JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P.-A. HANSEN

Tables de la lune construites d'après le principe newtonien de la gravitation universelle

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 209-219.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__209_0>

TABLES DE LA LUNE

CONSTRUITES

D'APRÈS LE PRINCIPE NEWTONIEN DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE;

PAR P.-A. HANSEN,

Directeur de l'observatoire ducal de Gotha.

TRADUIT DE L'ALLEMAND PAR M. PUISEUX.

[Extrait des *Nouvelles astronomiques*, n° 1128.]

M. Hansen, qui a déjà tant avancé la science par ses recherches sur les perturbations, donne de sa théorie, dans l'ouvrage que nous annonçons, une application importante et intéressante à divers titres. Les inégalités du mouvement de la lune, à raison même de leur grandeur et de leur nombre, étaient particulièrement propres à mettre en évidence les avantages de la méthode de l'auteur, aussi bien qu'à décider jusqu'à quel point la loi d'attraction de Newton peut représenter les mouvements des corps célestes.

Euler s'était déjà proposé, dans ses recherches sur la lune, de calculer théoriquement toutes les inégalités, à l'exception du mouvement des nœuds et de celui des absides; mais quelque loin qu'il eût poussé sa théorie, on se convainquit bientôt qu'elle ne satisfaisait pas aux conditions que l'auteur s'était imposées. Tobie Mayer apporta à la théorie d'Euler de notables perfectionnements; il en déduisit principalement la forme des inégalités, mais ne calcula théoriquement que ceux des coefficients qui pouvaient être déterminés sûrement de cette manière, et rectifia les autres à l'aide des observations. Il y joignit d'ailleurs quelques inégalités que l'observation lui avait indiquées, mais dont il n'avait pas trouvé l'explication dans la théorie de la pesanteur. Mason et plus tard Bürg perfectionnèrent encore les Tables de la lune par une détermination plus précise des éléments de l'orbite et par l'introduction de plusieurs inégalités indiquées par la théorie : mais, comme Tobie Mayer, ils tirèrent des observations le plus grand nombre des coefficients.

Laplace approcha beaucoup plus que ses prédécesseurs du but qu'Euler s'était proposé : non-seulement il donna une détermination théorique plus exacte des coefficients des inégalités déjà connues, mais il en calcula un grand nombre de nouvelles. Parmi ces dernières, celle qui dépend de l'aplatissement de notre globe offrait un intérêt particulier, attendu qu'en tirant son coefficient des observations, on obtenait une nouvelle détermination de l'un des éléments du sphéroïde terrestre. Ce grand géomètre fit faire encore un progrès considérable à la théorie de la lune par la découverte de l'inégalité séculaire du moyen mouvement de cet astre, inégalité dont la comparaison des observations anciennes et modernes avait déjà indiqué l'existence. Par là fut écartée l'objection la mieux fondée qu'on eût élevée contre l'exactitude de la loi d'attraction de Newton, et en même temps l'invariabilité de la durée de la rotation de la terre depuis l'époque d'Hipparque se trouva démontrée.

Laplace tira de sa théorie les coefficients de toutes les inégalités considérées par lui, à l'exception de celles qui dépendent de la parallaxe du soleil et de l'aplatissement de la terre. Il emprunta également aux observations les moyens mouvements des nœuds et des absides, pensant que la théorie ne pourrait jamais les donner avec la même précision.

Burckhardt utilisa les recherches de Laplace pour la construction de ses Tables de la lune. Par là et par une détermination plus exacte des éléments de l'orbite, à l'aide des observations de Bradley que Bürg n'avait pu utiliser, les Tables de Burckhardt atteignirent une précision supérieure à celles des Tables précédentes. Par l'ordre du Bureau des Longitudes, on les compara avec cent soixante-six observations faites à Greenwich et à Paris dans l'intervalle du 19 juin 1802 au 24 juin 1807. Cette comparaison donna pour l'écart moyen entre les observations et les Tables les valeurs suivantes :

	Longitude.	Déclinaison.
Tables de Burckhardt....	$5'',27$	$5'',83$
Tables de Bürg.........	$6,53$	$6,37$

Toutefois l'erreur des Tables de Burckhardt est devenue plus considérable dans ces dernières années, et lors de l'éclipse totale de soleil du 28 juillet 1851, elle atteignait 29 secondes.

Indépendamment d'une plus grande précision, les Tables de Burckhardt ont encore sur les précédentes l'avantage que leur disposition les rend d'un emploi plus commode. A l'exception de l'évection, de l'équation du centre, de la variation et de la réduction, les arguments de toutes les Tables ont été remplacés par leurs valeurs moyennes : la formation des arguments devient dès lors beaucoup plus simple et on évite le calcul préalable du lieu du soleil.

En 1820, sur la proposition de Laplace, l'Académie des Sciences de Paris choisit pour sujet de prix la construction de Tables de la lune fondées uniquement sur la théorie et offrant la même précision que les Tables établies à la fois sur la théorie et sur les observations. Ce fut l'occasion pour Damoiseau et surtout pour Plana de perfectionner considérablement la théorie de la lune. Damoiseau publia des Tables construites d'après sa théorie, d'abord suivant la division décimale, puis suivant la division sexagésimale du cercle. C'est d'après les dernières qu'ont éte calculées les éphémérides de la lune données par Schumacher pour les années 1833 à 1835. M. Lamont les a comparées avec ses observations méridiennes faites en 1833 à l'observatoire de Munich. Cette comparaison a donné les résultats suivants :

48 observations; erreur moyenne..... $\Delta\alpha \cos\delta = 6'',34$,
42 observations; erreur moyenne..... $\Delta\delta = 4,49$.

Ainsi les Tables de Damoiseau n'étaient guère plus précises pour l'année 1833 que les Tables de Burckhardt pour l'époque de leur publication. Mais tandis qu'au 28 juillet 1851 l'erreur de celles-ci s'élevait, comme on l'a déjà dit, à 29 secondes, les Tables de Damoiseau n'étaient en erreur que de 9 secondes.

Plana poussa beaucoup plus loin que ses devanciers le développement des coefficients des inégalités en séries ordonnées suivant les puissances de l'excentricité, etc., de l'orbite lunaire, et son travail est incontestablement un des plus importants qui aient paru jusqu'ici sur cette théorie.

Mais dans de pareils développements on peut toujours craindre que

27..

certains des termes négligés n'aient des coefficients considérables et n'acquièrent par suite une valeur sensible. Or la méthode de M. Hansen ne laisse subsister aucun doute de ce genre, puisqu'elle détermine le coefficient de chaque inégalité avec une erreur inférieure à une limite fixée à volonté dès le commencement du calcul. Elle a encore sur les théories précédentes cet avantage, que pour atteindre un égal degré de précision dans le calcul de l'ensemble des perturbations, elle n'emploie pas un nombre de termes aussi considérable : de plus, elle fournit plusieurs équations de condition qui servent à la vérification des calculs numériques.

M. Hansen avait développé les perturbations provenant de l'action du soleil assez complétement pour pouvoir en répondre à $0'',02$ près, limite qu'il s'était imposée à l'avance. Quant aux perturbations qui dépendent de l'attraction des planètes, il en avait cru d'abord la détermination assez simple pour pouvoir utiliser, sans aucune modification, les recherches de Laplace et de Damoiseau sur ce point. Mais il reconnut ensuite que là encore il y avait d'importantes lacunes à combler.

Toutes les observations méridiennes de la lune faites à Greenwich de 1750 à 1830 ont été, sous la direction de M. Airy, réduites et comparées à la théorie de Plana; les écarts moyens calculés pour des périodes de quatre à dix ans atteignaient encore un maximum de $4'',6$, et la marche régulière des erreurs indiquait des inégalités à longues périodes négligées jusqu'à présent. M. Hansen fut amené par là à examiner de plus près les perturbations causées par l'attraction des planètes; il trouva, en effet, deux inégalités à longues périodes, dues à l'attraction de Vénus, et dont l'introduction faisait disparaître à peu près complétement les différences mentionnées ci-dessus entre le calcul et l'observation. Mais, contrairement à ce qu'il avait pensé d'abord, il reconnut que la détermination exacte, par la théorie, des coefficients des inégalités de la lune dues aux actions planétaires, était le point le plus difficile de la théorie du mouvement de cet astre.

Les réductions et les comparaisons exécutées sous la direction de M. Airy ont été d'une telle importance pour le perfectionnement de la théorie de la Lune, qu'on nous permettra d'entrer dans quelques détails à ce sujet.

Les longitudes et les distances polaires écliptiques de la lune ont été comparées avec les lieux du même astre calculés d'après les formules de Plana, et en adoptant pour les éléments de l'orbite et le moyen mouvement les valeurs admises par Damoiseau. De ces comparaisons, M. Airy conclut de nouvelles valeurs des éléments de l'orbite, de la constante de la parallaxe, des moyens mouvements des nœuds et des absides, des coefficients de la variation, de l'évection et de l'équation annuelle, et aussi des coefficients des inégalités qui dépendent de la parallaxe du soleil et de l'aplatissement de la terre. Cette recherche fit découvrir en outre à M. Airy de petites inégalités que la théorie n'avait point encore indiquées.

Le 1er volume de l'ouvrage intitulé : *Reduction of the Moon's observations, made at the royal observatory, Greenwich, from* 1750 *to* 1830, *computed under the superintendence of Airy* [*], renferme une suite de Tables dont M. Airy a fait usage dans sa discussion, et qui, combinées avec les Tables de Damoiseau, lui fournissent le lieu de la lune, comme s'il eût été calculé d'après la théorie de Plana, et avec les éléments de l'orbite et les moyens mouvements des nœuds et des absides tels que Damoiseau les a déterminés. M. Airy a seulement négligé quelques petits termes donnés par Plana, dont les coefficients ne dépassent pas 0",2.

Les résultats des recherches entreprises et publiées jusqu'ici sur le mouvement de la lune se trouvent réunis dans l'ouvrage suivant :

Tables of the Moon, constructed from Plana's theorie, with Airy's and Longstreth's corrections, Hansen's two inequalities of long period arising from the action of Venus, and Hansen's values of the secular variations of the mean motion and of the motion of the perigee. Arranged in a form designed by professor Benjamin Peirce, under the superintendence of Charles Henry Davis, and published under the authority of John P. Kennedy. Washington, 1853 [**].

---

[*] Réduction des observations de la Lune faites de 1750 à 1830 à l'observatoire royal de Greenwich, calculée sous la direction de M. Airy.

[**] Tables de la lune fondées sur la théorie de Plana, avec les corrections d'Airy et de Longstreth, les deux inégalités à longues périodes de Hansen résultant de l'action de Vénus, et les valeurs données par le même astronome pour les variations séculaires du moyen mouvement et du mouvement du périgée. Disposées suivant la

Les bases de ces Tables sont, comme le titre l'indique, 1° les éléments de l'orbite et les moyens mouvements des nœuds et des absides, tels qu'ils résultent des recherches déjà citées de M. Airy; 2° les expressions des inégalités données par Plana, avec les corrections apportées par M. Airy à quelques-unes d'entre elles; 3° les inégalités empiriques découvertes par M. Airy; 4° les inégalités dépendantes de l'attraction de Vénus et les variations séculaires du moyen mouvement de la lune et du mouvement du périgée, telles que M. Hansen les a données dans le n° 597 des *Nouvelles astronomiques;* 5° les petites corrections empiriques apportées par Longstreth à quelques inégalités de Plana.

La publication de cet ouvrage paraît due au désir de satisfaire, avant l'entier achèvement du travail de M. Hansen, et autant que la chose était possible, au besoin pressant qu'éprouvaient les astronomes de Tables de la lune dont la précision répondît à l'état actuel de la science.

Revenons à présent aux recherches de M. Hansen. Après qu'il eut découvert les inégalités à longues périodes produites par l'attraction de Vénus, le savant astronome développa les autres perturbations causées par l'action plus ou moins directe des planètes, d'une manière assez complète pour être sûr de ne laisser échapper aucun terme sensible. Ce travail lui donna l'explication théorique des nouvelles inégalités que M. Airy avait reconnues par les observations. Il détermina théoriquement les coefficients de ces inégalités comme de toutes les autres, à l'exception de ceux qui ne peuvent être tirés que des observations; il a la conviction que tous ces coefficients sont déterminés à $0'',2$ près, et même que la plupart le sont beaucoup plus exactement.

Les recherches de M. Hansen l'ont conduit à un grand nombre de résultats nouveaux, et indépendamment de ceux que nous avons déjà cités, nous devons mentionner particulièrement cette découverte, que le centre de gravité de la lune ne coïncide pas avec le centre de sa

---

forme indiquée par le professeur Benjamin Peirce, sous la direction de Charles Henry Davis, et publiées par John P. Kennedy. Washington, 1853.

surface. D'après M. Hansen, la distance de ces deux points s'élève à environ 8 milles géographiques, le centre de gravité étant plus éloigné de nous de cette quantité que le centre de figure. Cette circonstance accroît de $0'',69$ le coefficient de l'évection. Les coefficients des autres inégalités de la longitude moyenne doivent être augmentés dans le même rapport.

Les moyens mouvements des nœuds et des absides auraient pu aussi être déduits en toute rigueur de la théorie de M. Hansen; mais le nombre des termes à calculer eût été tellement grand et le travail si pénible, que M. Hansen a préféré les tirer des observations. Il a employé pour cet objet, d'une part les observations de Greenwich de 1750 à l'époque actuelle réduites par M. Airy, d'autre part les observations méridiennes de Dorpat. Les éléments de l'orbite ont été conclus des observations méridiennes les plus récentes de Greenwich et de Dorpat. M. Hansen n'a donc employé, pour la construction de ses Tables, aucun élément de calcul qu'il n'ait tiré lui-même de sa théorie ou des observations.

Pour mettre à l'épreuve la précision de ses Tables, M. Hansen les a comparées à des observations méridiennes soit récentes, soit anciennes. Il a pris les premières au hasard parmi les observations faites à Greenwich, du 8 mars 1824 au 27 septembre 1850. Voici les valeurs moyennes des erreurs :

139 observations...... $\Delta\alpha \cos\delta = 2'',62$,
157 observations...... $\Delta\delta = 2'',10$.

Ces moyennes ne sont guère plus grandes que les erreurs moyennes des observations d'étoiles fixes faites aux mêmes instruments, et comme l'observation de la lune n'est pas susceptible de la même précision que celle d'une étoile, il est permis de les attribuer aux observations. Si l'on compare ces erreurs avec celles des Tables de Burckhardt et de Damoiseau que nous avons rapportées ci-dessus, on voit à quel point les Tables de Hansen les surpassent en précision, pour l'époque même de la publication des premières.

Les observations de Bradley se trouvent également représentées d'une manière satisfaisante. Celles que M. Hansen a comparées à ses Tables sont comprises entre le 24 octobre 1751 et le 14 mai 1753 : elles lui ont donné, pour les erreurs moyennes, les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{ll} 62 \text{ observations}\ldots\ldots & \Delta\alpha\cos\delta = 3'',78, \\ 57 \text{ observations}\ldots\ldots & \Delta\delta = 5'',79. \end{array}$$

Ces erreurs peuvent encore être attribuées aux observations seules, si l'on considère que les déclinaisons ont été obtenues à l'aide du quart de cercle en fer de Graham, et que Bessel a trouvé cet instrument trop défectueux pour pouvoir employer dans ses *Fundamenta* les observations qu'il a servi à faire.

Il suit de ce qui précède, que les Tables de Hansen représentent les observations méridiennes qu'on leur a comparées avec une précision qui ne laisse rien à désirer. Il était donc très-intéressant de rechercher jusqu'à quel point les documents qui nous sont parvenus sur quelques éclipses de soleil observées dans l'antiquité, s'accordent avec les mêmes Tables, d'autant plus que M. Hansen n'avait employé aucune éclipse, ancienne ou moderne, pour la détermination des éléments elliptiques de l'orbite et des mouvements des nœuds et du périgée.

L'illustre directeur de l'observatoire de Greenwich a entrepris cette recherche, et en a publié les résultats dans les *Transactions philosophiques* pour 1857. Les éclipses de soleil qu'il a discutées sont celles d'Agathocle, de Larisse, de Thalès et de Sticklastadt.

La première arriva pendant qu'Agathocle retournait de Syracuse en Afrique avec sa flotte, le second jour après son départ, le 15 août de l'an 310 avant J.-C. D'après le récit de Diodore, l'obscurité fut si complète, qu'on put se croire en pleine nuit, et que des étoiles se montrèrent dans toute l'étendue du ciel; il n'est pas douteux d'après cela que l'éclipse ne fût totale. Quant au lieu de l'observation, on pourrait se demander si Agathocle avait pris la route la plus courte en se dirigeant vers le sud à partir de Syracuse, ou s'il n'avait pas d'abord fait voile vers le nord, de manière à faire le tour de la Sicile. D'après les Tables de Hansen, c'est la première hypothèse qu'il faut adopter, et alors une éclipse totale a dû avoir lieu le second jour après le départ.

Dans cette éclipse, la situation du lieu de l'observation était incertaine à 1° 30′ près en latitude. Pour celle de Larisse, au contraire, on connaît exactement le lieu où elle a été vue (aujourd'hui Nimrod);

cette dernière éclipse permettait donc de soumettre les Tables de la lune à une épreuve plus décisive.

Xénophon rapporte dans son *Anabasis* que le roi de Perse, après avoir vaincu les Mèdes, avait assiégé longtemps sans succès la ville de Larisse, mais qu'un jour le soleil avait disparu comme voilé par un nuage. Les habitants auraient été découragés par ce phénomène inattendu, et la prise de la ville s'en serait suivie.

On ne peut douter qu'il s'agisse d'une éclipse de soleil, et vraisemblablement d'une éclipse totale. M. Airy examina toutes les éclipses qui ont eu lieu dans l'intervalle de quarante ans, où l'on peut placer l'époque du siége, et trouva qu'en effet, d'après les Tables de Hansen, une éclipse totale et presque centrale de soleil devait avoir eu lieu à Larisse le 19 mai de l'an 556 avant J.-C.

Nous manquons de renseignements précis sur le lieu où l'éclipse de Thalès a été observée. Elle arriva, suivant Hérodote, pendant un combat entre les Lydiens et les Mèdes, et l'obscurité fut telle, que le jour se changea subitement en nuit. Le même historien rapporte que Thalès avait prédit cette éclipse aux Ioniens. Il suit des recherches de M. Airy que le champ de bataille se trouvait dans l'intérieur d'un polygone, ayant pour sommets Sardes, Iconium, Tarse, Issus, Mélitène, Ancyre, Sardes, ou bien que s'il n'était pas en Asie Mineure, il se trouvait à l'est-sud-est du même polygone. Quant à l'époque, on sait positivement que le combat a eu lieu vers l'an 584 avant J.-C. Or M. Airy trouve que, d'après les Tables de Hansen, il y a eu le 28 mai 584 avant J.-C. une éclipse de soleil qui a dû être totale pour une partie considérable du polygone en question, et qui n'est autre sans aucun doute que l'éclipse de Thalès.

Ainsi ces trois éclipses se trouvent représentées par les Tables de Hansen, avec toute l'exactitude que comportent les documents historiques qui nous sont parvenus. M. Airy a encore comparé aux Tables l'éclipse de Sticklastadt, pour laquelle les éléments du calcul lui avaient été fournis par M. Hansen lui-même. M. le professeur Hansteen a donné, dans le numéro complémentaire des *Nouvelles astronomiques*, un compte rendu détaillé de cette éclipse. Elle arriva pendant un combat que les guerriers chrétiens, sous la conduite du roi de Norwége Olaf Haraldsson, livraient à une armée de paysans païens révoltés.

Voici ce qu'en rapporte Snorre Sturlason : « Le temps était beau et le soleil brillait; mais quand la bataille eut commencé, une teinte rougeâtre se répandit sur le ciel et sur le soleil, et, avant que le combat fût terminé, l'obscurité devint aussi grande que pendant la nuit. »

La situation du champ de bataille a été déterminée avec certitude par M. le professeur Hansteen, et les recherches de cet illustre savant fixent positivement la date du combat au 31 août 1030. L'heure du jour à laquelle eut lieu la plus grande obscurité est aussi approximativement connue, puisque, d'après la relation déjà citée, le combat commença vers une heure et demie de l'après-midi et finit avant trois heures.

D'après les Tables de Hansen, l'éclipse n'a pas été totale à Sticklastadt; mais la cent neuvième partie seulement de la surface du soleil a dû rester visible. Comme pendant la plus grande phase le soleil n'était qu'à 25 degrés au-dessus de l'horizon, le jour a dû être considérablement affaibli. M. Airy trouve qu'on obtiendrait une éclipse totale pour Sticklastadt, sans que celle de Larisse cessât de l'être, en augmentant de $0'',809$ l'accélération séculaire tropique. Comme on ne peut mettre en doute l'exactitude de la valeur de l'accélération moyenne déduite par M. Hansen de la loi de la gravitation newtonienne, on serait conduit par là à modifier légèrement cette loi. Mais comme il n'est pas établi d'une manière absolument certaine que les deux éclipses citées aient été totales, on n'est pas suffisamment autorisé à changer la valeur de l'accélération calculée par M. Hansen.

Le résultat de toutes ces épreuves est aussi favorable aux Tables de Hansen qu'on pouvait l'espérer, et on peut regarder comme certain que pendant longtemps elles donneront les lieux de la lune avec une précision supérieure à celle d'observations méridiennes isolées. Si plus tard on vient à déterminer avec une précision plus grande les éléments de l'orbite et les moyens mouvements des nœuds et des absides, les corrections, en tout cas très-petites, qui en résulteront s'introduiront très-aisément dans les Tables. Une valeur durable est donc assurée à l'ouvrage de M. Hansen, puisque les inégalités n'y auront jamais besoin de corrections.

On tire immédiatement des Tables la longitude, la latitude et le logarithme du rayon vecteur de la lune. On n'y a pas introduit toutes les inégalités dont M. Hansen a donné l'expression dans l'introduction; quelques-unes, dont les coefficients étaient très-petits, ont été négligées, surtout lorsque leur période était très-courte.

On trouve encore à la fin de l'ouvrage des Tables qui facilitent la transformation de la longitude et de la latitude de la lune, en ascension droite et en déclinaison.