JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres; deuxième article

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 193-200.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__193_0>

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

DEUXIÈME ARTICLE.

Dans ce second article, au lieu de considérer un nombre $2m$ simplement pair, nous prenons un nombre $2^\alpha m$ divisible par une puissance quelconque de 2. Ainsi l'exposant α est pris à volonté dans la suite naturelle 1, 2, 3, 4,...; mais il ne peut pas se réduire à zéro, en sorte que $2^\alpha m$ est toujours un nombre pair. Quant au facteur m, il est impair : nous posons comme d'habitude $m = d\delta$, représentant ainsi par d un quelconque des diviseurs de l'entier m, et par δ le diviseur conjugué ou complémentaire à d.

Décomposons $2^\alpha m$ en deux parties impaires m', m'' dont $2^\alpha m$ soit la somme. En d'autres termes posons

$$2^\alpha m = m' + m'',$$

m' prenant les valeurs successives

$$1,\ 3,\ 5,\ldots,\ 2^\alpha m - 1,$$

tandis que m'' prend les valeurs correspondantes

$$2^\alpha m - 1,\ 2^\alpha m - 3,\ldots,\ 3,\ 1.$$

Nous faisons d'ailleurs

$$m' = d'\delta',\quad m'' = d''\delta'',$$

à l'imitation de ce qu'on a fait tout à l'heure pour le nombre m.

Cela posé, désignons par $f(x)$ une fonction arbitraire, mais telle pourtant que l'on ait

$$f(-x) = f(x)$$

pour toutes les valeurs de x qu'on aura à placer sous le signe f; et considérons, comme dans notre premier article, la somme triple

$$\mathrm{S} = \sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'') - f(d'+d'')]\right\},$$

dans laquelle les deux premières sommations portent sur les diviseurs d', d'' des deux entiers impairs m', m'' composant un quelconque des groupes dont il vient d'être question et qui donnent $m' + m'' = 2^\alpha m$. Le troisième $\sum$ indique qu'après avoir trouvé les sommes partielles, on doit en faire le total pour tous ces groupes. Ce total S peut s'exprimer très-simplement au moyen des seuls diviseurs d du nombre m. En effet, je me suis assuré que

$$\mathrm{S} = 2^{\alpha-1}\sum d[f(0) - f(2^\alpha d)].$$

Ainsi, l'on a cette formule remarquable

$$(a)\quad \sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'') - f(d'+d'')]\right\} = 2^{\alpha-1}\sum d[f(0) - f(2^\alpha d)],$$

qui complète heureusement la formule (A) de notre premier article. Ce serait la formule (A) elle-même, si l'on avait $\alpha = 1$.

En prenant

$$f(x) = x^2,$$

la formule (a) nous donne

$$\sum\left(\sum\sum d'd''\right) = 2^{3\alpha-3}\sum d^3.$$

Représentons à notre ordinaire par $\zeta_\mu(m)$ la somme des puissances de degré μ des diviseurs d du nombre m, et le second membre s'écrira

$$2^{3\alpha-3}\zeta_3(m).$$

Quant au premier membre, on remarquera d'abord que la double somme

$$\sum\sum d' d''$$

équivaut au produit

$$\sum d' \cdot \sum d'',$$

c'est-à-dire à

$$\zeta_1(m')\zeta_1(m''):$$

En faisant donc le total pour tous les groupes m', m'', on aura finalement

$$\sum \zeta_1(m')\zeta_1(m'') = 2^{3\alpha-3}\zeta_3(m),$$

d'où il est aisé de conclure que le nombre des décompositions de l'octuple d'un entier quelconque, je veux dire de

$$4 \cdot 2^{\alpha} m,$$

en une somme de huit carrés impairs, est exprimé par

$$2^{3\alpha-3}\zeta_3(m).$$

En particulier soit $m = 1$, et nous voyons que le nombre des décompositions de

$$2^{\alpha+2}$$

en une somme de huit carrés impairs est égal à

$$2^{3\alpha-3}:$$

on suppose, je le répète, l'exposant α au moins égal à l'unité.

L'équation qui concerne ce cas particulier de $m = 1$ semble mériter qu'on la transcrive. La voici :

$$\zeta_1(1)\zeta_1(2^{\alpha}-1) + \zeta_1(3)\zeta_1(2^{\alpha}-3) + \zeta_1(5)\zeta_1(2^{\alpha}-5) + \ldots + \zeta_1(2^{\alpha}-1)\zeta_1(1) = 2^{3\alpha-3}.$$

Le théorème de Jacobi sur le nombre des décompositions du quadruple d'un entier impair en une somme de quatre carrés impairs revient à dire que l'on a l'identité

$$(x + x^9 + x^{25} + \ldots)^4 = x^4\zeta_1(1) + x^{12}\zeta_1(3) + \ldots + x^{4m}\zeta_1(m) + \ldots,$$

le nombre m étant impair dans le second membre. C'est en effet de cette identité établie dans ses *Fundamenta nova* que Jacobi a d'abord tiré le théorème dont nous parlons; mais plus tard il en a donné une démonstration directe, de sorte qu'à son tour l'identité algébrique citée serait fournie par les seuls principes de la théorie des nombres.

La formule

$$\sum \zeta_1(m') \zeta_1(m'') = 2^{3\alpha-3} \zeta_3(m)$$

peut servir à son tour à trouver la huitième puissance de la série

$$x + x^9 + x^{25} + \ldots.$$

Elle montre en effet que le coefficient de $x^{8\mu}$ dans le développement de

$$(x + x^9 + x^{25} + \ldots)^8,$$

ou, ce qui revient au même, dans le développement de

$$[x^4 \zeta_1(1) + x^{12} \zeta_1(3) + \ldots]^2,$$

s'obtiendra en posant

$$\mu = 2^{\alpha-1} m,$$

m étant impair : il s'exprimera par

$$2^{3\alpha-3} \zeta_3(m).$$

Je n'ai pas besoin d'ajouter que tous les exposants de x dans le développement dont nous parlons sont des multiples de 8, et que c'est pour cela que j'ai parlé uniquement du coefficient de $x^{8\mu}$. L'équation qu'on obtient définitivement, savoir,

$$(x + x^9 + x^{25} + \ldots)^8 = \sum\sum \left[2^{3\alpha-3} \zeta_3(m) x^{2^{\alpha+2} m}\right],$$

où la double sommation porte sur les valeurs 1, 2, 3, 4, 5,... de α, et 1, 3, 5, 7,... de m, s'accorde, bien entendu, avec les formules elliptiques de Jacobi.

Puisqu'il a été question de la série

$$x + x^9 + x^{25} + \ldots,$$

je ferai observer qu'elle s'exprime par une suite infinie de fractions, savoir :

$$\frac{x}{1-x^2} - \frac{x^3}{1-x^6} - \frac{x^5}{1-x^{10}} - \frac{x^7}{1-x^{14}} + \frac{x^9}{1-x^{18}} - \ldots.$$

Le terme général est

$$\frac{\lambda(m)\,x^m}{1-x^{2m}},$$

m étant un nombre impair et $\lambda(m)$ une fonction numérique dont nous avons parlé ailleurs, et qui est égale à 1 ou à -1, suivant que le nombre total des facteurs premiers égaux ou inégaux dont m est le produit est pair ou impair.

Pour la série

$$x + x^4 + x^9 + x^{16} + \ldots,$$

le terme général de l'expression en fractions de la forme

$$\frac{x^s}{1-x^s}$$

serait

$$\frac{\lambda(s)\,x^s}{1-x^s},$$

s prenant successivement toutes les valeurs $1, 2, 3, 4, \ldots$.

Revenons à la formule (a) pour y faire

$$f(x) = x^4.$$

Il s'ensuivra facilement

$$\sum \zeta_1(m')\,\zeta_3(m'') = 2^{5\alpha-5}\,\zeta_5(m);$$

d'où l'on conclura que

$$2^{5\alpha-5}\,\zeta_5(m)$$

est le nombre des décompositions de

$$2^{\alpha+3}.m$$

en une somme de huit carrés impairs, formant un multiple impair de 8, plus le double d'une autre somme de quatre carrés impairs.

Soit généralement

$$f(x) = x^{2\mu}:$$

il nous viendra

$$\begin{aligned}2^{2\alpha\mu+\alpha-2}\zeta_{2\mu+1}(m) = \frac{2\mu}{1}\sum\zeta_1(m')\zeta_{2\mu+1}(m''')\\ + \frac{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)}{1.2.3}\sum\zeta_3(m')\zeta_{2\mu-3}(m'')+\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\frac{2\mu}{1}\sum\zeta_{2\mu-1}(m')\zeta_1(m'').\end{aligned}$$

Enfin, soit

$$f(x) = \cos xt$$

t désignant une constante quelconque. On trouvera

$$\sum\left(\sum \sin d't \cdot \sum \sin d''t\right) = 2^{\alpha-1}\sum d\sin^2(2^{\alpha-1}dt).$$

Je ne m'arrêterai pas à faire d'autres applications de la formule (a). Je passe de suite à une seconde formule qui comprend comme cas particulier la formule (a) et qui répond à la formule (B) de notre premier article.

Considérons la somme triple

$$\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'', \delta'+\delta'')-f(\delta'+\delta'', d'-d'')]\right\}$$

où nous conservons toutes les notations ci-dessus, en sorte que d' et d'' sont des diviseurs quelconques des deux nombres impairs m', m'' dont la somme $m'+m''$ forme le nombre donné $2^\alpha m$: δ', δ'' sont les diviseurs complémentaires à d', d''. Les deux premières sommations concernent les diviseurs d', d'', δ', δ'' appartenant à un groupe (m', m'') pris à volonté, et le troisième $\sum$ nous apprend qu'il faut ensuite réunir ces sommes partielles en un total qui comprenne tous les groupes. Enfin la fonction $f(x, y)$ est arbitraire, mais telle pourtant que l'on ait

$$f(-x, y) = f(x, -y) = f(x, y),$$

pour toutes les valeurs de x, y dont on fera usage.

Cela posé, je dis que la somme triple dont il s'agit peut s'exprimer par une somme simple relative aux seuls diviseurs d de l'entier impair donné m. La valeur de la somme que voici

$$2^{\alpha-1}\sum d\,[f(0, 2^\alpha d) - f(2^\alpha d, 0)]$$

est en effet égale à celle de la somme triple.

En d'autres termes, on a

$$(b)\quad \sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'', \delta'+\delta'')-f(\delta'+\delta'', d'-d'')]\right\}=2^{\alpha-1}\sum d[f(0,2^\alpha d)-f(2^\alpha d,0)].$$

Cette formule répond, comme nous l'avions annoncé, à la formule (B) de notre premier article. Ajoutons-en une autre équivalente et qui répondra à la formule (C). On a

$$(c)\quad \sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'', \delta'+\delta'')-f(d'+d'', \delta'-\delta'')]\right\}=2^{\alpha-1}\sum d[f(0,2^\alpha d)-f(2^\alpha d,0)].$$

Je me contenterai, pour le moment du moins, d'indiquer une seule application. Prenons, dans la formule (c),

$$f(x, y) = \cos xt \cos yz,$$

t et z désignant des constantes quelconques : faisons de plus, comme dans notre premier article, et relativement à tout entier impair $m = d\delta$,

$$\sum \sin dt \cos \delta z = \psi(m), \quad \sum \cos dt \sin \delta z = \varpi(m);$$

et nous arriverons à la formule

$$\sum \psi(m')\psi(m'') - \sum \varpi(m')\varpi(m'') = 2^{\alpha-1} \sum d[\sin^2(2^{\alpha-1}dt) - \sin^2(2^{\alpha-1}dz),$$

que nous regardons comme importante.

Il serait aisé d'ajouter d'autres exemples; mais nous croyons en avoir assez dit pour que le sens de nos formules soit bien fixé et leur utilité mise hors de doute.