JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

HOUSEL

Les coniques d'Apollonius

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 153-192.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__153_0>

LES CONIQUES D'APOLLONIUS;

Par M. HOUSEL.

Nous savons que les mathématiciens de l'antiquité avaient des notions très-étendues sur les sections coniques, mais nous savons aussi qu'ils ne connaissaient pas les méthodes analytiques au moyen desquelles on étudie aujourd'hui ces courbes. Nous avons donc un certain intérêt à rechercher comment ils ont pu découvrir la plus grande partie des théorèmes que nous connaissons maintenant sur ce sujet.

Le plus illustre des savants anciens qui ont écrit sur les sections coniques est Apollonius, de Perge, en Pamphylie. Il vivait à Alexandrie, cette nouvelle Athènes des successeurs d'Alexandre, sous Ptolémée Evergète, vers l'an 244 avant Jésus-Christ.

Son ouvrage se compose de huit livres dont le sujet nous est connu par une lettre qu'il écrivit à Eudème, et par les *Collections mathématiques* de Pappus, mais pendant longtemps on n'a possédé que les quatre premiers. Une traduction arabe des trois livres suivants fut découverte, en 1658, par le mathématicien Borelli, dans la bibliothèque des Médicis. Plus tard, on a encore trouvé d'autres manuscrits arabes de ces trois livres; mais le huitième livre paraît complétement perdu.

Avant d'analyser l'ouvrage d'Apollonius, il est nécessaire de rechercher, je ne dis pas l'état de la science avant ses travaux, ce qui serait assez difficile, mais du moins la définition que l'on donnait avant lui des différentes espèces de sections coniques. Voici comment Pappus expose ces anciennes définitions.

Dans un cône circulaire quelconque, droit ou oblique, menons un plan arbitraire par l'axe, c'est-à-dire par la ligne qui joint le sommet au centre de la base, ce plan déterminera au sommet du cône un angle droit, aigu ou obtus; puis, imaginons un plan perpendiculaire à l'un des côtés de cet angle et voyons quelle sera la nature de la section déterminée par ce nouveau plan sur la surface conique.

Si l'angle du sommet est droit, on aura une courbe indéfinie sur une seule nappe du cône, c'est-à-dire une parabole; si l'angle est aigu, on obtiendra sur une seule nappe une courbe fermée, c'est-à-dire une ellipse; enfin, si l'angle est obtus, on aura sur chaque nappe deux branches infinies, ou bien une hyperbole.

Mais Apollonius observa que les trois espèces de sections pouvaient être obtenues d'un même cône; il parvint ainsi à rédiger un traité aussi complet qu'on pouvait l'espérer à cette époque et que le monde savant s'est contenté de commenter pendant bien des siècles.

Le premier livre d'Apollonius a pour but de définir les sections coniques et d'obtenir leurs équations au moyen des diamètres conjugués.

Ce mot d'*équation* pourrait étonner si l'on pensait que les anciens n'eussent aucune connaissance de l'analyse : assurément, la discussion de l'équation générale du second degré à deux variables n'était pas à leur portée, mais ils n'en avaient pas moins une méthode de calcul appliquée à la géométrie, dont on trouve dans Euclide une foule d'exemples, quelquefois assez compliqués, tels que la mesure du segment sphérique. Cette méthode, qui nous semble aujourd'hui exiger beaucoup plus d'efforts d'esprit que le mécanisme de l'algèbre, mais qui leur était sans doute rendue plus facile par une habitude constante, consistait à obtenir, par les proportions qu'ils maniaient très-habilement, des expressions capables d'être construites géométriquement.

Quant à l'idée même des *coordonnées*, elle est tellement simple, que les anciens n'ont pu manquer de la concevoir : les mots même d'*abscisses* et d'*ordonnées* se trouvent dans Apollonius et étaient certainement employés avant lui. Cela ne diminue en rien la gloire de notre Descartes qui a fécondé cette pensée au point d'en tirer une science toute nouvelle.

Dans le cours de l'analyse que nous entreprenons, nous serons souvent forcé, pour éclaircir et surtout pour abréger les démonstrations, de nous rapprocher des usages et des calculs modernes : mais il sera toujours sous-entendu que, dans les constructions géométriques de l'auteur, on parvient, au moyen d'un nombre suffisant de moyennes proportionnelles, à n'avoir qu'un seul facteur au numérateur et au dénominateur d'une expression quelconque; s'il y a, au contraire, un facteur commun à supprimer entre ces deux termes, cela revient à considérer le rapport de deux rectangles qui ont une dimension commune et qui sont entre eux comme leurs autres côtés. De plus, quand le numérateur et le dénominateur d'une expression contenaient beaucoup de facteurs, les anciens la décomposaient dans le produit de deux ou de plusieurs rapports, et cette expression était dite la *raison composée* (λόγος συγκείμενος) de ces rapports ou raisons.

Nous verrons que, sauf ces différences de forme, les méthodes d'Apollonius ressemblent quelquefois à celles que l'on emploie encore aujourd'hui.

Apollonius ne s'occupe pas seulement du cône droit de la géométrie élémentaire; il considère immédiatement le cône circulaire oblique, engendré par une droite qui s'appuie constamment sur une circonférence en passant toujours par un sommet donné. Il démontre que tout plan passant par ce sommet détermine un triangle dont un des côtés est une corde du cercle de base; que toute section parallèle à cette base est aussi un cercle, et enfin il prouve, comme on le fait maintenant, l'existence du cercle sous-contraire ou anti-parallèle : ensuite il pose, comme lemme fondamental, la proposition suivante (livre I, prop. 6):

Par l'axe du cône, c'est-à-dire par la droite qui joint le sommet au centre du cercle de base, imaginez un plan quelconque, qui coupera le cône suivant un triangle qu'on appelle *triangle par l'axe* et dont la base est un diamètre du cercle; dans le plan de ce cercle, menez une perpendiculaire à ce diamètre, et enfin, par un point quelconque pris sur la surface du cône, menez une parallèle à cette perpendiculaire: le plan mené par l'axe divisera cette parallèle en deux parties égales.

Ce théorème est facile à démontrer par des triangles semblables, en menant par cette parallèle et par le sommet du cône un plan qui coupe le cercle de base suivant une perpendiculaire au diamètre indiqué.

D'après cela, concevez un plan qui coupe la base suivant une perpendiculaire à ce diamètre, vous obtiendrez évidemment une section conique dont l'intersection avec le triangle par l'axe sera un diamètre transverse, comme coupant en deux parties égales une série de cordes parallèles, et rencontrant la section conique que l'on considère au point où le plan sécant rencontre à la fois le plan mené par l'axe et le cône ; si vous prenez pour base le cercle passant par ce point, vous obtiendrez une droite tangente à la section conique et parallèle aux cordes divisées en deux parties égales par le diamètre qui aboutit au même point.

Le triangle par l'axe a évidemment deux côtés passant par le sommet du cône; le premier de ces côtés passant par le point que nous venons de déterminer sur la section, cette courbe sera une parabole si le diamètre transverse est parallèle au second de ces côtés; elle sera une ellipse, s'il rencontre ce second côté sur la même nappe que le premier, et une hyperbole s'il le rencontre sur l'autre nappe. Mais il faut observer que les anciens ne donnaient le nom d'hyperbole qu'à la moitié de la courbe que nous appelons ainsi, et que les deux parties de cette courbe, comparées l'une à l'autre, portaient le nom de *sections opposées*.

Prenons donc pour origine des coordonnées le point de la courbe que nous avons déterminé; le diamètre transverse sera l'axe des abscisses, et la tangente que nous avons menée à l'origine sera l'axe des ordonnées. Apollonius parvient alors à l'équation

$$y^2 = 2px + qx^2$$

de la même manière que les modernes, c'est-à-dire en menant par un point quelconque de la courbe un plan parallèle à la base du cône ; il est bien entendu que les sinus sont remplacés par des rapports de lignes. La parabole a pour équation $y^2 = 2px$; c'est la courbe par *égalité;* si q est négatif, c'est-à-dire s'il faut retrancher quelque chose de $2px$, on a l'ellipse, ou la courbe par *défaut;* enfin, s'il faut ajouter quelque chose à $2px$ pour avoir y^2, on obtient l'hyperbole, ou la courbe par *excès;* ainsi se trouvent justifiées les dénominations de ces trois courbes.

Ensuite considérant la section, telle que l'ellipse, dans son plan et indépendamment du cône, l'auteur transporte l'origine au milieu du diamètre transverse, en diminuant les abscisses de la moitié de ce diamètre, ce qui lui donne l'équation

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

ou bien

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ici a est la moitié du diamètre transverse, et b est la moitié du diamètre *droit*, c'est-à-dire du second diamètre, parallèle aux ordonnées et conjugué du premier. Seulement, ce mot de diamètre *droit* (ὀρθία) ne doit pas induire en erreur et faire croire que ces deux diamètres sont nécessairement perpendiculaires. Au contraire, comme on peut mener une infinité de triangles par l'axe, il s'agit d'un système quelconque de diamètres conjugués.

On appelle *côté droit* le coefficient $2p = \frac{2b^2}{a}$, et l'on nomme *figure* le parallélogramme fait sur le diamètre transverse $2a$ et sur le côté droit $\frac{2b^2}{a}$, pris dans la direction du diamètre droit, c'est-à-dire de la tangente à l'extrémité du premier diamètre; ainsi $2b$ sera une moyenne proportionnelle entre les deux côtés de la figure.

Ces définitions s'appliquent aussi à l'hyperbole, mais on voit que, pour cette dernière courbe, le diamètre droit n'est autre chose que le diamètre non transverse.

Dans les trois sections le *côté droit* $2p$ est une ligne dont la longueur est déterminée par les éléments du cône et la position du plan sécant; mais dans l'ellipse cette quantité se trouve encore au moyen du second diamètre, qui est lui-même transverse; dans l'hyperbole, au contraire, c'est la valeur du côté droit qui fait connaître celle de b^2.

L'équation ordinaire

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

de l'ellipse et de l'hyperbole, fait voir, par une simple considération de triangles égaux, que toute corde passant par le milieu commun des diamètres conjugués a et b s'y trouve divisée en deux parties égales; ce milieu est donc un *centre*.

Les trois sections étant toujours rapportées à un système de diamètres conjugués, Apollonius cherche l'équation de la tangente en un point donné de la courbe, à peu près par la méthode suivante, que nous appliquerons seulement à l'ellipse.

Soient x' et y' les coordonnées d'un point pris sur l'ellipse; on a la relation

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

On démontre par une considération géométrique très-simple que tout autre point du plan donnera

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \gtrless 1,$$

suivant que ce point sera extérieur ou intérieur à l'ellipse. Cela posé, je dis que la droite qui aura pour équation

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$$

sera tangente à la courbe, parce que tous les points de cette droite donneront l'inégalité

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1.$$

En effet, à la quantité $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ajoutons

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

et retranchons

$$\frac{2xx'}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 2,$$

la quantité qui en résultera se présentera sous la forme

$$\frac{(x-x')^2}{a^2} + \frac{(y-y')^2}{b^2},$$

ou bien sous cette autre

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1,$$

et la première étant évidemment positive, la seconde doit l'être aussi.

L'équation de la tangente étant ainsi trouvée, l'auteur en conclut différents théorèmes plus ou moins importants : dans l'ellipse et l'hyperbole, la distance du centre au point où la tangente rencontre le diamètre transverse est troisième proportionnelle à la moitié de ce diamètre et à l'abscisse du point de contact; dans la parabole, la sous-tangente est double de l'abscisse, etc.... Mais surtout il fait voir qu'il y a une infinité de diamètres conjugués.

Pour le démontrer, considérons l'ellipse rapportée à ses diamètres primitifs et menons une tangente par un point quelconque A de la courbe; d'un autre point B, pris aussi arbitrairement sur l'ellipse, menons une parallèle à cette tangente et cherchons l'autre point C où cette parallèle rencontre encore la courbe ainsi que le point D où elle coupe le diamètre OA; nous parviendrons à reconnaître, par le calcul et la comparaison des abscisses, que $BD = DC$; donc OA divise en deux parties égales toutes les cordes parallèles à la tangente en A, ce qui prouve que cette ligne mérite en effet le nom de diamètre.

On a déjà vu, pour le système primitif, que si une droite passant par le centre divisait en deux parties égales un système de cordes parallèles, cette propriété était réciproque pour la droite menée par le centre parallèlement à ces cordes; en répétant ce raisonnement, fondé sur la symétrie de l'équation ordinaire, on verrait que OA fait un système de diamètres conjugués avec la droite menée par le centre parallèlement à la corde BC.

La démonstration est la même pour l'hyperbole. Ces théorèmes (propositions 47 et 48) dépendent de lemmes démontrés dans les n^{os} 41, 43, 44 et 45. Quant à la parabole, on montre (proposition 46) que si l'on mène par le point de contact une parallèle au diamètre primitif, cette parallèle divisera en deux parties égales les cordes parallèles à la tangente; donc dans la parabole tous les diamètres sont parallèles entre eux. Ce théorème dépend d'un lemme démontré proposition 42.

La proposition 49 fait voir que l'équation de la parabole a la même forme pour un système quelconque de diamètres conjugués. C'est ce que l'auteur a déjà prouvé relativement à l'ellipse et à l'hyperbole, au moyen des lemmes et théorèmes que nous avons indiqués.

Les propositions 50 et 51 ont un énoncé très-compliqué, mais qui se ramène, quant à ses conséquences que nous verrons dans le septième livre, au théorème que voici :

Soient OA *et* OB, OA′ *et* OB′ *deux systèmes quelconques de diamètres conjugués de l'ellipse; au point* A′ *menons une tangente qui coupe* OA *en* M *et* OB *en* N, *nous aurons*

$$\overline{OB'}^2 = A'M . A'N.$$

Même résultat pour l'hyperbole.

A la fin du premier livre, l'auteur se propose de construire les trois coniques d'après certaines données, et pour cela il revient aux considérations de l'espace, en cherchant à placer ces courbes sur un cône qui sera droit si l'on donne les axes rectangulaires. Ces dernières propositions sont donc inverses des premières, où il s'agissait de couper un cône par un plan; elles sont même identiques au fond, puisqu'il s'agit toujours d'établir une relation entre les éléments de la courbe et ceux du cône. D'ailleurs Apollonius revient là-dessus à la fin du sixième livre.

Nous n'insisterons pas sur ces solutions, mais on voit du moins que l'auteur cherche à préciser la forme des courbes en considérant les axes rectangulaires.

Le second livre commence par la théorie des asymptotes de l'hyperbole; mais ici l'auteur revient avec raison à un système de diamètres conjugués.

D'un point quelconque de l'hyperbole, Apollonius mène une tangente sur laquelle il prend de chaque côté du point de contact une longueur égale au demi-diamètre non transverse conjugué du diamètre transverse qui passe par ce point; puis il joint le centre aux points ainsi obtenus, et démontre que ces droites de jonction, nommées asymptotes, ne rencontrent jamais la courbe; il montre aussi que toute autre droite, menée dans l'intérieur de l'angle des premières, rencontre nécessairement la courbe.

Les raisonnements de l'auteur reviennent à comparer l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

de l'hyperbole avec les équations

$$\frac{y}{b} = \pm \frac{x}{a}$$

des droites ainsi définies sous le nom d'asymptotes.

Tout cela se rapporte au système de diamètres conjugués dont le transverse passe par le point de contact; mais, comme on vient de trouver les limites entre toutes les droites qui, passant par le centre, rencontrent ou ne rencontrent pas la courbe, il est clair que ces limites seront toujours les mêmes, quel que soit le système de diamètres conjugués, et c'est là ce qui démontre que toute tangente à l'hyperbole, comprise entre les asymptotes, est divisée en deux parties égales au point de contact.

Ensuite, considérant une tangente à une conique quelconque et une corde parallèle à cette tangente, Apollonius démontre que la droite qui joint le point de contact et le milieu de la corde est un diamètre de la courbe. Appliquons ce théorème à l'hyperbole, et considérons le diamètre en question qui passe par le point de contact et divise la corde en deux parties égales; nous avons vu qu'il partageait de même la portion de la tangente comprise entre les asymptotes, et nous verrons, par des triangles semblables, que la portion de la sécante, comprise entre les asymptotes, est aussi divisée dans le même rapport; donc, en prenant la différence de part et d'autre, on reconnaîtra que les parties d'une corde comprises entre les asymptotes et l'hyperbole sont égales.

D'après cela l'auteur parvient à l'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes; c'est-à-dire à démontrer que si l'on prend deux points quelconques sur une hyperbole, et que l'on considère les coordonnées de ces deux points en prenant pour axes les asymptotes, le rectangle des coordonnées de l'un de ces points sera équivalent au rectangle de l'autre; il suffit pour cela d'appliquer le théorème précédent à la droite qui joint ces deux points.

Enfin, cette relation entre les parallèles aux asymptotes, qu'il est facile d'étendre à des perpendiculaires à ces mêmes droites, conduit au théorème fondamental : les asymptotes s'approchent indéfiniment de la courbe.

La théorie des asymptotes se termine par quelques considérations sur les *sections opposées conjuguées*.

Nous avons déjà vu qu'on entendait par sections opposées les deux parties de l'hyperbole comprises dans le même angle des asymptotes; dans l'angle supplémentaire formé par ces asymptotes, imaginons une autre hyperbole dont un diamètre transverse soit un diamètre non transverse de la première, et réciproquement; les deux parties de cette autre courbe seront les sections opposées *conjuguées* de l'hyperbole donnée.

Cette considération est utile en ce qu'elle permet d'appliquer à l'extrémité du diamètre non transverse d'une hyperbole les théorèmes qui ont été démontrés pour l'extrémité du diamètre transverse, c'est-à-dire pour un point de la courbe, en observant que la parallèle menée au diamètre transverse par l'extrémité de ce diamètre non transverse est tangente à une hyperbole qui a les mêmes asymptotes que la première. On reconnaîtra ainsi que la portion de cette parallèle comprise dans l'angle supplémentaire des asymptotes est divisée en deux parties égales au point que nous avons indiqué, et l'on trouvera aussi les expressions des distances interceptées par cette parallèle sur les axes des coordonnées, c'est-à-dire sur les diamètres.

Après quelques théorèmes sur la manière dont les cordes et les tangentes se coupent en dedans ou en dehors des coniques, et même, pour l'hyperbole, en dedans ou en dehors de l'angle des asymptotes, Apollonius démontre la proposition suivante :

Dans toute conique, la droite qui joint le point de concours de deux tangentes avec le milieu de la corde de contact est un diamètre de la section.

Ce théorème est une conséquence évidente de l'expression trouvée dans le premier livre et qui donne la distance où une tangente rencontre un diamètre transverse quelconque, en fonction de ce diamètre et de l'abscisse du point de contact. Si nous prenons pour direction des abscisses, c'est-à-dire, pour le diamètre transverse en question, celui qui passe par le point de concours des deux tangentes, les deux points de contact auront nécessairement la même abscisse; donc aussi, d'après l'équation de la courbe, les carrés de leurs ordonnées seront les mêmes, ce qui démontre la proposition.

Viennent ensuite certains problèmes, dans lesquels on suppose la conique *donnée*, c'est-à-dire complétement construite.

Étant donnée une section conique, trouver un diamètre de cette section (problème indéterminé). On mène deux cordes parallèles dont on joint les milieux.

En faisant deux fois cette opération pour l'ellipse et l'hyperbole, on trouve le centre.

Quant aux axes rectangulaires, on obtiendra ceux de la parabole en menant une perpendiculaire à la direction commune des diamètres, et élevant, par le milieu de la corde ainsi obtenue, un diamètre qui sera l'axe et coupera la courbe au sommet.

Pour avoir les axes de l'ellipse, on décrira, en prenant comme centre celui de la courbe, une circonférence de rayon arbitraire, mais néanmoins coupant l'ellipse en quatre points; menant les bissectrices des angles formés par ces points pris deux à deux, on a les directions des axes, dont les grandeurs sont données par les intersections de ces bissectrices avec la courbe.

La même construction donnera les directions des axes de l'hyperbole et la grandeur de l'axe transverse. Quant à celle de l'axe non transverse, voici comment on l'obtiendra : le système primitif de diamètres conjugués a donné les asymptotes comme diagonales du parallélogramme fait sur ces diamètres; comme les sommets du rectangle construit sur les axes se trouvent aussi sur les asymptotes, on aura l'axe non transverse.

Enfin Apollonius démontre, par une réduction à l'absurde (livre II, proposition 58), qu'il n'y a dans les coniques, excepté la circonférence, qu'un seul système d'axes, c'est-à-dire de diamètres conjugués rectangulaires.

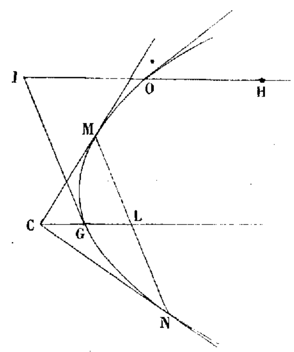
Cette dernière proposition fait voir que l'intention de l'auteur a été ici de démontrer et de préciser l'existence des axes, plutôt que de les construire exactement. En effet, les indications précédentes doivent paraître peu scientifiques, mais la solution complète de ces problèmes exige des principes qui ont été découverts par Apollonius lui-même, et que l'on ne trouvera que dans le septième livre.

Enfin le second livre se termine par divers problèmes sur les tangentes; mais nous ferons observer d'avance que les solutions d'Apollonius ne sont point fondées sur les propriétés des foyers, dont la théorie ne paraîtra que dans le troisième livre.

On propose de mener d'un point donné une tangente à une conique. Nous supposerons immédiatement le cas le plus général, celui dans lequel le point donné est extérieur.

Considérons d'abord la parabole rapportée à un système d'axes conjugués, dont l'un est le diamètre quelconque OH, et l'autre la tangente au point O (*fig.* 1). Du point donné C menons un diamètre qui coupe

Fig. 1.

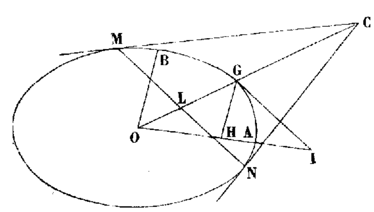


la courbe en G; du point G menons à la tangente en O la parallèle GH qui coupe OH en H, et soit pris sur le premier diamètre $OI = OH$; on sait, par la propriété de la sous-tangente, que IG sera une tangente en G. Sur le diamètre CG prenons $GL = GC$, et du point L menons à IG une parallèle qui coupe la courbe en M et en N; les droites CM et CN seront les tangentes demandées.

On voit qu'il faut déterminer d'abord la tangente parallèle à la corde de contact.

On trouvera par la même méthode (*fig.* 2) les tangentes menées

Fig. 2.



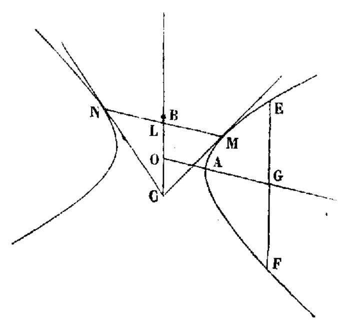
d'un point extérieur C à l'ellipse dont le centre est O, et qui est rapportée aux diamètres conjugués OH et OB. Joignez OC qui coupe la courbe en G; soit H le point où la parallèle GH à OB coupe OA, et prenez la troisième proportionnelle $OI = \frac{\overline{OA}^2}{OH}$, la droite GI sera tangente en G.

Maintenant supposons le problème résolu, et soit MN la corde de contact qui coupe OG en L; comme on peut supposer l'ellipse rapportée au diamètre OG et à son conjugué, nous aurons $OL \cdot OC = \overline{OG}^2$, ce qui donne OL et le point L, par lequel on mène à GI une parallèle qui sera la corde de contact et qui coupera l'ellipse aux points demandés M et N.

La construction sera la même pour l'hyperbole, si les deux points de contact sont sur la même section, c'est-à-dire si le point donné C est compris dans l'angle des asymptotes; cela tient à ce que OC coupera la section en G. Il sera même plus facile que pour l'ellipse de mener en ce point G la tangente qui doit être parallèle à la corde de contact, car il suffira, à l'aide d'un problème connu, de faire passer par ce point G une droite qui s'y trouve divisée en deux parties égales entre les asymptotes.

Mais si le point donné C est dans l'angle supplémentaire des asymptotes (*fig.* 3), les deux points de contact étant chacun sur une des sec-

Fig. 3.



tions opposées, il n'y aura pas de tangente parallèle à la corde de contact, parce que le diamètre OC ne sera pas transverse, ce qui ne l'empêchera point de passer par le milieu L de cette corde MN et de donner la relation

$$\overline{OB}^2 = OL.OC,$$

en appelant OB la longueur du demi-diamètre non transverse dans la direction de OC. Voici d'abord comment on trouvera cette valeur OB : menez une corde quelconque EF parallèle à OC, soit G le milieu de cette corde, et joignez OG qui coupe la courbe en A; connaissant OA et les asymptotes, on aura OB en construisant un parallélogramme. Dès lors la relation

$$OL = \frac{\overline{OB}^2}{OC}$$

détermine le point L, et si l'on mène de ce point une parallèle à OA, on trouve les points M et N.

Nous n'insisterons pas sur les problèmes suivants : *Mener une tangente qui fasse avec les axes rectangulaires des angles donnés, et mener une tangente qui fasse un angle donné avec le diamètre qui passe par le point de contact*, ce qui revient à dire : *Construire deux diamètres conjugués faisant entre eux un angle donné*. Les solutions de ces problèmes, comme celles des précédents, sont insuffisantes en théorie comme en pratique, parce qu'elles supposent les courbes complétement construites. Apollonius les rapporte sans doute parce qu'elles étaient connues avant lui, mais il n'en était peut-être pas très-satisfait lui-même.

Le troisième livre commence par le lemme suivant, que nous allons développer pour donner encore un exemple de calculs géométriques :

Soient M et N deux points d'une section conique, dont le centre est en O (le théorème serait vrai aussi pour une parabole). La tangente en M coupe ON en P, et la tangente en N coupe OM en Q; enfin, soit R le point de rencontre de ces tangentes : je dis que les triangles MRQ, NRP sont équivalents (*fig.* 4).

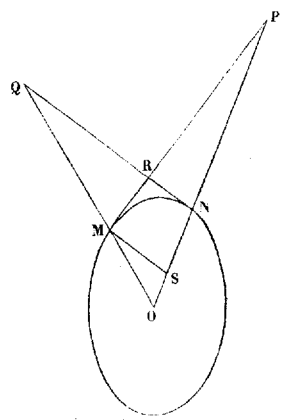
En effet, soit MS parallèle à QN; le théorème de la troisième proportionnelle donne

$$\overline{ON}^2 = OP.OS,$$

ou bien

$$\frac{\overline{ON}^2}{\overline{OS}^2} = \frac{OP}{OS}.$$

Fig. 4.



Mais les triangles semblables donnent

$$\frac{\overline{ON}^2}{\overline{OS}^2} = \frac{OQN}{OMS},$$

et l'on a d'un autre côté

$$\frac{OP}{OS} = \frac{OMP}{OMS}.$$

Donc

$$OQN = OMP,$$

et, retranchant la partie commune OMRN, il reste

$$MRQ = NRP.$$

Nous ne suivrons pas l'auteur dans le développement des vingt-huit propositions suivantes, qui le conduisent d'une manière ingénieuse, mais pénible, au théorème que voici, en s'élevant de cas particuliers à des cas plus généraux.

D'un point O, pris n'importe où sur le plan d'une conique, menons, sous des directions arbitraires, deux sécantes, dont la première coupe la courbe aux points A et B, la seconde aux points C et D. D'un autre point O', également quelconque, menons aussi deux sécantes, respectivement parallèles aux premières et qui coupent la courbe aux points A' et B', C' et D'; on aura

$$\frac{OA.OB}{OC.OD} = \frac{O'A'.O'B'}{O'C'.O'D'}.$$

L'énoncé de l'auteur n'est pas tout à fait aussi général; il suppose que les droites OAB, OCD sont respectivement parallèles à un système de diamètres conjugués. Malgré cette restriction, on voit que le *théorème des segments*, qui résume ainsi le commencement du troisième livre, pourrait être attribué à Apollonius aussi bien qu'à Newton, dont il porte le nom; il est vrai que Newton l'a énoncé d'une manière plus générale, et qu'il l'a même étendu aux courbes d'un degré supérieur.

Du reste, la restriction que nous avons signalée dans Apollonius est plutôt apparente que réelle, car elle ne s'étend point à la plupart des lemmes qu'il démontre.

Voici maintenant le résumé des dix propositions suivantes :

Toute sécante à une conique, passant par le point de concours de deux tangentes, est divisée harmoniquement par la corde de contact.

Ainsi, soit C le point de concours des tangentes, menons par ce point une droite qui coupe en D la corde de contact et qui rencontre la courbe aux deux points A et B; le point A étant situé entre C et D, nous aurons

$$CA.BD = CB.AD,$$

c'est-à-dire que le produit des deux parties extrêmes est équivalent au produit de la ligne totale par la ligne du milieu. Seulement l'auteur énonce ce théorème sous forme de proportion, et il écrit

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}.$$

Le mot *harmonique*, qui est bien connu pour indiquer cette division d'une droite, n'est pas employé par Apollonius.

La proposition 41, qui ne paraît pas se rattacher à ce qui précède ni à ce qui suit, est énoncée ainsi par Apollonius :

Trois tangentes à la parabole se coupent dans la même proportion.

Mais cet énoncé est très-vague, et voici comment l'auteur le précise.

Soient A, B, C trois points d'une parabole, E le point de concours des tangentes extrêmes en A et en C, soit D le point où la tangente au point B, compris entre les deux autres, coupe AE, et F le point où elle coupe CE; on a la relation

$$\frac{CF}{FE} = \frac{ED}{DA} = \frac{FB}{BD}.$$

Pour se rappeler ce théorème, on peut former les deux premiers rapports en prenant à la suite les uns des autres tous les segments des tangentes extrêmes, depuis le point C jusqu'au point A; quant au troisième rapport, on revient au point F, voisin du point C de départ.

Voici les énoncés de quelques propositions qui viennent à la suite.

Si l'on mène par les extrémités d'un diamètre de l'ellipse des tangentes parallèles à son conjugué jusqu'à la rencontre d'une tangente quelconque, le produit des segments interceptés sur ces parallèles est égal au carré du demi-diamètre conjugué.

Même démonstration pour un diamètre transverse de l'hyperbole; le produit indiqué sera égal au carré du demi-diamètre conjugué non transverse.

Une tangente à l'hyperbole détermine sur les asymptotes, à partir du centre, deux segments dont le produit est constant. (C'est une conséquence immédiate de l'équation asymptotique de la courbe et de la division de la tangente en deux parties égales au point de contact.)

Si l'on réunit deux à deux les points où deux tangentes à l'hyperbole rencontrent les asymptotes, ces lignes de jonction sont parallèles à la corde de contact.

Enfin commence à la 45^e proposition la théorie des foyers que l'auteur appelle σημεῖα ἐκ τῆς παραβολῆς, ce qui peut se traduire par *points de comparaison;* mais le mot grec n'est pas heureux, car il fait songer à la parabole dont il n'est ici nullement question. Au contraire, puisque l'auteur ne considère les foyers qu'en les comparant l'un à l'autre, il ne s'agit point du foyer de la parabole, qui est unique;

en effet Apollonius n'en parle jamais et ne semble pas l'avoir connu.

La 45^e^ proposition peut s'énoncer de la manière suivante :

Par les extrémités du grand axe d'une ellipse ou de l'axe transverse d'une hyperbole, élevez à cet axe deux perpendiculaires qui interceptent sur une tangente quelconque une certaine longueur. Sur cette longueur interceptée, prise comme diamètre, décrivez une demi-circonférence, qui coupe l'axe en deux points, ce seront les *points de comparaison* ou foyers.

Cependant les foyers sont d'abord définis de la manière suivante : prenez sur le grand axe de l'ellipse ou sur l'axe transverse de l'hyperbole un point tel que le produit de ses distances aux extrémités de cet axe soit *le quart de la figure* (c'est-à-dire b^2, car la figure est le produit du côté droit par l'axe, ce qui fait $\frac{2b^2}{a}\cdot 2a = 4b^2$). Ce point et son symétrique seront les foyers.

On démontre que, si l'on joint à l'un des foyers les extrémités de la distance interceptée sur la tangente quelconque, on formera ainsi un angle droit dont ce foyer sera le sommet.

La ligne qui joint l'un des foyers à l'une des extrémités dont nous venons de parler et celle qui joint l'autre foyer à l'autre extrémité portent collectivement, chez Apollonius, le nom de *lignes conjointes :* on voit donc qu'il y en a deux couples pour chaque tangente.

Cela posé, la proposition 46, dont l'énoncé est assez obscur, consiste en ce que, si l'on considère un couple de lignes conjointes, l'angle que fait l'une de ces droites avec la tangente en question est égal à l'angle que fait l'autre droite avec l'axe focal. Cela se voit parce que ces angles sont inscrits dans un même segment de la demi-circonférence dont nous avons parlé.

Viennent ensuite les théorèmes suivants :

Le point de concours de chaque système de lignes conjointes est sur la normale, c'est-à-dire sur la perpendiculaire élevée à la tangente que nous considérions par son point de contact.

Les rayons vecteurs de ce point de contact font des angles égaux avec la normale pour l'ellipse et avec la tangente pour l'hyperbole. (C'est aujourd'hui le théorème fondamental de la théorie des tangentes.)

De l'un des foyers abaissez une perpendiculaire sur une tangente, joignez le pied de la perpendiculaire aux sommets de l'axe focal, ces lignes de jonction font un angle droit dont le sommet est le pied de la perpendiculaire.

Menez par le centre une parallèle à l'un des rayons vecteurs jusqu'à la tangente, cette distance sera égale à la moitié de l'axe focal.

Ces deux dernières propositions reviennent à dire que le lieu géométrique des perpendiculaires abaissées des foyers sur les tangentes est un cercle qui a pour diamètre l'axe focal.

L'axe focal est égal à la différence des rayons vecteurs dans l'hyperbole et à leur somme dans l'ellipse.

Ici se termine, à la proposition 52, la théorie des foyers par cette propriété fondamentale qui leur sert aujourd'hui de définition. On voit que la principale imperfection de cette théorie consiste en ce qu'il n'est point question des directrices.

Voici enfin les propositions qui terminent le troisième livre :

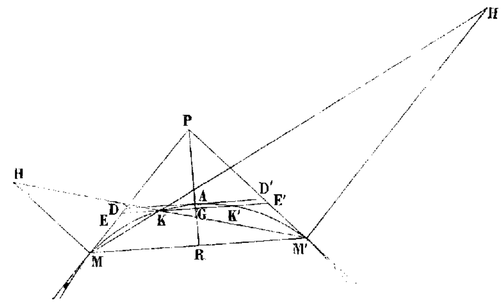
Des extrémités d'un diamètre quelconque de l'ellipse ou d'un diamètre transverse de l'hyperbole, élevez des tangentes à la courbe et joignez ces mêmes extrémités à un point quelconque de la courbe ; les lignes de jonction prolongées détermineront sur les tangentes opposées, à partir de chaque extrémité du diamètre, des segments dont le produit sera égal au carré du diamètre conjugué avec celui que l'on considère.

La proposition 42 de ce livre montre que ce rectangle est quadruple de celui des droites qu'intercepte, sur les mêmes tangentes, la tangente au point quelconque que l'on considère.

Les trois dernières propositions du troisième livre se résument dans un théorème dont nous allons encore citer l'énoncé et même la démonstration, pour montrer jusqu'où peut aller la complication des calculs géométriques de l'auteur.

Soient M et M′ deux points quelconques d'une portion continue de section conique (*fig.* 5), et menons les tangentes MP, M′P qui se coupent en P ; joignons le point P au milieu R de la corde MM′, et soit A le point où PR rencontre la courbe, A étant entre P et R. Des mêmes points M et M′ menons MH parallèle à M′P et M′H′ parallèle à MP ; enfin, soit K un point pris sur la même branche de la conique, et joignons MK qui coupe M'H' en H', ainsi que M'K qui coupe MH en H,

Fig. 5.



nous aurons la relation

$$\frac{MH.M'H'}{\overline{MM'}^2} = \frac{\overline{AR}^2}{\overline{AP}^2} \cdot \frac{MP.PM'}{RM.RM'},$$

seulement il faut observer que $RM = RM'$, ce qui réduit la formule à celle-ci :

$$MH.M'H' = \frac{\overline{AR}^2}{\overline{AP}^2} . 4 . PM . PM',$$

formule indépendante de la position du point K.

A ce sujet, nous ferons remarquer une notation qui pourrait embarrasser dans la lecture des anciens géomètres; quand on parle du rectangle MPM', il faut imaginer que la lettre du milieu est redoublée, ce qui fait le rectangle MP.PM', même quand les trois points ne sont pas sur la même droite.

Voici maintenant comment Apollonius démontre le théorème précédent :

Des points A et K menons des parallèles à MM'; on sait que la parallèle en A est tangente à la courbe et coupe les tangentes données en deux points D et D', tels que $AD = AD'$.

La parallèle menée par le point K coupera aussi ces deux tangentes aux points E, E', et rencontrera encore la courbe en un autre point K'; on sait que PR passe par le milieu de KK' et de EE', ce qui fait que $EK' = KE'$.

Cela posé, le théorème des segments, démontré au commencement de ce livre, nous donne

$$\frac{\overline{DA}^2}{\overline{DM}^2} = \frac{EK.EK'}{\overline{EM}^2},$$

puisque chaque point de contact est un point double, et que les sécantes et tangentes parallèles peuvent partir des points D et E; mais, d'après ce que l'on vient de voir, on peut écrire

$$\frac{\overline{DA}^2}{\overline{DM}^2} = \frac{KE.KE'}{\overline{EM}^2}.$$

Ensuite les lignes proportionnelles donnent

$$\frac{E'M'}{EM} = \frac{D'M'}{DM},$$

ou bien

$$\frac{E'M'.EM}{\overline{EM}^2} = \frac{D'M'.DM}{\overline{DM}^2},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\overline{DA}^2}{DM.D'M'} = \frac{KE.KE'}{EM'.EM'}.$$

Mais aussi

$$\frac{KE}{EM} = \frac{MM'}{M'H'} \quad \text{et} \quad \frac{KE'}{E'M'} = \frac{MM'}{MH},$$

ce qui donne

$$\frac{DM.D'M'}{\overline{DA}^2} = \frac{MH.M'H}{\overline{MM'}^2}.$$

Observons maintenant que

$$\overline{DA}^2 = DA.D'A,$$

et introduisons en haut et en bas le facteur PD.PD', nous aurons

$$\frac{MH.M'H'}{\overline{MM'}^2} = \frac{DM.D'M'}{PD.PD'}\cdot\frac{PD.PD'}{DA.D'A};$$

puis nous remarquerons que

$$\frac{\mathrm{DM}}{\mathrm{DP}} = \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AP}} = \frac{\mathrm{D'M'}}{\mathrm{D'P}},$$

et le premier facteur du second membre devient $\frac{\overline{\mathrm{AR}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}$.

Ensuite

$$\frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{DA}} = \frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{MR}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{PD'}}{\mathrm{D'A}} = \frac{\mathrm{PM'}}{\mathrm{M'R}},$$

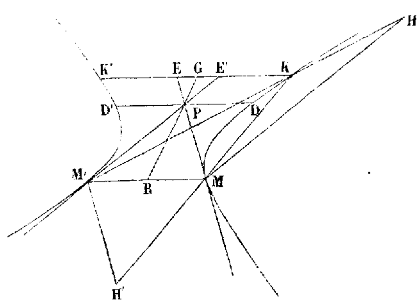
de sorte que le second facteur devient $\frac{\mathrm{PM}.\mathrm{PM'}}{\mathrm{MR}.\mathrm{M'R}}$, ce qui démontre la proposition. Le résultat final peut encore se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{MP}} \cdot \frac{\mathrm{M'H'}}{\mathrm{M'P}} = 4 \cdot \frac{\overline{\mathrm{AR}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}.$$

Nous avons supposé que le point K était sur la même branche que les points M et M'; c'est ce qui a lieu nécessairement pour une ellipse et une parabole; il peut aussi en être de même pour une hyperbole, mais cette dernière courbe présente deux autres circonstances remarquables. On peut supposer que, les points M et M' étant encore sur la même section, le point K soit sur la section opposée; dans ce cas, il faut prendre le point A, où PR rencontre la courbe, non sur la section des points M et M', mais sur celle du point K. Ainsi ce point A ne sera pas, comme précédemment, situé entre P et R, mais au contraire le point P se trouvera entre A et R; du reste, l'énoncé et la démonstration seront les mêmes.

Mais si les deux premiers points M et M' ne sont plus sur la même

Fig. 6.



section, le théorème subit une modification importante, parce que, le diamètre PR n'étant plus transverse, le point A devient imaginaire (*fig.* 6).

Dans cette circonstance nous conserverons, autant que possible, les notations précédentes; seulement les lettres D et D′ indiqueront les points où la parallèle, menée par le point P à MM′, rencontre chacune des sections. D'après cela, le théorème des segments donne

$$\frac{\overline{PD}^2}{\overline{PM}^2} = \frac{EK.EK'}{\overline{EM}^2},$$

puisque $PD = PD'$; ou bien

$$\frac{\overline{PD}^2}{\overline{PM}^2} = \frac{EK.E'K}{\overline{EM}^2},$$

car $E'K = EK'$, puisque le diamètre PR passe par le milieu de EE′ et de KK′. De plus, les lignes proportionnelles donnent

$$\frac{PM'}{PM} = \frac{E'M'}{EM},$$

ou identiquement

$$\frac{PM.PM'}{\overline{PM}^2} = \frac{EM.E'M'}{\overline{EM}^2}:$$

d'où l'on tire

$$\frac{\overline{PD}^2}{PM.PM'} = \frac{EK}{EM}\cdot\frac{E'K}{E'M'}.$$

Mais les triangles semblables donnent

$$\frac{EK}{EM} = \frac{MM'}{M'H'} \quad \text{et} \quad \frac{E'K}{E'M'} = \frac{MM'}{MH},$$

d'où enfin

$$\frac{\overline{PD}^2}{PM.PM'} = \frac{\overline{MM'}^2}{MH.M'H'};$$

résultat encore indépendant de la position du point K sur l'une ou l'autre section.

Le lecteur pourrait conserver quelques doutes sur les démonstrations de ces théorèmes dans Apollonius, parce qu'elles sont fondées sur la propriété des segments, qui devraient être, d'après la restriction signalée chez notre auteur, au commencement du troisième livre, parallèles à un système de diamètres conjugués, ce qui n'a point lieu ici. Mais nous ferons observer que le théorème 16, relatif à une sécante et à deux tangentes et sur lequel sont basées les propositions que nous venons d'établir, est démontré, ainsi que le remarque le commentateur Eutocius, d'une manière indépendante de la restriction indiquée.

Si nous nous sommes étendus sur ces derniers théorèmes, c'est que nous les croyons peu connus, et surtout parce que les démonstrations en sont peut-être moins compliquées avec les méthodes anciennes qu'avec les calculs modernes. Par une raison contraire, nous abrégerons l'analyse des trois livres suivants.

Sauf quelques théorèmes, tels que ceux des segments et de la division harmonique, dont les démonstrations et même les énoncés sont peut-être dus à Apollonius, il n'a été question jusqu'ici que de la partie élémentaire de la science, et beaucoup des propositions que nous avons citées sur les diamètres, les tangentes, les asymptotes, les foyers, étaient sans doute connues avant notre auteur. Cette variété de matière fait qu'il est difficile de préciser le sujet de chacun des trois premiers livres; mais ceux que nous examinerons dorénavant peuvent recevoir chacun un titre particulier : d'ailleurs la part d'invention que l'on peut attribuer à Apollonius y devient plus considérable.

Le quatrième livre roule sur les intersections et les contacts des sections coniques entre elles. Ici Apollonius ne se vante pas d'avoir découvert la plupart des théorèmes, mais seulement de les avoir beaucoup mieux démontrés que tous ses devanciers. En effet, on comprend que, dans une recherche de cette nature, une étude intelligente des figures avait dû faire, depuis longtemps, deviner une foule d'énoncés, mais on concevra aussi toute la difficulté que l'on éprouvait alors à les démontrer rigoureusement. D'abord les anciens ne connaissaient les équations des sections coniques que dans le cas où les coordonnées étaient parallèles à un système de diamètres conjugués; encore fallait-il que l'origine fût le centre ou l'extrémité d'un diamètre : or, quand on compare deux coniques, il faut que les coordonnées aient une position quelconque relativement à l'une d'elles. Mais ce qui manquait surtout aux anciens pour cette étude, c'était l'élimination et la théorie des équations. Les methodes d'Apollonius, fort ingénieuses, mais assez pénibles, ne présentent donc maintenant que peu d'intérêt, même au point de vue historique; nous nous contenterons de dire que toutes les démonstrations sont faites par la réduction à l'absurde, et fondées sur le principe de la division harmonique. Aussi les vingt-trois premières propositions ne sont que des corollaires du théorème relatif à la division harmonique des sécantes; nous distinguerons le lemme suivant (prop. 6 et 7) :

Soient OM, ON les asymptotes d'une hyperbole, et D le point où concourront les tangentes aux points A et B de la courbe; joignons AB et menons du point D à l'une des asymptotes une parallèle qui coupe AB en E : je dis que le milieu C de DE est sur l'hyperbole.

Parmi les théorèmes qui terminent ce livre, voici les plus remarquables :

Deux coniques ne peuvent se couper en plus de quatre points.

Si elles ont un contact, elles ne peuvent plus se couper qu'en deux points.

Si elles ont deux contacts, elles ne peuvent plus se rencontrer.

Deux paraboles ne peuvent avoir qu'un seul contact.

Au point de contact d'une hyperbole et d'une parabole si la parabole est extérieure, il ne peut y avoir un second contact.

Au point de contact d'une ellipse et d'une parabole si la parabole est intérieure, il ne peut y avoir un second contact.

Nous terminerons en rappelant que l'intersection des coniques avait pour les anciens une grande importance, parce que cette considération leur permettait de résoudre certains problèmes, tels que celui des deux moyennes proportionnelles et celui de la duplication du cube, conséquence du premier. On conçoit, en effet, que les questions qui conduisent à des expressions du troisième et du quatrième degré, ne pouvant se résoudre par la ligne droite et le cercle, exigeaient l'emploi des sections coniques; c'était, en quelque sorte, la Géométrie appliquée à l'Algèbre.

Nous avons dit que les quatre premiers livres d'Apollonius étaient les seuls dont on possédât le texte grec, et qu'il y avait seulement deux siècles que Borelli avait découvert une traduction arabe des sept premiers livres. On sait, en effet, qu'il ne faut pas juger les Arabes par l'incendie vrai ou faux de la Bibliothèque d'Alexandrie, et qu'après les premiers excès de leur enthousiasme religieux et guerrier, on vit se développer chez eux le goût de la philosophie et des sciences. Ils s'attachèrent surtout à traduire et à commenter les ouvrages de l'antiquité grecque, à laquelle les rattachait un certain instinct de subtilité : aussi est-ce par eux que l'Occident connut pour la première fois la plupart des écrits d'Aristote. Mais les traductions arabes d'Apollonius ont pour nous d'autant plus d'importance, que l'on n'a jamais retrouvé le texte original des quatre derniers livres, et qu'il reste peu d'espoir d'une pareille découverte

Borelli ayant reconnu au commencement du manuscrit dont nous avons parlé les figures des quatre premiers livres d'Apollonius, voulut faire traduire la suite ; il se procura un interprète qui n'entendait pas mieux les mathématiques que lui-même ne savait l'arabe, mais tous deux réussirent à faire en peu de temps une traduction moins imparfaite qu'on n'aurait pu le croire d'après des conditions aussi défavorables, et même, selon les explications qu'ils donnent, les défauts qu'on peut y trouver tiennent surtout à l'ancien commentateur musulman.

Ce qui semble le prouver, c'est qu'on a retrouvé plus tard un autre manuscrit arabe, préférable sous bien des rapports, et qui a servi à faire l'édition d'Oxford (1710), due à Halley, si célèbre par la comète qui porte son nom. Cette belle édition, que nous avons sous les yeux, contient, pour les quatre premiers livres, le texte grec d'Apollonius, rétabli avec sagacité dans plusieurs passages, et en regard, une traduction latine, le tout accompagné des commentaires d'Eutocius. On trouve le latin seul pour les trois livres suivants, traduits de l'arabe, et même pour le huitième, ingénieusement restitué par Halley, qui a publié en outre les lemmes de Pappus, relatifs aux différents livres d'Apollonius. Enfin, le volume se termine par deux opuscules de Serenus sur la section du cylindre et sur les sections rectilignes que l'on obtient en coupant un cône par un plan qui passe par son sommet.

Le cinquième livre d'Apollonius traite des lignes les plus longues et les plus courtes menées de certains points aux sections coniques, c'est-à-dire des normales à ces courbes. On voit donc que le sujet de ce livre touche à la théorie des rayons de courbure et des développées, et qu'ici la géométrie doit lutter, non-seulement avec l'algèbre ordinaire, mais encore avec l'analyse infinitésimale : cependant l'auteur n'invoque aucun théorème en dehors des éléments, comme celui des harmoniques du troisième livre, qui servait de base aux démonstrations du quatrième.

Quant aux méthodes employées dans le cinquième livre, voici un exemple qui peut en donner l'idée, quoiqu'il soit trop simple pour figurer dans Apollonius. Sur le plan d'un cercle prenons un point quelconque, et cherchons la plus petite et la plus grande ligne que l'on puisse mener de ce point à la circonférence; on voit sans peine que ces lignes seront normales à la courbe. Mais, si la question précédente est d'une facilité puérile, il n'en est pas de même pour les démonstrations relatives aux sections coniques, dont quelques-unes sont, au contraire, d'une extrême complication.

Dans les quinze premières propositions, il s'agit des lignes maxima ou minima menées à la conique par un point de l'axe focal; l'auteur considère en particulier le centre de courbure de rayon minimum, et fait remarquer que la distance de ce point au sommet correspondant est la moitié du côté droit.

Remarquons encore la huitième proposition, dans laquelle on démontre que la sous-normale de la parabole est constante et égale à la moitié du côté droit.

Viennent ensuite divers théorèmes relatifs à l'ellipse, et où l'on considère les droites maxima et minima menées à la courbe par un point du petit axe; on obtient ainsi le rayon de courbure maximum. Cependant l'auteur commence à considérer des points situés en dehors des axes, dans la proposition 21, dont voici l'énoncé :

D'un point quelconque N du petit axe, menons à la courbe la ligne maximum NM; sur le prolongement de cette ligne, au delà du petit axe, prenons un point quelconque P, la distance maximum de ce point à la courbe sera PM. Pour démontrer cette proposition, il suffit d'observer que, dans les triangles, aux plus grands angles sont opposés les plus grands côtés.

Les propositions suivantes, de 27 à 34, servent à établir que, dans les trois coniques, les lignes maxima et minima sont normales à la courbe, ce qui permet de les trouver facilement pour un point de la courbe par la construction de la tangente.

Après quelques lemmes sur les différentes portions du plan de la courbe où se coupent les droites maxima et minima, l'auteur aborde le problème suivant :

D'un point donné sur le plan de la conique, mener une normale à cette courbe.

On comprend que les démonstrations de l'auteur deviennent ici excessivement pénibles. Quant aux constructions, elles se font en coupant la conique par une hyperbole convenablement choisie. Apollonius fait observer que le problème est toujours possible si le point donné est intérieur à la courbe, mais qu'il ne l'est pas toujours si ce point est extérieur.

La proposition 68 et les trois suivantes reviennent au théorème dont voici l'énoncé :

De deux tangentes à une conique, partant d'un même point extérieur, la plus petite, depuis ce point jusqu'au point correspondant de contact, est celle qui se rapproche le plus d'un sommet de l'axe focal.

Enfin, le cinquième livre se termine par quelques considérations sur la manière dont croissent ou décroissent les lignes menées à la section par un point où concourent des normales, à mesure que ces lignes s'approchent ou s'éloignent de l'axe focal.

Ce livre est donc un des plus beaux titres de gloire d'Apollonius, surtout si l'on considère les difficultés que présentait alors le problème de la normale menée à une conique par un point quelconque. Quant à la théorie des développées, il semble l'avoir entrevue; mais on ne pourrait, sans exagération évidente, soutenir qu'elle se trouve tout entière dans l'ouvrage que nous analysons.

Nous n'avons pas à nous arrêter longtemps sur le sixième livre, qui traite de l'égalité et de la similitude des coniques, et qui ne diffère pas essentiellement de la manière dont on présente encore aujourd'hui ces questions; d'ailleurs Apollonius dit qu'il n'a fait qu'étendre et éclaircir les travaux de ses prédécesseurs.

Il n'est question, dans ce livre, que des sections obtenues dans le cône droit de la Géométrie élémentaire : d'après cela, l'auteur définit *cônes semblables*, ceux dont les hauteurs sont proportionnelles aux rayons des bases; puisqu'ils sont droits, il est clair que l'angle du sommet est le même.

Voici maintenant la définition qu'il donne des coniques semblables : Si nous comparons deux ellipses, par exemple, divisons leurs grands axes dans un même nombre, d'ailleurs quelconque, de parties égales, et par ces points de division élevons des perpendiculaires à cet axe; les deux courbes seront semblables si deux abscisses correspondant à un même nombre de divisions de l'axe donnent des ordonnées proportionnelles à ces abscisses. La même définition s'applique aux hyperboles semblables; seulement ici il faudra porter les divisions de l'axe focal au delà de chaque sommet, afin d'avoir des points de la courbe.

Dans la comparaison de deux paraboles, les divisions de l'axe focal de chacune d'elles, prises à partir du sommet, sont proportionnelles aux longueurs de leurs côtés droits. D'après cela (prop. 11), toutes les paraboles sont semblables.

L'auteur considère ensuite diverses conditions d'égalité et de similitude entre des coniques ou des segments de coniques. Voici la définition de la similitude des segments :

Deux segments sont semblables quand leurs bases font des angles égaux avec les diamètres qui passent par les milieux de ces bases, et quand, de plus, si l'on divise en un même nombre de parties égales la portion de diamètre comprise dans chacun d'eux entre le milieu de la base et le point où ce diamètre se termine sur le segment, le rapport de chaque ordonnée (c'est-à-dire de chaque parallèle menée à la base), avec l'abscisse correspondante, est égal au rapport analogue dans l'autre segment, pour le même nombre de divisions.

Les théorèmes 26 et 27 établissent que deux sections parallèles sur un même cône sont semblables.

Viennent ensuite divers problèmes pour placer une conique donnée sur un cône droit donné; mais l'auteur fait observer que la solution ne sera possible pour l'hyperbole que si le rapport du carré de l'axe du cône au carré du rayon de sa base ne dépasse pas le rapport de l'axe transverse de l'hyperbole avec son côté droit. Ces solutions complètent les questions analogues que nous avons vues à la fin du premier livre, et chaque énoncé est double, suivant que c'est la surface ou la courbe qui est donnée de *position;* par exemple :

Sur un cône droit donné trouver une section égale à une ellipse donnée. (Prop. 30.)

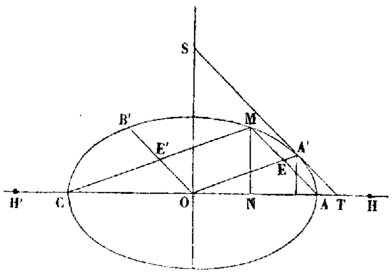
Trouver un cône droit semblable à un cône donné, et sur lequel soit tracée une ellipse donnée. (Prop. 33 et dernière.)

Mais, en réalité, ces deux problèmes n'en font qu'un, car il s'agit toujours, connaissant les éléments de la conique et l'angle du cône dans la section principale, de trouver dans cette section la portion d'apothème interceptée par le diamètre transverse jusqu'au sommet du cône et l'angle de ce diamètre avec cette apothème.

Le septième livre complète la théorie des diamètres conjugués, et contient surtout les fameuses propositions sur les carrés et les produits de ces diamètres, théorèmes dont la découverte est due à Apollonius. Les démonstrations qu'il en donne méritent d'autant plus d'attention, qu'elles ressemblent moins à toutes celles que l'on trouve dans les ouvrages modernes; mais la première, qui est relative à la somme ou à la différence des carrés des diamètres, est très-compliquée. Nous allons montrer d'abord dans quel esprit elle est conçue, et nous chercherons ensuite à la préciser davantage; mais nous devons prévenir que l'auteur s'attache toujours à appliquer les mêmes raisonnements à l'ellipse et à l'hyperbole, malgré les difficultés que présentent pour cette dernière courbe les diamètres non transverses. Ces difficultés disparaissent si l'on considère, comme dans le deuxième livre, les sections opposées *conjuguées* qui ont pour diamètres transverses les diamètres non transverses de l'hyperbole que l'on considère.

Cela posé, les démonstrations relatives à la somme ou à la différence des carrés des diamètres sont fondées sur ce que ces diamètres conjugués sont parallèles aux droites que nous appelons aujourd'hui *cordes supplémentaires,* c'est-à-dire aux lignes que l'on obtient en joignant un point quelconque de la courbe aux extrémités de l'axe focal ou même d'un diamètre transverse quelconque. Soient M ce point (*fig.* 7) et CA ce diamètre ; du centre O de la courbe menons à CM une parallèle qui coupe MA en E : il est clair que ce point E est le milieu de MA, puisque les triangles CMA, OEA sont semblables, et que OA est la moitié de CA. Par la même raison, soit E′ le point où la parallèle menée du

Fig. 7.



centre à MA coupe CM, on voit que E′ sera le milieu de CM; donc les diamètres OE, OE′ sont conjugués, puisque chacun d'eux divise en parties égales les cordes parallèles à l'autre, et ils sont respectivement parallèles, comme nous l'avions indiqué, à deux cordes supplémentaires.

Rien ne serait plus simple, au moyen de l'analyse moderne, que d'appliquer ce principe au théorème en question, mais nous allons voir que notre auteur n'y parvient que d'une manière assez pénible. Il semble même que le traducteur arabe, sur le manuscrit duquel a travaillé Borelli, n'ait pas toujours bien compris le livre que nous étudions; l'autre traducteur dont nous avons parlé montre plus d'intelligence et surtout plus de clarté. Du reste, on remarque entre eux des différences assez graves dans les définitions elles-mêmes, ce qui fait voir que les Arabes prenaient de grandes libertés avec les textes qu'ils traduisaient; d'ailleurs nous suivrons uniquement l'édition de Halley.

Voici la nouvelle définition que l'on est conduit à introduire : Soit d la valeur du côté droit, en sorte que $d = \frac{2b^2}{a}$, et cherchons sur l'axe focal $CA = 2a$, du côté du point A, un autre point H tel, que l'on ait

$$\frac{CH}{AH} = \frac{CA}{d};$$

la ligne AH s'appelle *homologue*, et l'on trouve facilement

$$AH = \frac{2ab^2}{c^2},$$

la quantité c étant toujours la distance du centre à l'un des foyers; on trouvera aussi

$$CH = \frac{2a^3}{c^2}.$$

Dans l'ellipse, la ligne *homologue* AH est portée au delà du demi-axe OA; dans l'hyperbole, au contraire, le point H est entre O et A.

La symétrie des deux courbes montre qu'il existe de l'autre côté de l'axe un point H' analogue au point H; ainsi

$$CH' = AH \quad \text{et} \quad CH = AH'.$$

Le premier usage que fait Apollonius de ces lignes *homologues* consiste à présenter sous une nouvelle forme les équations des courbes, en établissant une relation entre l'abscisse d'un point quelconque et l'une des cordes supplémentaires qui aboutissent à l'axe. Soit donc M un point quelconque de l'ellipse, par exemple, et soit N le pied de l'ordonnée MN, on trouve (prop. 3)

$$\frac{CA}{CH} = \frac{\overline{AM}^2}{NA.NH},$$

ce qui revient à

$$\frac{\overline{AM}^2}{NA.NH} = \frac{c^2}{a^2};$$

on aura de même

$$\frac{\overline{CM}^2}{NC.NH'} = \frac{c^2}{a^2}.$$

Même théorème pour l'hyperbole.

Cette forme d'équation permettra d'exprimer les carrés des diamètres conjugués en fonction des longueurs NH et NH'.

Pour y parvenir, soit OA' le demi-diamètre parallèle à CM, soient K le pied de l'ordonnée A'K du point A', et T le point où la tangente en A' rencontre l'axe; je dis que l'on aura

$$\frac{\overline{A'T}^2}{\overline{OB'}^2} = \frac{KT}{OK},$$

en indiquant par $\overline{OB'}^2$ le carré du demi-diamètre conjugué avec OA'.

En effet, on a vu (livre I, prop. 50 et 51) que si l'on appelle S le point où la tangente A′T rencontre l'axe OB perpendiculaire à OA, on obtient

$$\overline{OB'}^2 = A'S.A'T.$$

Mais il serait facile de voir, en menant par le point A′ une ligne égale et parallèle à OK, que l'on trouverait par des triangles semblables

$$\frac{A'S}{A'T} = \frac{OK}{KT}.$$

Transportant donc dans la valeur de $\overline{OB'}^2$ l'expression

$$A'S = A'T \cdot \frac{OK}{KT},$$

il reste

$$\overline{OB'}^2 = \overline{A'T}^2 \cdot \frac{OK}{KT},$$

ce qui revient à la relation indiquée.

Ensuite, les triangles semblables OA′T, CMA détermineront aussi des triangles rectangles semblables; par conséquent

$$\frac{OK}{KT} = \frac{CN}{NA},$$

et il reste

$$\overline{OB'}^2 = \overline{A'T}^2 \cdot \frac{CN}{NA}.$$

Enfin, les mêmes triangles semblables donneront encore

$$\frac{A'T}{AM} = \frac{OT}{CA} = \frac{a}{2OK},$$

puisque

$$OT = \frac{a^2}{OK};$$

mais aussi

$$\frac{A'T}{AM} = \frac{OA'}{CM} = \frac{OK}{CN};$$

multipliant donc ces deux expressions de $\frac{A'T}{AM}$, on trouve

$$\frac{\overline{A'T}^2}{\overline{AM}^2} = \frac{a}{2CN},$$

ce qui devient, à cause de la valeur de $\overline{AM}^2$, connue par la proposition 3,

$$\overline{A'T}^2 = \frac{c^2.NA.NH}{2a.CN},$$

et la dernière expression de $\overline{OB'}^2$ se réduit à

$$\overline{OB'}^2 = \frac{c^2.NH}{2a}.$$

On aura de même

$$\overline{OA'}^2 = \frac{c^2.NH'}{2a},$$

et comme

$$NH + NH' = 2OH = \frac{2a(a^2+b^2)}{c^2},$$

il reste (prop. 12), pour l'ellipse,

$$\overline{OA'}^2 + \overline{OB'}^2 = a^2 + b^2.$$

L'observation que nous avons faite sur les sections opposées conjuguées montre que nous aurons pour l'hyperbole, grâce à de légères modifications,

$$\overline{OA'}^2 - \overline{OB'}^2 = a^2 - b^2 \text{ (prop. 13)}.$$

Nous avons un peu simplifié cette démonstration, afin de mieux faire saisir la méthode de l'auteur, ou peut-être celle du commentateur, car il faut toujours se défier des interprètes arabes; mais on comprend qu'une pareille série de déductions, si ingénieuse qu'elle soit, ait disparu de l'enseignement.

Les expressions

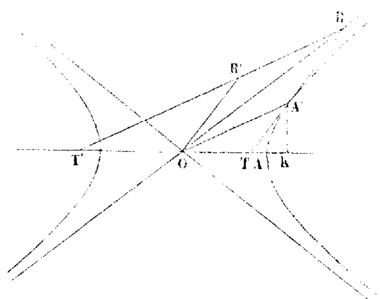
$$a'^2 = \frac{c^2\ NH'}{2a} \quad \text{et} \quad b'^2 = \frac{c^2.NH}{2a}$$

conduisent à comparer deux diamètres conjugués relativement à leur produit, à leur rapport, à leur somme ou à leur différence, soit avec les axes, soit entre eux, suivant qu'ils s'écartent plus ou moins de ces axes; on voit, par exemple, que les diamètres égaux de l'ellipse sont ceux pour lesquels $a' + b'$ est maximum. Mais nous n'insisterons pas sur ces propositions, qui ne sont pas nécessaires pour arriver au théorème sur le parallélogramme des diamètres conjugués.

La démonstration de ce théorème (proposition 31) est la même pour l'ellipse et l'hyperbole, mais nous allons l'exposer sur cette dernière courbe (*fig.* 8).

Soient OA′ le demi-diamètre transverse, et OB′ son conjugué non

Fig. 8.



transverse; soit R le sommet du parallélogramme construit sur ces demi-diamètres; on sait que ce point R sera sur une asymptote, que A′R sera tangent à l'hyperbole donnée, et B′R à l'une des sections opposées conjuguées. Enfin, représentons par p la surface du triangle ROA′, et par t celle du triangle OA′T, en indiquant par T le point où A′R coupe l'axe focal, nous aurons évidemment

$$\frac{t}{p} = \frac{A'T}{OB'},$$

puisque

$$A'R = OB',$$

ce qui donne

$$\frac{t^2}{p^2} = \frac{KT}{OK},$$

d'après ce qu'on a vu pages 184 et 185, K étant le pied de l'ordonnée $A'K = y$.

Maintenant, soit l'abscisse $OK = x$, on sait que

$$OT = \frac{a^2}{x},$$

ce qui donne

$$KT = x - \frac{a^2}{x} = \frac{x^2 - a^2}{x},$$

et comme

$$x^2 - a^2 = \frac{a^2 y^2}{b^2},$$

il vient

$$\frac{t^2}{p^2} = \frac{a^2 y^2}{b^2 x^2},$$

ou bien

$$\frac{t}{p} = \frac{ay}{bx},$$

expression qui peut encore se mettre sous la forme

$$\frac{t}{p} = \frac{y \cdot \frac{a^2}{x}}{ab}.$$

Or, le numérateur $y \cdot \frac{a^2}{x}$ est égal à $2t$, puisqu'il mesure deux fois la surface du triangle OA′T; de même aussi, en comparant les dénominateurs, on trouve

$$ab = 2p,$$

ce qui démontre la proposition, puisque le triangle $p = ROA'$ est la moitié du parallélogramme OA′B′R.

On voit que cette démonstration est aussi simple qu'aucune de celles qui aient été proposées à ce sujet, et qu'elle a surtout l'avantage de s'appliquer également à l'ellipse et à l'hyperbole; cependant elle est assez pénible dans l'auteur, parce qu'elle est compliquée mal à propos d'une autre proposition que nous allons exposer aussi, quoiqu'elle ne soit qu'un objet de curiosité.

Soit t' la surface du triangle B′OT′, en indiquant par T′ le point où le côté B′R du parallélogramme rencontre l'axe focal, je dis que

$$tt' = p^2.$$

En effet, on a déjà trouvé

$$\frac{t}{p} = \frac{\text{A}'\text{T}}{\text{OB}'},$$

mais, à cause des triangles semblables OA′T, T′B′O, on a aussi

$$\frac{t}{p} = \frac{\text{OT}}{\text{OT}'}.$$

De même

$$\frac{t'}{p} = \frac{\text{B}'\text{T}'}{\text{OA}'} = \frac{\text{OT}'}{\text{OT}},$$

donc

$$\frac{tt'}{p^2} = 1.$$

On voit que cette proposition ne sert à rien pour arriver au théorème précédent; c'est peut-être une note qui sera passée dans le texte par la faute des copistes.

Revenons maintenant à la parabole que nous avons laissée de côté; il suffira de dire que, dans la proposition 5, l'auteur démontre facilement que le côté droit relatif à des diamètres conjugués quelconques est égal au côté droit relatif aux axes rectangulaires, plus quatre fois l'abscisse de la nouvelle origine, cette abscisse étant prise, comme à l'ordinaire, sur l'axe focal. Seulement, comme Apollonius ne connaît pas le foyer de la parabole, il ne peut, comme on le fait maintenant, exprimer cette quantité en fonction du rayon vecteur.

Enfin, le septième livre se termine par une vingtaine de propositions peu intéressantes et que nous nous dispenserons d'analyser, relatives à la comparaison des diverses *figures* que donnent les différents systèmes de diamètres conjugués. Nous avons vu, dans l'analyse du premier livre, que l'on appelait *figure* le parallélogramme construit sur un diamètre transverse et sur son côté droit correspondant; mais nous rappellerons ici que l'angle de ce parallélogramme doit toujours être celui du système de diamètres que l'on considère, quoique l'on emploie quelquefois le mot de rectangle au lieu de celui de parallélogramme.

Ces théorèmes sur les *figures* ne sont pas restés dans la science, parce que les problèmes pour la solution desquels ils pourraient être utiles se résolvent aussi bien au moyen des propositions établies sur les carrés et les parallélogrammes des diamètres conjugués.

Nous ne pouvons parler du huitième livre que d'après la restitution qui en a été entreprise par Halley ; mais quoiqu'une pareille tentative soit toujours incertaine et téméraire, on peut la justifier, parce que l'on connaît le sujet sur lequel roulait ce livre perdu. Le peu de mots qu'Apollonius y consacre dans sa préface générale, adressée à Eudème, ne suffiraient pas à eux seuls, car il y est dit seulement que ce livre contient des problèmes déterminés sur les coniques ; mais une lettre d'envoi, adressée à Attale, et qui précède le septième livre, nous apprend que les théorèmes de ce livre servent à résoudre les problèmes du huitième. De plus Halley observe que Pappus, qui fait d'ordinaire une série de lemmes pour chacun des livres d'Apollonius, réunit ceux qui regardent les deux derniers. Il est donc hors de doute que le huitième livre contenait des problèmes résolus par les propriétés des diamètres conjugués et de leurs *figures*.

Nous avons vu dans le second livre plusieurs questions de cette nature résolues d'une manière imparfaite, parce qu'il fallait admettre que la conique fût construite d'avance. Halley s'est conformé aux intentions de l'auteur en évitant cette nécessité, mais ses solutions ne peuvent avoir, au point de vue historique, le même intérêt que celles d'Apollonius, qui pourtant n'en différaient peut-être pas beaucoup. Nous dirons seulement que, dans les problèmes où il faut déterminer, d'après certaines conditions, un système de diamètres conjugués dans une conique dont les axes sont donnés, il commence par chercher sur l'axe des ordonnées un point servant de centre à un cercle de rayon tel, qu'il détermine sur l'axe focal les pieds des ordonnées des points de la courbe, d'où l'on peut mener des cordes supplémentaires parallèles aux diamètres demandés. Connaissant ainsi les abscisses égales et opposées de ces points symétriques, on obtiendra l'ordonnée correspondante au moyen de l'équation de la courbe, ce qui donnera les cordes supplémentaires et, par suite, la direction des diamètres. Quant à leur grandeur, on la connaît au moyen des points qui ont été trouvés sur l'axe focal. En effet, soit N l'un de ces points, on a vu dans le septième livre que l'on avait

$$\overline{OB'}^2 = \frac{c^2.NH}{2a}, \quad \overline{OA'}^2 = \frac{c^2.NH'}{2a},$$

les points H et H' déterminant les lignes appelées *homologues*. Mais, parmi les trente-trois problèmes dont se compose ce huitième livre restitué, on regrette de ne pas voir le suivant :

Étant donné en grandeur et en direction un système quelconque de diamètres conjugués de l'ellipse ou de l'hyperbole, trouver les axes en grandeur et en direction.

Outre le grand ouvrage dont nous avons tenté de faire l'analyse, Apollonius avait composé divers traités dont il reste peu de chose. Ceux qui désireraient quelques nouveaux détails bibliographiques relatifs à notre auteur, peuvent consulter une intéressante Notice insérée par M. Terquem dans le troisième volume des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, année 1844.

Maintenant, si nous réfléchissons sur les méthodes qui ont guidé les anciens et surtout Apollonius dans leurs recherches sur les coniques, nous trouverons que l'on s'en fait quelquefois une idée assez éloignée de la vérité. Sans disposer des ressources de l'Algèbre moderne, les mathématiciens de l'antiquité possédaient, comme nous avons eu bien des occasions de le constater, des procédés de calcul extrêmement simples, puisqu'ils étaient basés sur les proportions, mais féconds plus qu'on ne le suppose, grâce à l'habitude qui les avait alors rendus faciles. Nous devons regarder Apollonius en particulier comme un esprit essentiellement analytique, et l'on a dû remarquer chez lui une tendance très-prononcée à ramener au calcul une foule de questions.

Souvent aussi l'on s'est exagéré le goût des anciens pour les considérations purement géométriques : sans doute ce goût était plus général chez eux que chez nous, à cause de l'insuffisance de leur analyse; mais une pareille aptitude peut se développer à toutes les époques, et la science moderne a compté et compte encore, dans cette branche des mathématiques, plusieurs noms assez illustres pour que nous n'ayons pas besoin de les rappeler ici. Mais, pour ne parler que des sections coniques, on serait tenté de chercher dans notre auteur la trace du beau théorème de M. Dandelin, pour déterminer les foyers au moyen de sphères inscrites au cône droit et tangentes au plan sécant, si l'on ne savait que le foyer de la parabole n'était pas connu d'Apollonius, non plus que les directrices des trois courbes; l'étude des coniques présentait donc alors une lacune importante, même au point de vue purement géométrique.

Nous dirons, en terminant, que nous n'avons point prétendu faire connaître complétement Apollonius, mais seulement donner l'idée générale de son génie et de ses méthodes aux mathématiciens qui n'auraient pas son ouvrage à leur disposition, ou encore en faciliter la lecture à ceux qui désireraient consulter ce monument de la science, qu'aucune analyse, même plus complète que la nôtre, ne pourra jamais remplacer.