2h+1)x,$$

$$\vartheta_3(x, q) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{hh} \cos 2hx,$$

séries entre lesquelles existent les relations connues

$$\vartheta_3\left(x + \frac{\pi}{2}, q\right) = \vartheta(x, q),$$

$$q^{\frac{1}{4}} e^{ix} \vartheta_3\left(x - \frac{i \log q}{2}, q\right) = \vartheta_2(x, q), \qquad i = \sqrt{-1},$$

$$\frac{1}{i} q^{\frac{1}{4}} e^{ix} \vartheta_3\left(x + \frac{\pi}{2} - \frac{i \log q}{2}, q\right) = \vartheta_1(x, q),$$

on a la formule générale

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned} &\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(x-py,q^p)\\ &=\sum_{\mu=0}^{\mu=p} q^{\mu\mu}e^{2\mu i(x+y)}\,\vartheta_3\left[(p+1)x-p\mu\varpi,\ q^{p(p+1)}\right].\,\vartheta_3\left[(p+1)y-\mu\varpi,\ q^{p+1}\right],\end{aligned}\right.$$

p étant un nombre entier positif et $\varpi = i\log q$.

Le cas de $p = 1$ est celui qui a été considéré par M. Jacobi.

A l'aide de cette formule on peut former les équations modulaires pour la transformation de l'ordre $p = 2^n - 1$, en n'appliquant que les formules connues pour la transformation du deuxième ordre.

En effet, si l'on pose $p = 3$, on tire de l'équation (I),

$$\begin{aligned}&\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(x-3y,q^3)+\vartheta(x+y,q)\,\vartheta(x-3y,q^3)\\ &=2\vartheta_3(4y,q^4)\,\vartheta_3(4x,q^{12})+2\vartheta_2(4y,q^4)\,\vartheta_2(4x,q^{12}),\end{aligned}$$

et en se servant des formules connues

$$\begin{aligned}2\vartheta_3(2z,q^4)&=\vartheta_3(z,q)+\vartheta(z,q),\\ 2\vartheta_2(2z,q^4)&=\vartheta_3(z,q)-\vartheta(z,q),\end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned}&\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(x-3y,q^3)+\vartheta(x+y,q)\,\vartheta(x-3y,q^3)\\ &=\vartheta_3(2y,q)\,\vartheta_3(2x,q^3)+\vartheta(2y,q)\,\vartheta(2x,q^3),\end{aligned}$$

d'où découle sur-le-champ une foule de formules en augmentant les éléments x et y de $\pm\frac{\pi}{4}$, $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{\varpi}{2}$, etc.

Je n'indiquerai que les deux formules suivantes :

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}&\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(x-3y,q^3)-\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(x-3y,q^3)\\ &=\vartheta(2y,q)\,\vartheta(2x,q^3)-\vartheta_1(2y,q)\,\vartheta_1(2x,q^3);\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}&\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_1(x-3y,q^3)+\vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_2(x-3y,q^3)\\ &=2\vartheta(4y,q^4)\,\vartheta_1(4x,q^{12})+2\vartheta_1(4y,q^4)\,\vartheta(4x,q^{12}).\end{aligned}\right.$$

Si l'on fait, dans l'équation (1), $2x = 2y = z$, on aura

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}&\vartheta_3(z,q)\,\vartheta_3(z,q^3)+\vartheta_1(z,q)\,\vartheta_1(z,q^3)\\ &=\vartheta(z,q)\,\vartheta(z,q^3)+\vartheta_2(z,q)\,\vartheta_2(z,q^3),\end{aligned}\right.$$

et pour $z=0$,

$$\vartheta_3(0,q)\vartheta_3(0,q^3)=\vartheta(0,q)\vartheta(0,q^3)+\vartheta_2(0,q)\vartheta_2(0,q^3),$$

relation qui donne immédiatement l'équation modulaire pour la transformation du troisième ordre

$$\sqrt{k\lambda}+\sqrt{k_1\lambda_1}=1,$$

en écrivant comme d'habitude

$$\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}=\sqrt{k},\qquad \frac{\vartheta(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}=\sqrt{k_1},\qquad k^2+k_1^2=1,$$

$$\frac{\vartheta_2(0,q^3)}{\vartheta_3(0,q^3)}=\sqrt{\lambda},\qquad \frac{\vartheta(0,q^3)}{\vartheta_3(0,q^3)}=\sqrt{\lambda_1},\qquad \lambda^2+\lambda_1^2=1.$$

On tire aussi de l'équation (3) la suivante, en supposant $z=\mu\varpi$ (μ étant un nombre entier) :

$$(4)\quad \vartheta_3(0,q)\vartheta_3(\mu\varpi,q^3)=\vartheta_2(0,q)\vartheta_2(\mu\varpi,q^3)+\vartheta(0,q)(-1)^\mu\vartheta(\mu\varpi,q^3).$$

Si l'on fait $y=0$, $x=\mu\varpi$, la formule (2) devient

$$\vartheta_2(0,q)\vartheta_1(\mu\varpi,q^3)=2p^{\mu\mu}\vartheta(0,q^4)\vartheta_1(4\mu\varpi,q^{12}),$$

et en posant $q^{\frac{1}{2}}$ au lieu de q

$$(5)\qquad q^{\frac{\mu\mu}{6}}\cdot\vartheta_2\left(0,q^{\frac{1}{2}}\right)\vartheta_1\left(\frac{\mu\varpi}{2},q^{\frac{3}{2}}\right)=2q^{\frac{2\mu\mu}{3}}\vartheta(0,q^2)\vartheta_1(2\mu\varpi,q^6).$$

Cette équation bien remarquable se déduit aussi des développements connus des fonctions ϑ en produits infinis.

Passons à présent au cas de $p=7$; on aura en vertu de la formule (I),

$$\begin{aligned}&\vartheta_3(x+y,q)\vartheta_3(x-7y,q^7)+\vartheta(x+y,q)\vartheta(x-7y,q^7)\\ &=\vartheta_3(4y,q^2)\vartheta_3(4x,q^{14})+\vartheta(4y,q^2)\vartheta(4x,q^{14})\\ &+\vartheta_2(4y,q^2)\vartheta_2(4x,q^{14})-\vartheta_1(4y,q^2)\vartheta_1(4x,q^{14}),\end{aligned}$$

d'où découle pareillement un grand nombre de formules, dont je ne citerai que les deux cas spéciaux

$$(6)\left\{\begin{aligned}&\vartheta_2\left(0,q^{\frac{1}{2}}\right)\vartheta_2\left(\mu\varpi,q^{\frac{7}{2}}\right)\\&=q^{2\mu\mu}[\vartheta_3(0,q)\vartheta_3(\mu\varpi,q^7)+\vartheta_2(0,q)\vartheta_2(\mu\varpi,q^7)-\vartheta(0,q)\vartheta(\mu\varpi,q^7)],\end{aligned}\right.$$

$$(7)\left\{\begin{aligned}&2(-1)^\mu\vartheta(0,q^2)\vartheta(2\mu\varpi,q^{14})\\&=q^{2\mu\mu}[\vartheta_3(0,q)\vartheta_3(\mu\varpi,q^7)-\vartheta_2(0,q)\vartheta_2(\mu\varpi,q^7)+\vartheta(0,q)\vartheta(\mu\varpi,q^7)],\end{aligned}\right.$$

d'où vient, en faisant $\mu = 0$ et ajoutant,

$$\frac{1}{2}\vartheta_2\left(0,q^{\frac{1}{2}}\right)\vartheta_2\left(0,q^{\frac{7}{2}}\right)+\vartheta(0,q^2)\vartheta(0,q^{14})=\vartheta_3(0,q)\vartheta_3(0,q^7),$$

ce qui fournit en k et λ l'équation modulaire pour la transformation du septième ordre

$$\sqrt[4]{k\lambda}+\sqrt[4]{k_1\lambda_1}=1.$$

De la même manière j'ai trouvé l'équation modulaire pour la transformation du trente-unième ordre

$$\begin{aligned}&\sqrt[8]{k\lambda}\left(\sqrt[4]{\frac{1+k}{2}\frac{1+\lambda}{2}}+\sqrt[4]{\frac{1-k}{2}\frac{1-\lambda}{2}}\right)-\sqrt[4]{k\lambda}\\&=\sqrt[8]{k_1\lambda_1}\left(\sqrt[4]{\frac{1+k_1}{2}\frac{1+\lambda_1}{2}}+\sqrt[4]{\frac{1-k_1}{2}\frac{1-\lambda_1}{2}}\right)-\sqrt[4]{k_1\lambda_1}.\end{aligned}$$

On peut obtenir une autre forme de cette équation modulaire, plus analogue aux formes précédentes, mais plus compliquée.

A l'aide de la formule générale (I) on peut former les équations modulaires pour la transformation de l'ordre $p = 3.2^n - 1$, si l'on a égard à la relation (4) ou, ce qui est plus simple, à la formule (5).

On a pour $p = 5$

$$\begin{aligned}&\vartheta_3(x+y,q)\vartheta_3(x-5y,q^5)\\&=\sum_{\mu=0}^{\mu=5}q^{\mu\mu}e^{2\mu i(x+y)}\vartheta_3(6y-\mu\varpi,q^6)\vartheta_3(6x-5\mu\varpi,q^{30}),\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}&\vartheta_3(x+y,q^2)\vartheta_2(x-5y,q^{10})-\vartheta_2(x+y,q^2)\vartheta_3(x-5y,q^{10})\\&=\sum_0^2 q^{2\mu\mu}e^{2\mu i(x+y)}\vartheta_1(3y-\mu\varpi,q^3)\vartheta_1(3x-5\mu\varpi,q^{15})\end{aligned}$$

et

$$\vartheta\left(x+y, q^{\frac{1}{2}}\right)\vartheta_3\left(x-5y, q^{\frac{5}{2}}\right)-\vartheta_3\left(x+y, q^{\frac{1}{2}}\right)\vartheta\left(x-5y, q^{\frac{5}{2}}\right)$$
$$=2\sum q^{2\mu\mu}e^{4\mu i(x+y)}\vartheta_1(6y-\mu\varpi, q^3)\vartheta_1(6x-5\mu\varpi, q^{15}),$$

d'où, pour $x=y=0$,

$$\vartheta_3(0,q)\vartheta_2(0,q^5)-\vartheta_2(0,q)\vartheta_3(0,q^5)$$
$$=\sum q^{\mu\mu}\vartheta_1\left(\frac{\mu\varpi}{2}, q^{\frac{3}{2}}\right)\vartheta_1\left(\frac{5\mu\varpi}{2}, q^{\frac{15}{2}}\right)$$

et

$$\vartheta(0,q)\vartheta_3(0,q^5)-\vartheta_3(0,q)\vartheta(0,q^5)$$
$$=2\sum q^{4\mu\mu}\vartheta_1(2\mu\varpi, q^6)\vartheta_1(10\mu\varpi, q^{30});$$

en tenant compte de la relation (5), mettant q^5 au lieu de q, et multipliant, on trouve

$$\frac{1}{2}\vartheta_2\left(0, q^{\frac{1}{2}}\right)\vartheta_2\left(0, q^{\frac{5}{2}}\right)[\vartheta_3(0,q)\vartheta_2(0,q^5)-\vartheta_2(0,q)\vartheta_3(0,q^5)]$$
$$=\vartheta(0,q^2)\vartheta(0,q^{10})\left\{\vartheta(0,q)\vartheta_3(0,q^5)-\vartheta_3(0,q)\vartheta(0,q^5)\right\},$$

ce qui donne entre $k, \lambda, k_1, \lambda_1$ l'équation modulaire pour la transformation du cinquième ordre

$$\sqrt[4]{k\lambda}(\sqrt{k}-\sqrt{\lambda})=\sqrt[4]{k_1\lambda_1}(\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{k_1}).$$

De la même manière résulte l'équation modulaire pour la transformation du onzième ordre

$$\sqrt[4]{k\lambda}\left(\sqrt{\frac{1+k}{2}\frac{1+\lambda}{2}}-\sqrt{\frac{1-k}{2}\frac{1-\lambda}{2}}\right)$$
$$-\sqrt[4]{k_1\lambda_1}\left(\sqrt{\frac{1+k_1}{2}\frac{1+\lambda_1}{2}}-\sqrt{\frac{1-k_1}{2}\frac{1-\lambda_1}{2}}\right)=\sqrt{k\lambda}-\sqrt{k_1\lambda_1},$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\sqrt[4]{k\lambda}(k+\lambda)-\sqrt[4]{k_1\lambda_1}(k_1+\lambda_1)=2(\sqrt{k\lambda}-\sqrt{k_1\lambda_1})\sqrt{\frac{1+k\lambda+k_1\lambda_1}{2}}$$

qui me paraît préférable à la précédente.

J'ai encore appliqué la même méthode à déduire l'équation modulaire pour la transformation du vingt-troisième ordre, et j'ai trouvé la relation suivante :

$$
\begin{aligned}
&2(k\lambda)^{\frac{3}{8}}\left(\sqrt[4]{\frac{1+k}{2}\,\frac{1+\lambda}{2}}-\sqrt[4]{\frac{1-k}{2}\,\frac{1-\lambda}{2}}\right)\\
&+2(k_1\lambda_1)^{\frac{3}{8}}\left(\sqrt[4]{\frac{1+k_1}{2}\cdot\frac{1+\lambda_1}{2}}-\sqrt[4]{\frac{1-k_1}{2}\cdot\frac{1-\lambda_1}{2}}\right)\\
&=\sqrt[4]{k\lambda}+\sqrt[4]{k_1\lambda_1}+\left(\sqrt[4]{k\lambda}-\sqrt[4]{k_1\lambda_1}\right)\left(\sqrt{k\lambda}-\sqrt{k_1\lambda_1}\right).
\end{aligned}
$$

Par les relations (6) et (7), on peut former les équations modulaires pour les nombres $p = 7.2^n - 1$ au moyen de la formule générale (I). Pour la transformation du treizième ordre, j'ai trouvé l'équation modulaire

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{k\lambda}\left(\sqrt{\frac{1+k}{2}\cdot\frac{1+\lambda}{2}}-\sqrt{\frac{1-k}{2}\cdot\frac{1-\lambda}{2}}\right)\\
&+\sqrt{k_1\lambda_1}\left(\sqrt{\frac{1+k_1}{2}\cdot\frac{1+\lambda_1}{2}}-\sqrt{\frac{1-k_1}{2}\cdot\frac{1-\lambda_1}{2}}\right)+\sqrt{\frac{1+k\lambda+k_1\lambda_1}{2}}\\
&=\sqrt[4]{k\lambda}\left(\sqrt{k}+\sqrt{\lambda}\right)+\sqrt[4]{k_1\lambda_1}\left(\sqrt{k_1}+\sqrt{\lambda_1}\right)+\sqrt{k\lambda k_1\lambda_1}\left(\sqrt{k\lambda_1}-\sqrt{k_1\lambda}\right),
\end{aligned}
$$

que l'on pourrait mettre sous plusieurs formes.

Les formes des équations modulaires que vous trouverez dans mon premier Mémoire sont plus compliquées que les précédentes; il en serait de même pour les équations modulaires que je pourrais ajouter relativement aux nombres 17, 19, 29. Dans mon second Mémoire je me suis occupé de la formule suivante, plus générale que (I):

$$
(\mathrm{II})\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\vartheta_3(tx+sry,q^r)\,\vartheta_3(sx-tpy,q^p)\\
&=\sum_{\mu=0}^{\mu=rs^2+pt^2-1} q^{r\mu\mu}e^{2\mu i(tx+sry)}\vartheta_3\left[(rs^2+pt^2)y-s.r.\mu\varpi,q^{r(s^2+pt^2)}\right]\\
&\times\vartheta_3\left[(rs^2+pt^2)x-tpr\mu\varpi,q^{rp(rs^2+pt^2)}\right],
\end{aligned}
\right.
$$

p, r, s, t étant des nombres premiers entre eux.

Je m'étais proposé le problème d'exprimer à l'aide d'équations algébriques les valeurs de

$$q^{\frac{\mu\mu}{p}} \vartheta_3(\mu\varpi, q^p), \quad \left[\begin{array}{l}\text{pour } \mu = 1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2} \\ p \text{ étant un nombre premier}\end{array}\right]$$

par le plus petit nombre des valeurs de $\vartheta_3\left(0, q^{\frac{m}{n}}\right)$.

Je suis parvenu entre autres au résultat curieux qu'il ne faut que des équations du second degré pour déterminer les valeurs de

$$q^{\frac{\mu\mu}{17}} \vartheta_3(\mu\varpi, q^{17}), \quad (\mu = 1, 2, 3, \ldots, 8),$$

en supposant connues les valeurs de $\vartheta_3(0, q^5)$, $\vartheta_3\left(0, q^{\frac{1}{5}}\right)$, $\vartheta_3(0, q^{17})$, $\vartheta_3\left(0, q^{\frac{1}{17}}\right)$, résultat qui est analogue à la division du cercle en dix-sept parties égales.