JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

C.-G. SUCKSDORFF

Détermination du pentaèdre de volume donné, dont la surface est un minimum

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 91-109.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__91_0>

DÉTERMINATION

DU PENTAÈDRE DE VOLUME DONNÉ,

DONT LA SURFACE EST UN MINIMUM;

Par M. C.-G. SUCKSDORFF.

Nous nous proposons de donner ici la solution du problème suivant :

Entre tous les pentaèdres de même volume, trouver celui qui a la moindre surface.

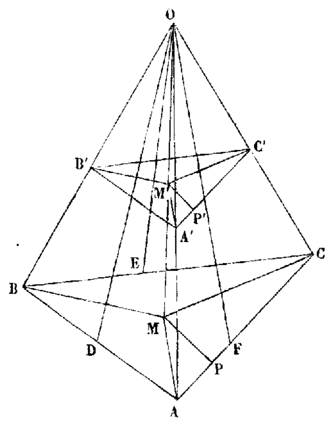
On ne laissera de côté aucun pentaèdre, en considérant les pyramides quadrangulaires et les troncs de pyramides triangulaires : bien entendu que nous appelons tronc de pyramide tout solide qui reste lorsque, d'une pyramide quelconque, on retranche la partie supérieure par un plan quelconque qui ne coupe ni ne touche la base de la pyramide.

La pyramide quadrangulaire, qui, à volume égal, offre une surface moindre que les autres figures de la même espèce, est bien connue, et l'on trouve, en exprimant sa surface S' par son volume V,

$$S' = 2\sqrt[3]{36V^2}.$$

Admettons maintenant qu'on parvienne à trouver aussi un tronc de pyramide triangulaire dont la surface soit moindre que celles des autres solides du même genre, à volume égal : le problème proposé plus haut sera dès lors facilement résolu, car il ne restera qu'à comparer la surface de ce tronc à celle de la pyramide dont nous avons parlé tout à l'heure, les volumes étant supposés égaux. C'est à la plus petite des deux qu'appartiendra la propriété du minimum entre toutes les surfaces de pentaèdres.

Pour trouver ce tronc, cherchons d'abord des expressions convenables pour le volume, pour la base et pour la surface latérale d'une pyramide triangulaire quelconque; et pour cela supposons que la



droite OM, qui perce au point M la base ABC de la pyramide O.ABC, soit l'axe d'un cône ordinaire, tangent aux faces AOB, BOC, COA de la même pyramide suivant les droites OD, OE, OF. Soit MP la trace, sur le triangle ABC, du plan OMP mené par OM perpendiculairement au plan de ce triangle. De plus nous admettons que, par OM et chacun des points A, D, B, E, C et F, des plans soient menés. Les plans DOM, EOM, FOM sont perpendiculaires aux plans des triangles respectifs AOB, BOC, COA; et les angles dièdres F.OM.D, D.OM.E, E.OM.F, que nous désignerons respectivement par 2τ, $2\tau'$, $2\tau''$, sont divisés en parties égales par les plans AOM, BOM, COM.

Si l'on donne τ, τ' et τ'', qui au reste doivent satisfaire à la condition

$$(1) \qquad \tau + \tau' + \tau'' = 180^\circ,$$

et que de plus l'angle DOM = EOM = FOM = φ soit connu, l'angle trièdre O.ABC est déterminé. Ensuite, on pourra fixer la position de la base ABC par OM $= c$, par l'angle OMP $= \psi$, que nous supposons ne pas surpasser 90 degrés, et enfin par l'angle γ des plans OMP et OMA.

Si l'on pose

$$\mathrm{AM} = a, \quad \mathrm{BM} = a', \quad \mathrm{CM} = a'',$$

$$\text{angle AMO} = \mathrm{A}, \quad \text{angle BMO} = \mathrm{A}', \quad \text{angle CMO} = \mathrm{A}'',$$

et qu'on applique une formule bien connue aux pyramides M.AOB, M.BOC et M.COA dont est composée la pyramide O.ABC, on trouve d'abord pour le volume V' de la même pyramide

$$\mathrm{V}' = \frac{1}{6}[aa'c \sin \mathrm{A} \sin \mathrm{A}' \sin \tau'' + a'a''c \sin \mathrm{A}' \sin \mathrm{A}'' \sin \tau + a''ac \sin \mathrm{A}'' \sin \mathrm{A} \sin \tau'];$$

mais il est facile d'introduire dans cette formule, au lieu de a, a', a'', A, A' et A'', les quantités dont nous nous sommes servi pour la détermination de la pyramide, car si nous appelons α, α' et α'' les angles respectifs AOM, BOM et COM, nous tirons des triangles AOM, BOM, COM,

$$a = \frac{c}{\cot\alpha + \cot A}\,\frac{1}{\sin A}, \quad a' = \frac{c}{\cot\alpha' + \cot A'}\,\frac{1}{\sin A'}, \quad a'' = \frac{c}{\cot\alpha'' + \cot A''}\,\frac{1}{\sin A''},$$

et des angles trièdres O.ADM, O.BEM, O.CFM,

$$\cot\alpha = \cos\tau\cot\varphi, \quad \cot\alpha' = \cos\tau'\cot\varphi, \quad \cot\alpha'' = \cos\tau''\cot\varphi.$$

De plus, les angles trièdres M.APO, M.PBO, M.CPO nous donnent

$$\cot A = \cos\gamma\cot\psi, \quad \cot A' = \cos\gamma'\cot\psi, \quad \cot A'' = \cos\gamma''\cot\psi,$$

en faisant

$$(2) \qquad \gamma' = 180^\circ - \tau'' + \gamma, \quad \gamma'' = 180^\circ + \tau' + \gamma.$$

On voit maintenant comment on arrivera au but. L'élimination faite, on trouve, en ayant égard aux relations

$$\sin\tau\cos\tau + \sin\tau'\cos\tau' + \sin\tau''\cos\tau'' = 2\sin\tau\sin\tau'\sin\tau'',$$

$$\cos\gamma\sin\tau + \cos\gamma'\sin\tau' + \cos\gamma''\sin\tau'' = 0,$$

conséquences des équations (1) et (2)

$$(3) \qquad V' = \frac{c^3\cot\varphi\sin\tau\sin\tau'\sin\tau''}{3(\cos\tau\cot\varphi + \cos\gamma\cot\psi)(\cos\tau'\cot\varphi + \cos\gamma'\cot\psi)(\cos\tau''\cot\varphi + \cos\gamma''\cot\psi)}.$$

Pour la base et la surface latérale de la pyramide, on est immédiatement conduit aux formules suivantes :

$$\Delta\,ABC = \frac{3V'}{c\sin\psi}, \quad \Delta\,AOB + \Delta\,BOC + \Delta\,COA = \frac{3V'}{c\sin\varphi}.$$

Concevons maintenant que, de la pyramide O.ABC, on retranche la pyramide O.A'B'C', et désignons par z, ω, η les valeurs que prennent c, ψ, γ pour cette pyramide. En appliquant les formules que nous venons de trouver, le volume V″, la base et la surface latérale de la même pyramide seront donnés par les formules

$$(4)\qquad V'' = \frac{z^3 \cot\varphi \sin\tau \sin\tau' \sin\tau''}{3(\cos\tau\cot\varphi + \cos\eta\cot\omega)(\cos\tau'\cot\varphi + \cos\eta'\cot\omega)(\cos\tau''\cot\varphi + \cos\eta''\cot\omega)},$$

$$\Delta A'B'C' = \frac{3V''}{z\sin\omega},\quad \Delta A'OB' + \Delta B'OC' + \Delta C'OA' = \frac{3V''}{z\sin\varphi},$$

où il faut supposer

$$(5)\qquad \eta' = 180^\circ - \tau'' + \eta,\quad \eta'' = 180^\circ + \tau' + \eta.$$

Les calculs étant ainsi préparés, nous allons nous occuper du tronc ABC A′B′C′. Si nous appelons V son volume et S sa surface, nous aurons

$$(6)\qquad V = V' - V'',$$

$$(7)\qquad S = 3\left[\frac{V'}{c}\left(\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{1}{\sin\psi}\right) - \frac{V''}{z}\left(\frac{1}{\sin\varphi} - \frac{1}{\sin\omega}\right)\right].$$

Ces formules s'appliquent à tous les cas, excepté à celui où l'on a $\varphi = 0$, c'est-à-dire où le tronc est prismatique. Alors les expressions de V′ et V″ deviennent infinies, et les expressions de V et S se présentent sous une forme indéterminée. Pour éviter cet inconvénient, nous considérerons en particulier le cas des troncs prismatiques, et d'abord nous formerons des expressions convenables pour le volume et la surface d'une figure de cette espèce.

Les expressions de V′ et V″ étant substituées dans les formules (6) et (7), on peut y introduire, au lieu de c, z et φ, la partie $MM' = h$ de l'axe du cône dont nous avons parlé, et les rayons r, r' des cercles d'intersection du même cône avec les plans qu'on mène par les points M, M′, perpendiculairement à OM; car on a

$$h = c - z,\quad c = r\cot\varphi,\quad z = r'\cot\varphi.$$

Le changement accompli, si ensuite, après une réduction convenable, on fait $r' = r$, on trouve pour le volume et la surface cherchés que, pour éviter toute confusion, nous désignerons respectivement par v

et s :

$$(8)\quad v=\frac{r^3\operatorname{tang}\tau\operatorname{tang}\tau'\operatorname{tang}\tau''}{3}\left[\begin{aligned}&\frac{3h}{r}-\cot\psi\left(\frac{\cos\gamma}{\cos\tau}+\frac{\cos\gamma'}{\cos\tau'}+\frac{\cos\gamma''}{\cos\tau''}\right)\\&\qquad+\cot\omega\left(\frac{\cos\eta}{\cos\tau}+\frac{\cos\eta'}{\cos\tau'}+\frac{\cos\eta''}{\cos\tau''}\right)\end{aligned}\right],$$

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}&s=r^2\operatorname{tang}\tau\operatorname{tang}\tau'\operatorname{tang}\tau''\\&\times\left[\begin{aligned}&\frac{2h}{r}+\frac{1}{\sin\psi}+\frac{1}{\sin\omega}-\cot\psi\left(\frac{\cos\gamma}{\cos\tau}+\frac{\cos\gamma'}{\cos\tau'}+\frac{\cos\gamma''}{\cos\tau''}\right)\\&\qquad+\cot\omega\left(\frac{\cos\eta}{\cos\tau}+\frac{\cos\eta'}{\cos\tau'}+\frac{\cos\eta''}{\cos\tau''}\right)\end{aligned}\right],\end{aligned}\right.$$

où il n'y a plus d'ambiguïté.

Remarquons ici que si un tronc quelconque de pyramide triangulaire offre une surface moindre que tous les autres, les valeurs correspondantes des éléments qui le déterminent doivent rendre l'expression de S et celle de s, dans le cas d'un tronc prismatique, un véritable minimum. Donc, si l'on connaît tous les minima de S correspondant aux troncs des pyramides ordinaires et ceux de s correspondant aux troncs prismatiques, on aura le tronc cherché.

Proposons-nous de les trouver, et admettons d'abord que φ ne soit pas zéro; alors, en opérant suivant le principe du calcul différentiel, il faut différentier les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6) et (7). La différentiation faite dans la supposition de $V=$ constant, si ensuite on pose

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}&m=\frac{1}{\cos\tau\cot\varphi+\cos\gamma\cot\psi},\qquad m'=\frac{1}{\cos\tau'\cot\varphi+\cos\gamma'\cot\psi},\\&m''=\frac{1}{\cos\tau''\cot\varphi+\cos\gamma''\cot\psi},\qquad p=\frac{\sin\psi+\sin\varphi}{\sin\varphi\sin\psi},\end{aligned}\right.$$

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned}&n=\frac{1}{\cos\tau\cot\varphi+\cos\eta\cot\omega},\qquad n'=\frac{1}{\cos\tau'\cot\varphi+\cos\eta'\cot\omega},\\&n''=\frac{1}{\cos\tau''\cot\varphi+\cos\eta''\cot\omega},\qquad q=\frac{\sin\omega-\sin\varphi}{\sin\varphi\sin\omega},\end{aligned}\right.$$

et qu'entre les équations obtenues, on élimine $d\tau$, $d\gamma'$, $d\gamma''$, $d\eta'$, $d\eta''$

et dV'', on trouve

$$dS = 3\left[\begin{array}{c} \left(\frac{p}{c}-\frac{q}{z}\right)dV' - \frac{pV'}{c^2}dc + \frac{qV''}{z^2}dz \\ -\frac{V'\cos\psi}{c\sin^2\psi}d\psi - \frac{V''\cos\omega}{z\sin^2\omega}d\omega - \left(\frac{V'}{c}-\frac{V''}{z}\right)\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}d\varphi \end{array}\right],$$

$$dV' = V'\left\{\begin{array}{l} \frac{3}{c}dc + \cot\psi(m\sin\gamma + m'\sin\gamma' + m''\sin\gamma'')d\gamma \\ \quad + (m\cos\gamma + m'\cos\gamma' + m''\cos\gamma'')\frac{d\psi}{\sin^2\psi} \\ \quad + (m\cos\tau + m'\cos\tau' + m''\cos\tau'' - \tang\varphi)\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} \\ + \left[\begin{array}{c} \frac{m'(\cot\varphi + \cos\gamma'\cos\tau'\cot\psi)}{\sin\tau'} - \frac{m(\cot\varphi + \cos\gamma\cos\tau\cot\psi)}{\sin\tau} \\ + m''\sin\gamma''\cot\psi \end{array}\right]d\tau' \\ + \left[\begin{array}{c} \frac{m''(\cot\varphi + \cos\gamma''\cos\tau''\cot\psi)}{\sin\tau''} - \frac{m(\cot\varphi + \cos\gamma\cos\tau\cot\psi)}{\sin\tau} \\ - m'\sin\gamma'\cot\psi \end{array}\right]d\tau'' \end{array}\right\},$$

$$dV'' = V''\left\{\begin{array}{l} \frac{3}{z}dz + \cot\omega(n\sin\eta + n'\sin\eta' + n''\sin\eta'')d\eta \\ \quad + (n\cos\eta + n'\cos\eta' + n''\cos\eta'')\frac{d\omega}{\sin^2\omega} \\ \quad + (n\cos\tau + n'\cos\tau' + n''\cos\tau'' - \tang\varphi)\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} \\ + \left[\begin{array}{c} \frac{n'(\cot\varphi + \cos\eta'\cos\tau'\cot\omega)}{\sin\tau'} - \frac{n(\cot\varphi + \cos\eta\cos\tau\cot\omega)}{\sin\tau} \\ + n''\sin\eta''\cot\omega \end{array}\right]d\tau' \\ + \left[\begin{array}{c} \frac{n''(\cot\varphi + \cos\eta''\cos\tau''\cot\omega)}{\sin\tau''} - \frac{n(\cot\varphi + \cos\eta\cos\tau\cot\omega)}{\sin\tau} \\ - n'\sin\eta'\cot\omega \end{array}\right]d\tau''. \end{array}\right\}$$

Pour chacun des minima cherchés, on aura $dS = 0$, comme il est facile de s'en assurer. Si donc, au moyen des deux dernières équations, on a éliminé dc et dz de l'expression de dS, les coefficients des différentielles restantes s'évanouiront séparément. Voici les équations que l'on trouve :

$$pz = qc, \tag{12}$$

$$\cot\psi\,(m\sin\gamma + m'\sin\gamma' + m''\sin\gamma'') = 0, \tag{13}$$

$$\cot\omega\,(n\sin\eta + n'\sin\eta' + n''\sin\eta'') = 0, \tag{14}$$

$$m\cos\gamma + m'\cos\gamma' + m''\cos\gamma'' = \frac{3\cos\psi}{p}, \tag{15}$$

$$n\cos\eta + n'\cos\eta' + n''\cos\eta'' = -\frac{3\cos\omega}{q}, \tag{16}$$

$$\left\{\begin{aligned} &pz\mathrm{V}'\left[m\cos\tau + m'\cos\tau' + m''\cos\tau'' - \operatorname{tang}\varphi - \frac{3\cos\varphi}{p}\right] \\ &= qc\mathrm{V}''\left[n\cos\tau + n'\cos\tau' + n''\cos\tau'' - \operatorname{tang}\varphi - \frac{3\cos\varphi}{q}\right], \end{aligned}\right. \tag{17}$$

$$\left\{\begin{aligned} &pz\mathrm{V}'\left[\begin{array}{c}\dfrac{m'(\cot\varphi + \cos\gamma'\cos\tau'\cot\psi)}{\sin\tau'} - \dfrac{m(\cot\varphi + \cos\gamma\cos\tau\cot\psi)}{\sin\tau} \\ + m''\sin\gamma''\cot\psi\end{array}\right], \\ &= qc\mathrm{V}''\left[\begin{array}{c}\dfrac{n'(\cot\varphi + \cos\eta'\cos\tau'\cot\omega)}{\sin\tau'} - \dfrac{n(\cot\varphi + \cos\eta\cos\tau\cot\omega)}{\sin\tau} \\ + n''\sin\eta''\cot\omega\end{array}\right], \end{aligned}\right. \tag{18}$$

$$\left\{\begin{aligned} &pz\mathrm{V}'\left[\begin{array}{c}\dfrac{m''(\cot\varphi + \cos\gamma''\cos\tau''\cot\psi)}{\sin\tau''} - \dfrac{m(\cot\varphi + \cos\gamma\cos\tau\cot\psi)}{\sin\tau} \\ - m'\sin\gamma'\cot\psi\end{array}\right] \\ &= qc\mathrm{V}''\left[\begin{array}{c}\dfrac{n''(\cot\varphi + \cos\eta''\cos\tau''\cot\omega)}{\sin\tau''} - \dfrac{n(\cot\varphi + \cos\eta\cos\tau\cot\omega)}{\sin\tau} \\ - n'\sin\eta'\cot\omega\end{array}\right], \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Avant de commencer l'élimination, nous remarquons qu'il faut, dans les équations (13) et (14), supposer égaux à zéro les facteurs composés. On s'en assure en examinant $d^2\mathrm{S}$. Les équations de condition étant satisfaites, le coefficient de $d\gamma^2$ s'y réduit à zéro sans que cela ait lieu pour le coefficient de $d\gamma\,d\psi$, si le facteur composé, dans l'équation (13), n'est pas zéro. Il ne peut donc y avoir de minimum sans que cette condition soit remplie. Par rapport au facteur composé, dans l'équation (14), ce sera la même chose; en sorte que nous aurons

$$(20)\qquad m\sin\gamma + m'\sin\gamma' + m''\sin\gamma'' = 0,$$

$$(21)\qquad n\sin\eta + n'\sin\eta' + n''\sin\eta'' = 0.$$

De plus, il est nécessaire que chaque relation déduite des équations (1), (2), (3), (10), (15), (20), subsiste encore après que l'on y a changé c, V', m, m', m'', p, ψ, γ, γ', γ'' en z, V'', n, n', n'', q, $-\omega$, $\eta + 180°$, $\eta' + 180°$, $\eta'' + 180°$ respectivement; car, en faisant le même changement dans les équations mêmes, on retombe sur les équations (1), (5), (4), (11), (16) et (21).

Maintenant, pour effectuer l'élimination, nous multiplions l'équation (20) par $\frac{1}{mm'm''}$, nous multiplions la même équation par $\frac{\cos\gamma'\cos\gamma''\tang\varphi}{m}$, et l'équation (15) par $\tang\varphi\cot\psi$. Remettant ensuite pour un moment, au lieu de m, m', m'' et p, leurs valeurs, et appliquant les équations (1) et (2), d'où nous tirons

$$\cos\gamma'\cos\tau - \cos\gamma\cos\tau' = -\sin\tau''\sin(\gamma+\tau),$$
$$\cos\gamma''\cos\tau - \cos\gamma\cos\tau'' = \sin\tau'\sin(\gamma-\tau);$$

nous trouvons par un procédé bien simple les équations suivantes :

$$(22)\qquad M\cot^2\varphi + 2N\cot\varphi\cot\psi + P\cot^2\psi = 0,$$

$$(23)\left\{\begin{aligned} &m'\sin\gamma'\cos\gamma''\sin\tau''\sin(\gamma+\tau) - m''\sin\gamma''\cos\gamma'\sin\tau'\sin(\gamma-\tau)\\ &\qquad = P\tang\varphi,\end{aligned}\right.$$

$$(24)\qquad m\cos\tau + m'\cos\tau' + m''\cos\tau'' = \frac{3(1+\sin\varphi\sin\psi)}{p\cos\varphi},$$

où nous avons introduit les dénominations :

$$\begin{aligned} P &= \sin\gamma\cos\gamma'\cos\gamma'' + \sin\gamma'\cos\gamma\cos\gamma'' + \sin\gamma''\cos\gamma\cos\gamma',\\ 2N &= \cos\tau\sin(\gamma'+\gamma'') + \cos\tau'\sin(\gamma+\gamma'') + \cos\tau''\sin(\gamma+\gamma'),\\ M &= \sin\gamma\cos\tau'\cos\tau'' + \sin\gamma'\cos\tau\cos\tau'' + \sin\gamma''\cos\tau\cos\tau'.\end{aligned}$$

Au moyen de l'équation (24) et de celle qu'on en tire par le changement de $m\ldots$ en $n\ldots$, on peut déterminer les valeurs de m, m',

m'', n' et n'' qui vérifient l'équation (17). Si ensuite on ôte les produits égaux pz et qc, et qu'on restitue les valeurs de p et q, on aura, en réduisant,

$$(25) \qquad V'(1 - 3\sin\varphi\sin\psi) = V''(1 + 3\sin\varphi\sin\omega).$$

Ajoutant à l'équation (24) les équations (20) et (15) multipliées respectivement par $-\sin(\gamma' + \tau')$ et $-\cos(\gamma' + \tau')$, et ayant égard aux équations (1) et (2), on trouve, après une réduction bien simple,

$$(26) \quad 2mp\sin\tau'\sin\tau''\cos\varphi = 3[1 + \sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos(\gamma' + \tau')],$$

où m' et m'' n'entrent plus. On aura de même,

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} &2m'p\sin\tau\sin\tau''\cos\varphi \\ &= 3[1 + \sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos(\gamma'' + \tau'')], \\ &2m''p\sin\tau\sin\tau'\cos\varphi \\ &= 3[1 + \sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos(\gamma + \tau)]. \end{aligned} \right.$$

Ayant éliminé m'', n'' entre les équations (18), (20), (21), et m', n' entre les équations (19), (20), (21), si ensuite on substitue les valeurs de m, m', m'' que donnent les équations (26) et (27), et les valeurs correspondantes de n, n', n'', on trouve facilement, en observant les relations

$$\cos(\gamma + \tau) = \cos(\gamma' - \tau'),\ \cos(\gamma' + \tau') = \cos(\gamma'' - \tau''),$$
$$\cos(\gamma'' + \tau'') = \cos(\gamma - \tau),$$

auxquelles donnent lieu les équations (1) et (2), celles qui en résultent par le changement de γ... en $\eta + 180°$..., et les valeurs de p et q :

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} V'\sin\gamma''\cos\psi &= -V''\sin\eta''\cos\omega, \\ V'\sin\gamma'\cos\psi &= -V''\sin\eta'\cos\omega. \end{aligned} \right.$$

Pour que ces équations subsistent conformément aux conditions du problème, il faut qu'on ait $\cos\psi = 0$, et en même temps $\cos\omega = 0$, ou bien $\sin\gamma'' : \sin\gamma' = \sin\eta'' : \sin\eta'$.

En examinant l'équation (25) dans la supposition de $\psi = \omega = 90°$, on sera bientôt conduit à l'absurde, quand on y aura substitué les valeurs de V' et V'' données par les équations (3) et (4), celle de c

tirée de l'équation (12), et enfin les expressions de p et q. Il faut donc supposer

$$\sin\gamma'' : \sin\gamma' = \sin\eta'' : \sin\eta'.$$

Cette analogie, combinée avec les équations (1), (2), (5) et (28), nous donne

$$\eta = \gamma \pm 180^\circ, \quad \eta' = \gamma' \pm 180^\circ, \quad \eta'' = \gamma'' \pm 180^\circ,$$

où il faut prendre les signes supérieurs ensemble et les signes inférieurs ensemble; et

$$(29) \qquad \mathrm{V}' \cos\psi = \mathrm{V}'' \cos\omega.$$

Si, dans l'équation (23), on substitue les valeurs de m' et m'' tirées des équations (27), et qu'ensuite on rétablisse la valeur de p, on trouve en réduisant et en ayant égard aux relations

$$\begin{gathered}\sin(\gamma'' - \gamma') = \sin\tau, \qquad \cos(\gamma'' + \tau'') = \cos(\gamma - \tau),\\ 2[\cos\tau \sin(\gamma' + \gamma'') - \sin\gamma \cos\gamma] = \cos\tau \sin(\gamma' + \gamma'')\\ + \cos\tau' \sin(\gamma + \gamma'') + \cos\tau'' \sin(\gamma + \gamma') = 2\mathrm{N},\end{gathered}$$

amenées par les équations (1) et (2) :

$$2\mathrm{P} + \frac{2\mathrm{P}\sin\varphi}{\sin\psi} = 3\left[\begin{array}{c}[\cos\gamma \sin(\gamma' + \gamma'') - \sin\gamma \cos\tau]\\ \times (1 + \sin\varphi \sin\psi) - \mathrm{N}\cos\varphi \cos\psi\end{array}\right].$$

Divisant par $\sin\varphi \sin\psi$, puis remplaçant $\frac{1}{\sin^2\psi}$ par $1 + \cot^2\psi$, on aura, en posant

$$\begin{gathered}2\mathrm{P} - 3[\cos\gamma \sin(\gamma' + \gamma'') - \sin\gamma \cos\tau] = \cos\gamma' \sin(\gamma - \gamma'')\\ + \cos\gamma'' \sin(\gamma - \gamma') + 3\sin\gamma \cos\tau = \mathrm{Q},\end{gathered}$$

et réduisant,

$$-\mathrm{Q} - 3\mathrm{N}\cot\varphi \cot\psi - 2\mathrm{P}\cot^2\psi = \frac{\mathrm{Q}}{\sin\varphi \sin\psi}.$$

Si à cette équation on ajoute l'équation (22) multipliée par 2, on trouve

$$(30)\qquad 2M\cot^2\varphi - Q + N\cot\varphi\cot\psi = \frac{Q}{\sin\varphi\sin\psi};$$

d'où résulte, en élevant les deux membres au carré, puis exprimant les sinus par les cotangentes, et réduisant,

$$(4M^2\cot^2\varphi - 4MQ - Q^2)\cot^2\varphi + 2N(2M\cot^2\varphi - Q)\cot\varphi\cot\psi$$
$$+ [(N^2 - Q^2)\cot^2\varphi - Q^2]\cot^2\psi = 0.$$

Enfin, si l'on ajoute cette équation et l'équation (22) multipliée par $Q - 2M\cot^2\varphi$, on aura

$$[2M^2\cot^2\varphi - 3MQ - Q^2]\cot^2\varphi$$
$$+ [N^2 - Q^2 - 2MP)\cot^2\varphi + PQ - Q^2]\cot^2\psi = 0.$$

Pour passer à l'équation correspondante par le changement de $\gamma\ldots$ en $\eta + 180^\circ\ldots$, il n'y a qu'à changer ψ en $-\omega$; car, suivant les relations établies entre γ, γ', γ'' et η, η', η'', les expressions de M, N, P, Q ne changeront pas.

Il est donc nécessaire que l'équation que nous venons de former, résolue par rapport à $\cot\psi$, nous donne la valeur de cette quantité, de même que celle de $-\cot\omega$, si elle n'est pas vérifiée indépendamment de ψ. Mais c'est bien cela qu'il faut supposer, car l'équation (29), d'où résulte $\psi > \omega$, nous empêche d'employer les valeurs égales qu'on trouve pour les mêmes quantités. Nous aurons donc

$$(31)\qquad 2M^2\cot^2\varphi - 3MQ - Q^2 = 0.$$

Soustrayant de l'équation (30) multipliée par tang ψ, celle qui en résulte par le changement de ψ en $-\omega$, on aura

$$\sin\varphi(2M\cot^2\varphi - Q)(\tang\psi + \tang\omega) = \left(\frac{1}{\cos\psi} - \frac{1}{\cos\omega}\right)Q.$$

Divisant membre à membre l'équation (25) par l'équation (29), on trouve

$$\frac{1}{\cos\psi} - \frac{1}{\cos\omega} = 3\sin\varphi(\operatorname{tang}\psi + \operatorname{tang}\omega); \tag{32}$$

d'où, à cause de l'équation précédente,

$$M\cot^2\varphi - 2Q = 0.$$

Éliminant Q entre cette équation et l'équation (31), on est conduit à

$$M^2(\cot^2\varphi - 2) = 0,$$

d'où résulte $M = 0$; car, en examinant l'équation (32), on voit qu'il faut supposer $\sin\varphi < \frac{1}{3}$, ce qui donne $\cot^2\varphi > 8$. La valeur de M étant substituée dans l'équation (31), nous en tirons $Q = 0$. On aura donc, en reprenant les expressions de M et de Q, et en les transformant par rapport à l'équation (1), après avoir introduit les valeurs de γ' et γ'',

$$\left\{\begin{aligned} &\sin\gamma[\cos\tau'\cos\tau'' - \cos\tau(\cos^2\tau' + \cos^2\tau'')] \\ &\qquad\qquad + \cos\gamma\cos^2\tau\sin(\tau' - \tau'') = 0, \\ &\sin\gamma(\cos\tau - 2\cos\tau'\cos\tau'') - \cos\gamma\sin(\tau' - \tau'') = 0. \end{aligned}\right. \tag{33}$$

Éliminant γ entre ces équations, on trouve

$$\sin(\tau' - \tau'')\left\{\begin{aligned} &\cos\tau(\cos^2\tau - \cos^2\tau') \\ + \cos\tau''[\sin^2\tau\cos\tau' &- \cos\tau(\cos\tau'' + \cos\tau\cos\tau')] \end{aligned}\right\} = 0.$$

Mais, en vertu de l'équation (1), le facteur composé contenu dans le premier membre de cette équation peut être remplacé par le produit $\sin(\tau - \tau')\sin(\tau - \tau'')$. Nous aurons donc

$$\sin(\tau - \tau')\sin(\tau - \tau'')\sin(\tau' - \tau'') = 0,$$

d'où nous concluons que deux des angles τ, τ', τ'' sont égaux.

Supposons $\tau'' = \tau'$, et substituons cette valeur de τ'' dans les équations (33); elles nous donnent

$$\tau = \tau' = \tau'', \qquad \text{ou bien} \qquad \sin\gamma = 0.$$

Si, dans la supposition de $\tau = \tau' = \tau''$, d'où résulte

$$-\cos(\gamma' + \tau') = \cos\gamma, \qquad -\cos(\gamma'' + \tau'') = \cos\gamma',$$
$$-\cos(\gamma + \tau) = \cos\gamma'',$$

on soustrait les équations (26) et (27) deux à deux l'une de l'autre, et qu'ensuite on remplace m, m' et m'' par leurs valeurs, qui sont toutes positives, de même que celle de p; on est conduit à la relation $\cos\gamma = \cos\gamma' = \cos\gamma''$, qu'on ne peut pas admettre. Il faut donc passer le cas de $\tau = \tau' = \tau''$.

Supposons maintenant, outre $\tau'' = \tau'$, $\sin\gamma = 0$, d'où nous tirons $\gamma = 0$, ou bien $\gamma = 180°$, et soit d'abord $\gamma = 0$. Si, dans ce cas, on rétablit les valeurs de m et γ', et si l'on élimine $\tau'' = \tau'$ au moyen de l'équation (1), l'équation (26) prendra facilement la forme

$$(34) \qquad \frac{1 + \cos\tau}{\cos\tau \cot\varphi + \cot\psi} = \frac{6\cos^2\frac{1}{2}(\psi - \varphi)}{p\cos\varphi}.$$

En transformant l'expression de V', donnée par l'équation (3) dans la même supposition, les valeurs de γ' et γ'' étant rétablies, on trouve, en appliquant l'équation (34),

$$V' = \frac{2c^3 \sin\tau \operatorname{tang}^2\tau' \cos^2\frac{1}{2}(\psi - \varphi)}{p(1 + \cos\tau)\sin\varphi(\cot\varphi - \cot\psi)^2} = \frac{c^3 \sin\tau \operatorname{tang}^2\tau' \sin\varphi \sin^2\psi}{2p(1 + \cos\tau)\sin^2\frac{1}{2}(\psi - \varphi)}.$$

Substituant cette valeur de V' et la valeur correspondante de V'' dans l'équation qui résulte lorsque à l'équation (25) on ajoute l'équation (29) multipliée par $3\cos\varphi$; puis éliminant c au moyen de l'équation (12), et restituant les valeurs de p et q, on aura, en réduisant,

$$(35) \quad \begin{cases} [1 + 3\cos(\psi + \varphi)][1 - \cos(\psi + \varphi)]\cot^2\frac{1}{2}(\psi - \varphi) \\ = [1 + 3\cos(\omega - \varphi)][1 - \cos(\omega - \varphi)]\cot^2\frac{1}{2}(\omega + \varphi). \end{cases}$$

De plus, on tire de l'équation (32)

$$3\sin\varphi\sin(\psi + \omega) = \cos\varphi - \cos\psi - (\cos\varphi - \cos\omega)$$
$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(\psi + \varphi)\sin(\psi - \varphi)}{\cos\frac{1}{2}(\psi - \varphi)} - \frac{\sin\frac{1}{2}(\omega - \varphi)\sin(\omega + \varphi)}{\cos\frac{1}{2}(\omega + \varphi)};$$

et l'on trouve sans difficulté, en éliminant τ entre l'équation (34) et celle qui en résulte par le changement de p et ψ en q et $-\omega$, les valeurs de p et q étant ensuite rétablies,

$$3\sin\varphi\sin(\psi+\omega)=\frac{\sin\frac{1}{2}(\psi+\varphi)\sin(\omega+\varphi)}{\cos\frac{1}{2}(\psi-\varphi)}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega-\varphi)\sin(\psi-\varphi)}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\varphi)}.$$

Combinant cette équation avec la précédente, on aura

$$[\sin(\psi-\varphi)-\sin(\omega+\varphi)]\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\psi+\varphi)}{\cos\frac{1}{2}(\psi-\varphi)}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega-\varphi)}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\varphi)}\right]=0,$$

d'où

$$(36)\qquad \psi-\varphi=\omega+\varphi.$$

φ étant éliminé au moyen de cette équation, l'équation (32) nous donne

$$(37)\qquad \cos\frac{1}{2}(\psi+\omega)=\frac{1}{3}.$$

En combinant encore l'équation (36) avec l'équation (35), on trouve

$$\begin{gathered}[\cos(\psi+\varphi)-\cos(\omega-\varphi)]\\ \times\{2-3[\cos(\psi-\varphi+2\varphi)+\cos(\omega+\varphi-2\varphi)]\}=0.\end{gathered}$$

Ici l'on ne peut pas supposer le premier facteur égal à zéro, et ce sera la même chose par rapport au second ; car, en conséquence des équations (36) et (37), d'où, au reste, nous tirons

$$\cos(\psi-\varphi)=\cos(\omega+\varphi)=\frac{1}{3},$$

ce même facteur se réduit à $1-\cos 2\varphi$, quantité qu'il ne faut pas supposer égale à zéro, vu les conditions établies.

Si, au lieu de supposer $\gamma=0$, on suppose $\gamma=180^\circ$, ce qui produit le même effet que si l'on avait remplacé ψ et ω par $180^\circ-\psi$ et $180^\circ-\omega$ respectivement dans la supposition de $\gamma=0$, on est conduit au même résultat.

Il est donc démontré qu'il n'y a aucun tronc de pyramide triangulaire à volume donné dont la surface remplisse les conditions de minimum, si ce n'est un tronc prismatique.

Si, après avoir différentié les équations (1), (2), (5), (8) et (9), ν étant constant, on élimine dh, $d\gamma'$, $d\gamma''$, $d\eta'$, $d\eta''$ et $d\tau$ entre les équations obtenues, et qu'ensuite on égale à zéro les coefficients de dr, $d\gamma$, $d\eta$, $d\psi$, $d\omega$, $d\tau'$, $d\tau''$ dans l'équation qui résulte, on est conduit aux équations suivantes :

$$\frac{1}{\sin\psi} + \frac{1}{\sin\omega} - \frac{h}{r} = 0, \tag{38}$$

$$\sin\gamma\cos\tau'\cos\tau'' + \sin\gamma'\cos\tau\cos\tau'' + \sin\gamma''\cos\tau\cos\tau' = 0, \tag{39}$$

$$\sin\eta\cos\tau'\cos\tau'' + \sin\eta'\cos\tau\cos\tau'' + \sin\eta''\cos\tau\cos\tau' = 0, \tag{40}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\cos\gamma\cos\tau'\cos\tau'' + \cos\gamma'\cos\tau\cos\tau'' + \cos\gamma''\cos\tau\cos\tau'\\ &\qquad - 3\cos\tau\cos\tau'\cos\tau''\cos\psi = 0,\end{aligned}\right. \tag{41}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\cos\eta\cos\tau'\cos\tau'' + \cos\eta'\cos\tau\cos\tau'' + \cos\eta''\cos\tau\cos\tau'\\ &\qquad + 3\cos\tau\cos\tau'\cos\tau''\cos\omega = 0,\end{aligned}\right. \tag{42}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{3\cos\tau''\sin(\tau'-\tau)}{\sin\tau\sin\tau'\cos\tau\cos\tau'}\left[\frac{1}{\sin\psi} + \frac{1}{\sin\omega} - \frac{h}{r} + \frac{\nu}{r^3\operatorname{tang}\tau\operatorname{tang}\tau'\operatorname{tang}\tau''}\right]\\ &\qquad + \cot\psi\left[\frac{\sin\gamma''}{\cos\tau''} - \frac{\cos\gamma'\sin\tau'}{\cos^2\tau'} + \frac{\cos\gamma\sin\tau}{\cos^2\tau}\right]\\ &\qquad - \cot\omega\left[\frac{\sin\eta''}{\cos\tau''} - \frac{\cos\eta'\sin\tau'}{\cos^2\tau'} + \frac{\cos\eta\sin\tau}{\cos^2\tau}\right] = 0,\end{aligned}\right. \tag{43}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{3\cos\tau'\sin(\tau-\tau'')}{\sin\tau\sin\tau''\cos\tau\cos\tau''}\left[\frac{1}{\sin\psi} + \frac{1}{\sin\omega} - \frac{h}{r} + \frac{\nu}{r^3\operatorname{tang}\tau\operatorname{tang}\tau'\operatorname{tang}\tau''}\right]\\ &\qquad + \cot\psi\left[\frac{\sin\gamma'}{\cos\tau'} + \frac{\cos\gamma\sin\tau}{\cos^2\tau} + \frac{\cos\gamma''\sin\tau''}{\cos^2\tau''}\right]\\ &\qquad - \cot\omega\left[\frac{\sin\eta'}{\cos\tau'} - \frac{\cos\eta\sin\tau}{\cos^2\tau} + \frac{\cos\eta''\sin\tau''}{\cos^2\tau''}\right] = 0,\end{aligned}\right. \tag{44}$$

auxquelles doivent satisfaire les valeurs des éléments qui déterminent le tronc prismatique triangulaire de volume donné, dont la surface est un minimum. Au reste, il faut remarquer que, des équations (39) et (40), nous avons ôté les facteurs $\cot\psi$ et $\cot\omega$ par la même raison pour laquelle ces facteurs ont été introduits dans les équations (13) et (14).

Ajoutant les équations (39) et (41), multipliées respectivement par $-\cos\gamma$ et $\sin\gamma$, ajoutant les mêmes équations multipliées respectivement par $-\cos\gamma'$ et $\sin\gamma'$, par $-\cos\gamma''$ et $\sin\gamma''$, par $\sin\gamma$ et $\cos\gamma$, par $\sin\gamma'$ et $\cos\gamma'$, et enfin par $\sin\gamma''$ et $\cos\gamma''$, on trouve, en ayant égard aux équations (1) et (2),

$$\cos\tau\sin(\tau''-\tau') = 3\sin\gamma\cos\tau'\cos\tau''\cos\psi, \tag{45}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\tau'\sin(\tau-\tau'') = 3\sin\gamma'\cos\tau\cos\tau''\cos\psi,\\ \cos\tau''\sin(\tau'-\tau) = 3\sin\gamma''\cos\tau\cos\tau'\cos\psi,\end{array}\right. \tag{46}$$

$$\cos\tau'\cos\tau''-\cos\tau(\cos^2\tau'+\cos^2\tau'') = 3\cos\gamma\cos\tau\cos\tau'\cos\tau''\cos\psi, \tag{47}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\tau\cos\tau''-\cos\tau'(\cos^2\tau+\cos^2\tau'') = 3\cos\gamma'\cos\tau\cos\tau'\cos\tau''\cos\psi,\\ \cos\tau\cos\tau'-\cos\tau''(\cos^2\tau+\cos^2\tau') = 3\cos\gamma''\cos\tau\cos\tau'\cos\tau''\cos\psi,\end{array}\right. \tag{48}$$

équations qui doivent encore subsister quand on y a changé γ, γ', γ'', ψ en $\eta+180^\circ$, $\eta'+180^\circ$, $\eta''+180^\circ$, ω, ce qui résulte des équations (1), (5), (40), (42). Mais, pour cela, il faut qu'on ait

$$\cos\psi = \cos\omega = 0 \quad \text{et} \quad \tau = \tau' = \tau'' = 60^\circ,$$

ou bien

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\eta} = \frac{\sin\gamma'}{\sin\eta'} = \frac{\sin\gamma''}{\sin\eta''}.$$

En supposant d'abord $\psi = \omega = 90^\circ$, $\tau = \tau' = \tau'' = 60^\circ$, les équations (8) et (38) nous donnent

$$h = 2r = \sqrt[6]{\frac{16v^2}{27}},$$

et l'on voit facilement que toutes les équations de condition sont vérifiées par ces valeurs, indépendamment de γ et η. L'examen de d^2S nous montrerait que la surface de la figure correspondante est un véritable minimum; mais, comme cette vérification n'est pas nécessaire, nous nous en dispensons. La même figure est, au reste, un prisme régulier dont la hauteur est égale au diamètre du cylindre inscrit, et l'on trouve, en exprimant sa surface S′ par son volume,

$$S' = 3\sqrt[6]{108\,V^4}.$$

Supposons maintenant

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\eta} = \frac{\sin\gamma'}{\sin\eta'} = \frac{\sin\gamma''}{\sin\eta''}.$$

En combinant cette analogie avec les équations (1), (2), (5), (38), (41) et (42), nous serons conduit aux relations suivantes :

$$\eta = \gamma \pm 180^\circ,\quad \eta' = \gamma' \pm 180^\circ,\quad \eta'' = \gamma'' \pm 180^\circ,\qquad \omega = \psi,\quad h = \frac{2r}{\sin\psi},$$

où il faut encore prendre en même temps les signes supérieurs ou les signes inférieurs.

Substituant ces valeurs dans les équations (8), (43) et (44), nous trouvons, en réduisant et observant l'équation (41),

$$(49)\qquad v = 2r^3 \operatorname{tang}\tau \operatorname{tang}\tau' \operatorname{tang}\tau'' \sin\psi,$$

$$\frac{3\cos\tau''\sin(\tau'-\tau)\sin\psi}{\sin\tau\sin\tau'\cos\tau\cos\tau'} + \cot\psi\left[\frac{\sin\gamma''}{\cos\tau''} - \frac{\cos\gamma'\sin\tau'}{\cos^2\tau'} + \frac{\cos\gamma\sin\tau}{\cos^2\tau}\right] = 0,$$

$$\frac{3\cos\tau'\sin(\tau-\tau'')\sin\psi}{\sin\tau\sin\tau''\cos\tau\cos\tau''} + \cot\psi\left[\frac{\sin\gamma'}{\cos\tau'} - \frac{\cos\gamma\sin\tau}{\cos^2\tau} + \frac{\cos\gamma''\sin\tau''}{\cos^2\tau''}\right] = 0.$$

Si, à la seconde de ces équations, on ajoute l'équation (39) multipliée par $-\frac{\cot\psi\operatorname{tang}\tau\operatorname{tang}\tau'}{\cos\tau\cos\tau'\cos\tau''}$, et qu'on ajoute la même équation multipliée par $-\frac{\cot\psi\operatorname{tang}\tau\operatorname{tang}\tau''}{\cos\tau\cos\tau'\cos\tau''}$ à la troisième, on trouve, après une transformation bien simple,

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{3\cos\tau''\sin(\tau'-\tau)\sin\psi}{\sin\tau\sin\tau'} &= \cot\psi\left[\sin\gamma'' - \frac{\cos\gamma''\sin(\tau'-\tau)}{\cos\tau\cos\tau'}\right],\\ \frac{3\cos\tau'\sin(\tau-\tau'')\sin\psi}{\sin\tau\sin\tau''} &= \cot\psi\left[\sin\gamma' - \frac{\cos\gamma'\sin(\tau-\tau'')}{\cos\tau\cos\tau''}\right].\end{aligned}\right.$$

Maintenant si l'on élimine ψ entre ces équations, après y avoir substitué les valeurs de $\sin\gamma'$, $\sin\gamma''$, $\cos\gamma'$ et $\cos\gamma''$, qu'on tire des équations (46) et (48), on aura, en réduisant,

$$\sin(\tau-\tau')\sin(\tau-\tau'')\sin(\tau'-\tau'')=0.$$

Il est donc nécessaire que deux des angles τ, τ', τ'' soient égaux. En supposant que ce soient τ' et τ'', l'équation (45) nous donne

$$(51)\qquad \sin\gamma=0;$$

car nous ne pouvons pas avoir $\cos\psi=0$ sans retomber sur la solution déjà trouvée.

De plus, si dans l'équation (50) nous remplaçons $\cos\tau''\sin(\tau'-\tau)$ par la valeur que donne la seconde des équations (46), et si ensuite nous restituons la valeur de γ'', nous trouvons, au lieu des équations (47) et (50),

$$1-2\cos\tau=3\cos\gamma\cos\tau\cos\psi,\qquad 9\sin^2\psi=\operatorname{tang}^2\tau.$$

Combinant ces équations avec l'équation (51), nous trouvons

$$\gamma=0,\qquad \cos\psi=\cos\tau=\frac{1}{3},$$

et enfin les équations (1) et (49) nous donnent

$$\cos^2\tau'=\frac{1}{3},\qquad r=\frac{\sqrt[3]{6V}}{4}.$$

Il y aura donc encore un système de valeurs pour lequel toutes les équations de condition seront satisfaites; mais, en examinant la figure correspondante, nous trouvons que c'est une pyramide; et, puisqu'il en est ainsi, nous n'avons pas à nous en occuper davantage.

Le prisme nouvellement déterminé est donc, entre tous les troncs de pyramides triangulaires, à volume égal, le seul qui puisse avoir une surface minimum. Comparant la surface s' du même prisme avec celle S' de la pyramide dont nous avons parlé au commencement, nous trouvons, en supposant les volumes égaux,

$$s'<S'.$$

Le prisme régulier dont la hauteur équivaut au diamètre du cylindre inscrit est donc la figure que nous nous sommes proposé de trouver.

Note de M. Catalan. — Le résultat obtenu par M. Sucksdorff est d'accord avec ce théorème que j'ai entendu énoncer autrefois (par M. Steiner, ce me semble) : *Parmi tous les polyèdres de même espèce et équivalents en surface, le plus grand est celui qui est circonscriptible à une sphère, et dans lequel les points de contact des faces sont les centres de gravité de ces faces.*