JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. BRASSINNE

Nouvelle méthode pour démontrer l'existence du système conjugué rectangulaire dans les surfaces du second ordre

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 236-240.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__236_0>

NOUVELLE MÉTHODE

POUR

DÉMONTRER L'EXISTENCE DU SYSTÈME CONJUGUÉ RECTANGULAIRE

DANS

LES SURFACES DU SECOND ORDRE;

Par M. E. BRASSINNE [*].

La méthode suivante, qu'il suffira d'appliquer à l'ellipsoïde, suppose la solution de ce problème : *Trouver les conditions auxquelles sont assujettis les axes d'une ellipse, pour qu'elle puisse être placée sur un ellipsoïde donné, dans une section passant par son centre.*

1. Sans autre calcul que la résolution d'une équation du second degré, on démontre aisément que l'équation générale des surfaces du second ordre se ramène dans un système de coordonnées obliques aux deux formes

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 1, \quad P'y^2 + P''z^2 = 2Qx.$$

On prouve d'ailleurs immédiatement par un procédé dû à J. Binet que, pour tous ces systèmes, la somme des carrés des demi-diamètres conjugués est constante, ainsi que le volume du parallélipipède construit sur leurs longueurs; on peut ajouter que la somme des carrés des aires des parallélogrammes conjugués restera invariable. Si l'on considère, par exemple, l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1,$$

[*] Cette Note complétera un article inséré il y a déjà longtemps dans le *Journal de Mathématiques*; c'est ce qui m'a décidé à venir parler encore d'une question assez élémentaire, qui, je le reconnais, ne peut guère avoir aujourd'hui de l'intérêt que pour les professeurs. La solution que je donne n'a d'ailleurs rien de commun avec celle de Petit, qui est entrée depuis longtemps dans les ouvrages didactiques.

(E. Brassinne.)

le plan zx pourra être supposé perpendiculaire à celui des xy, puisqu'on peut placer à volonté dans ce dernier plan le diamètre a'. Cela posé, si l'on appelle θ, θ', θ'' les angles xy, xz, yz, et si pour un nouveau système conjugué, qui aurait le même diamètre c' sur des z et les diamètres a'', b'' sur le plan xy, on désigne par λ, λ', λ'' les angles analogues, on aura

$$\begin{aligned} &a'^2 b'^2 \sin^2\theta + a'^2 c'^2 \sin^2\theta' + b'^2 c'^2 \sin^2\theta'' \\ &= a''^2 b''^2 \sin^2\lambda + a''^2 c'^2 \sin^2\lambda' + b''^2 c'^2 \sin^2\lambda''; \end{aligned}$$

car si l'on tient compte des relations

$$\begin{aligned} \cos\theta'' &= \cos\theta\cos\theta', \qquad \cos\lambda'' = \cos(\alpha+\lambda)\cos\theta', \\ \cos\lambda' &= \cos\alpha\cos\theta', \quad a'b'\sin\theta = a''b''\sin\lambda, \end{aligned}$$

dans lesquelles α est l'angle du demi-diamètre a'' avec a', on trouve aisément

$$a'^2 + b'^2\cos^2\theta = a''^2\cos^2\alpha + b''^2\cos^2(\alpha+\lambda)$$

qui n'est qu'un cas particulier de ce théorème :

La somme des carrés des projections des diamètres conjugués d'une ellipse sur une droite donnée est constante.

On passe ensuite au théorème général que nous avons en vue, en plaçant, comme le fait J. Binet, la diamètre a'' sur l'intersection du plan xy avec un nouveau plan $x'y'$ relatif à un second système conjugué (Leroy, *Analyse aux trois dimensions*, ch. XI).

2. Considérons dans un système rectangulaire l'ellipsoïde

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 1,$$

que nous couperons par un plan passant par son centre. Si θ est l'inclinaison de ce plan sur les xy, φ l'angle de la trace sur ce plan avec la ligne des x, l'équation de la section sera

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &x'^2(P\cos^2\varphi + P'\sin^2\varphi) \\ &+ y'^2(P\cos^2\theta\sin^2\varphi + P'\cos^2\theta\cos^2\varphi + P''\sin^2\theta) \\ &+ 2x'y'\cos\theta.\cos\varphi.\sin\varphi(P'-P) = 1, \end{aligned}\right.$$

x' coïncide avec la trace du plan de section, et y' est situé perpendiculairement dans ce plan.

Comparons cette section avec une ellipse dont les demi-axes seront $\frac{1}{\sqrt{M}}$, $\frac{1}{\sqrt{N}}$ et dont l'équation en système rectangulaire sera

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} x'^2(M\cos^2\omega + N\sin^2\omega) + y'^2(M\sin^2\omega + N\cos^2\omega) \\ + 2x'y'\sin\omega\cos\omega(N - M) = 1. \end{array}\right.$$

Si M, N sont donnés, cette équation renfermera une quantité non déterminée ω. Posons

$$u = M\cos^2\omega + N\sin^2\omega,$$

d'après laquelle u aura pour limites supérieure et inférieure M et N en supposant $M > N$. L'équation (2) prendra la forme

$$(3)\quad ux'^2 + (M + N - u)y'^2 + 2x'y'\sqrt{(M - n)(N - u)} = 1;$$

cette dernière identifiée à l'équation (1) donnera

$$\cos^2\theta = \frac{M + N - P'' - U}{P + P' - P'' - u},\quad \cos^2\varphi = \frac{u - P'}{P - P'},\quad \sin^2\varphi = \frac{P - u}{P - P'},$$

$$(4)\quad \frac{(M + N - P'' - u)}{P + P' + P'' - u}(u - P')(P - u) + (u - M)(u - N) = 0.$$

Ces relations prouvent que l'ellipse (2) ne peut être identifiée à la section que si

$$M + N < P + P',\quad u > P',\quad u < P$$

en supposant

$$P > P' > P''.$$

On peut d'abord satisfaire à ces conditions en prenant

$$N > P'',\quad N < P',\quad M > P',\quad M < P.$$

Dans cette hypothèse, la relation (4) (qui se réduit au premier degré) a sa racine comprise entre P′ et M puisqu'elle change de signe en posant

$$u = P' \quad \text{et} \quad u = M;$$

par suite ω aura une valeur réelle, et le problème sera susceptible de deux solutions. Si l'on supposait

$$N > P', \quad M < P,$$

la valeur unique de u fournie par l'équation (4) ne serait pas comprise entre M et N, puisque la substitution de ces nombres à la place de u donne des résultats de même signe; par suite ω serait imaginaire et le problème impossible. Ces considérations démontrent aussi que dans le cas des sections circulaires M et N doivent égaler P'. En exprimant P, P', P'' au moyen des axes rectangulaires, on verra que l'ellipse pour pouvoir être une section centrale de l'ellipsoïde doit avoir son petit axe et son grand axe plus petit et plus grand que le moyen axe rectangulaire de l'ellipsoïde.

3. Supposons l'équation d'un ellipsoïde donnée dans un système conjugué oblique :

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1.$$

On peut admettre que a', b' forment dans le plan xy un système conjugué rectangulaire. Cela supposé, prenons trois quantités a^2, b^2, c^2 pour inconnues et posons les trois relations

$$(5)\left\{\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= a'^2 + b'^2 + c'^2 = \mathrm{L},\\ a^2 b^2 c^2 &= a'^2 b'^2 c'^2 (1 - \cos^2\theta' - \cos^2\theta'') = \mathrm{K},\\ a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 &= a'^2 b'^2 + a'^2 c'^2 \sin^2\theta' + b'^2 c'^2 \sin^2\theta'' = \mathrm{G}.\end{aligned}\right.$$

On pourra regarder a^2, b^2, c^2 comme les trois racines de

$$(6) \qquad t^3 - \mathrm{L}t^2 + \mathrm{G}t - \mathrm{K} = 0.$$

Or ces racines sont réelles et positives. Supposons en effet

$$a' > b' > c' \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

la relation (6) donnera un résultat négatif $-\mathrm{K}$ ($\sqrt{\mathrm{K}}$ exprime le volume du parallélipipède oblique qui a pour arêtes a', b', c'); pour $t = b'^2$, on aura un résultat positif; pour $t = a'^2$, un résultat négatif et pour $t = \infty$ un résultat positif. Il existe donc trois valeurs positives a, b,

c qui satisfont aux relations (5) et qui sont telles que $a > a'$, $c < c'$.

Si nous concevons un ellipsoïde à axes rectangulaires a, b, c, nous pourrons faire par son centre une section qui donne par son intersection avec la surface une ellipse dont les axes seront a', b'. La droite des centres de toutes les sections parallèles donnera le diamètre conjugué de a', b', lequel, d'après la première relation (5), qui existe pour l'ellipsoïde à axes rectangulaires, sera égal à c'. Les deux dernières relations (5) qui ont lieu entre les axes a, b, c et les diamètres a', b', c' montrent que les angles de ces diamètres sont nécessairement $90°$, θ', θ''. Le système conjugué a', b', c' de l'ellipsoïde oblique est donc aussi un système conjugué d'un ellipsoïde à axes rectangulaires a, b, c. Il résulte de là que ces deux ellipsoïdes se confondent. Donc le système conjugué oblique quel qu'il soit suppose un système conjugué rectangulaire, ce à quoi nous parvenons sans employer la méthode de Petit.

Les surfaces privées de centre ne présentent aucune difficulté.