JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOURGET

Note sur l'attraction des paraboloïdes elliptiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 81-90.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__81_0>

NOTE

SUR

L'ATTRACTION DES PARABOLOIDES ELLIPTIQUES;

Par M. J. BOURGET,

Professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand.

On sait avec quelle élégance M. Chasles a résolu le problème de l'attraction des ellipsoïdes en se servant des propriétés des *points correspondants*, introduits par Ivory dans cette question. Je vais montrer que cette solution peut être facilement appliquée à l'attraction d'une couche de matière homogène comprise entre deux paraboloïdes.

Plusieurs théorèmes de cette Note se vérifient exactement comme leurs analogues du Mémoire de M. Chasles. Je me bornerai à les énoncer.

I.

Soit un paraboloïde elliptïque A, soient S son sommet, et Sx son axe principal. Si tous les points décrivent des droites parallèles à l'axe, et par suite égales entre elles, le paraboloïde primitif se transporte dans une nouvelle position. En le comparant au premier, je l'appellerai *isothétique*. La distance ω des sommets sera la distance des paraboloïdes.

Soit O l'origine des coordonnées rectangulaires sur l'axe principal; si les plans xy, xz sont *principaux*, l'équation d'un paraboloïde sera

$$(1) \qquad x + \varepsilon = \frac{y^2}{2p + 4\varepsilon} + \frac{z^2}{2q + 4\varepsilon},$$

en désignant par

$$\frac{p}{2}, \quad \frac{q}{2}$$

les distances à l'origine des deux foyers des paraboles principales obtenues en faisant dans l'équation (1) successivement

$$z = 0, \quad y = 0.$$

Si nous faisons varier ε, nous aurons une suite de paraboloïdes que nous appellerons *homofocaux*. Celui dont le sommet est à l'origine aura pour équation

$$(2) \qquad x = \frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q},$$

et tant que ε varie positivement, les autres lui sont extérieurs.

Soient actuellement

$$x, \; y, \; z, \quad x', \; y' \; z'$$

les coordonnées de deux points de l'espace, liées par les équations

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x + \varepsilon = x' + \varepsilon' \\ & \frac{y}{\sqrt{2p + 4\varepsilon}} = \frac{y'}{\sqrt{2p + 4\varepsilon'}}, \\ & \frac{z}{\sqrt{2q + 4\varepsilon}} = \frac{z'}{\sqrt{2q + 4\varepsilon'}}. \end{aligned} \right.$$

Nous nommerons ces deux points *correspondants*. A une surface quelconque correspond ainsi une autre surface.

THÉORÈME I. — *A deux paraboloïdes isothétiques correspondent deux autres paraboloïdes isothétiques.*

En effet, soient deux paraboloïdes isothétiques A et B, soit ω leur distance; ils auront respectivement pour équations

$$(\mathrm{A}) \qquad x + \varepsilon = \frac{y^2}{2p + 4\varepsilon} + \frac{z^2}{2q + 4\varepsilon},$$

$$(\mathrm{B}) \qquad x + \varepsilon - \omega = \frac{y^2}{2p + 4\varepsilon} + \frac{z^2}{2q + 4\varepsilon}.$$

En vertu des formules (3), à ces deux surfaces correspondront

$$(\mathrm{A}') \qquad x' + \varepsilon' = \frac{y'^2}{2p + 4\varepsilon'} + \frac{z'^2}{2q + 4\varepsilon'},$$

$$(\mathrm{B}') \qquad x' + \varepsilon' - \omega = \frac{y'^2}{2p + 4\varepsilon'} + \frac{z'^2}{2q + 4\varepsilon'};$$

ce qui démontre le théorème énoncé. On voit encore que le paraboloïde correspondant est homofocal, et que la distance des paraboloïdes A′ et B′ est la même que celle des surfaces A et B.

Il y a plus : chaque point de la première couche a son correspondant dans la seconde ; nous désignerons ces couches par les lettres C, C′.

Théorème II. — *Soient* A *et* A′ *deux paraboloïdes correspondants ou homofocaux,* S *et* S′ *deux points quelconques sur* A, *m et m′ leurs correspondants sur* A′ : *on a*

$$Sm' = S'm.$$

Théorème III. — *Soient* A *et* B *deux paraboloïdes isothétiques : les deux parties d'une sécante quelconque comprises dans la couche sont égales entre elles.*

Théorème IV. — *Si dans deux couches correspondantes* C *et* C′ *on prend deux portions de volume correspondantes* φ *et* φ', *on a*

$$\varphi : \varphi' :: \sqrt{(2p + 4\varepsilon)(2q + 4\varepsilon)} : \sqrt{(2p + 4\varepsilon')(2q + 4\varepsilon')}.$$

En effet, des relations (3) on tire

$$dx = dx',$$
$$\frac{dy}{\sqrt{2p + 4\varepsilon}} = \frac{dy'}{\sqrt{2p + 4\varepsilon'}},$$
$$\frac{dz}{\sqrt{2q + 4\varepsilon}} = \frac{dy'}{\sqrt{2q + 4\varepsilon'}},$$

par suite,

$$dxdydz : dx'dy'dz' :: \sqrt{(2p + 4\varepsilon)(2q + 4\varepsilon)} : \sqrt{(2p + 4\varepsilon')(2q + 4\varepsilon')}.$$

De là on déduit le théorème énoncé, par une sommation d'éléments correspondants.

Théorème V. — *Soient* C, C′ *deux couches homogènes correspondantes comprises chacune entre deux paraboloïdes isothétiques infiniment voisins. Soient* V *le potentiel de la couche* C *par rapport à un point*

S′ pris sur la surface externe de C′, et V′ le potentiel de C′ par rapport au point S correspondant de S′ sur la surface externe de C : on aura

$$V : V' :: \sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)} : \sqrt{(2p+4\varepsilon')(2q+4\varepsilon')}.$$

J'appelle avec Gauss *potentiel d'un corps par rapport à un point*, la somme de tous les résultats qu'on obtient en divisant chacun des éléments de volume du corps par sa distance au point.

THÉORÈME VI. — *Le potentiel d'une couche infiniment mince par rapport à un point intérieur est constant, quel que soit ce point.*

THÉORÈME VII. — *Les potentiels des deux couches C et C′ relatifs à un même point extérieur sont entre eux dans le rapport*

$$\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)} : \sqrt{(2p+4\varepsilon')(2q+4\varepsilon')}.$$

THÉORÈME VIII. — *Les composantes de l'attraction d'un corps sur un point S (α, β, γ) sont les dérivées du potentiel par rapport aux coordonnées du point S, multipliées par la densité du corps homogène, la masse μ du point S et l'action f de l'unité de masse à l'unité de distance.*

Ce théorème général est bien connu.

THÉORÈME IX. — *Une couche homogène comprise entre deux paraboloïdes isothétiques infiniment voisins, n'exerce aucune action sur un point intérieur.*

Ce théorème résulte immédiatement des théorèmes VIII et VI. Il serait vrai pour une couche finie hétérogène, décomposable en couches homogènes infiniment minces.

THÉORÈME X. — *L'attraction d'une couche infiniment mince comprise entre deux paraboloïdes isothétiques, sur un point extérieur, est dirigée suivant la normale au paraboloïde passant par ce point, et correspondant à la surface externe de la couche attirante.*

Ce théorème est encore vrai, si le point est sur la surface extérieure de la couche attirante.

THÉORÈME XI. — *Soient C et C′ deux couches correspondantes, et S* *un point extérieur : leurs actions sur ce point sont dans le rapport*

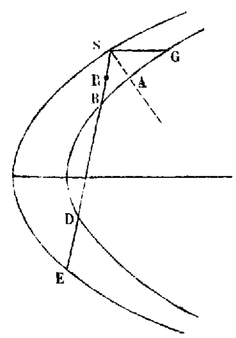
$$\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)} : \sqrt{(2p+4\varepsilon')(2q+4\varepsilon')}.$$

Les composantes homologues des actions totales sont aussi dans le même rapport. Ce théorème ramène la recherche de l'attraction d'une couche infiniment mince sur un point extérieur, à celle d'une couche de même matière correspondante, et dont la surface externe passe par le point.

II.

Problème 1. — *Trouver l'attraction sur un point de sa surface externe d'une couche paraboloïdale infiniment mince, comprise entre deux paraboloïdes isothétiques.*

Soit ω la distance des deux paraboloïdes. Menons par le point S la ligne SA perpendiculaire à la surface externe; cette ligne sera aussi normale à la surface interne infiniment voisine. Menons $SG = \omega$ parallèle à l'axe. Soit μ la masse du point S.



Pour trouver l'action de la couche sur S, j'imagine que ce point soit le sommet de cônes infiniment petits d'ouverture, interceptant sur une sphère de rayon 1, décrite du point S, une portion σ de surface infiniment petite par rapport à SA. Soit SBDE la génératrice de l'un de ces cônes : appelons r la distance SR. L'élément de volume de ce cône en R sera

$$r^2\sigma\,dr;$$

son action sur S sera

$$\mu \mathrm{f}\rho\sigma\,dr,$$

ρ désignant la densité de la couche, et f l'action de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance. Nous aurons l'action totale de la masse interceptée dans le cône en intégrant par rapport à r de o à SB, puis de SD à SE; mais SB = DE, donc le résultat de cette opération sera

$$2\mu \mathrm{f}\rho\sigma\,.\overline{\mathrm{SB}}.$$

Nous avons prouvé que l'action totale F est dirigée suivant SA, donc il nous suffit de considérer suivant cette ligne la composante de l'action précédente. Elle est

$$2\mu f\rho\sigma . \mathrm{SB}\cos\widehat{\mathrm{BSA}},$$

ou

$$2\mu f\rho\sigma . \mathrm{SA}.$$

L'action totale s'obtiendra en intégrant par rapport à tous les éléments σ, ce qui donne la demi-sphère 2π, et par suite

$$\mathrm{F} = 4\pi\mu f\rho . \overline{\mathrm{SA}}.$$

Le triangle rectangle SAG donne

$$\mathrm{SA} = \omega . \cos \mathrm{ASG},$$

et ASG est l'angle de la normale avec l'axe des x; donc enfin

$$(4) \qquad \mathrm{F} = \frac{4\pi\mu f\rho\omega}{\sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{(2p+4\varepsilon)^2} + \frac{4\gamma^2}{(2q+4\varepsilon)^2}}}:$$

α, β, γ sont les coordonnées du point S, pris sur la surface dont ε est le paramètre.

PROBLÈME 2. — *Trouver l'attraction d'une couche paraboloïdale sur un point extérieur.*

Soit C la couche attirante comprise entre deux paraboloïdes isothétiques infiniment voisins A et B; soit S′ le point attiré dont la masse est μ, et dont les coordonnées sont α, β, γ. Par ce point, faisons passer un paraboloïde A′ correspondant à A, et qui soit la surface externe d'une couche C′ correspondante à la couche C. Soit F′ l'attraction qu'elle exerce sur S′, et F l'attraction que C exerce sur ce même point. Ces deux forces ont la même direction; d'ailleurs, d'après le théorème XI, si les paraboloïdes externes A et A′ ont pour équations

$$(\mathrm{A}) \qquad x - k = \frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q},$$

$$(\mathrm{A}') \qquad x - k + \varepsilon = \frac{y^2}{2p+4\varepsilon} + \frac{z^2}{2q+4\varepsilon},$$

ε étant déterminé par l'équation

$$(5)\qquad \alpha - k + \varepsilon = \frac{\beta^2}{2p+4\varepsilon} + \frac{\gamma^2}{2q+4\varepsilon},$$

on a

$$\mathrm{F} : \mathrm{F}' :: \sqrt{4pq} : \sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)},$$

donc

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{F}'\sqrt{4pq}}{\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}}:$$

d'ailleurs

$$\mathrm{F}' = \frac{4\pi\mu\mathrm{f}\rho\omega}{\sqrt{1+\frac{4\beta^2}{(2p+4\varepsilon)^2}+\frac{4\gamma^2}{(2q+4\varepsilon)^2}}};$$

donc enfin l'attraction de la couche C sur le point S′ est donnée par

$$(6)\qquad \mathrm{F} = \frac{4\pi\mu\mathrm{f}\rho\omega\sqrt{4pq}}{\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}\sqrt{1+\frac{4\beta^2}{(2p+4\varepsilon)^2}+\frac{4\gamma^2}{(2q+4\varepsilon)^2}}}.$$

Nous poserons, pour abréger,

$$(7)\qquad \varpi = 1 + \frac{4\beta^2}{(2p+4\varepsilon)^2} + \frac{4\gamma^2}{(2q+4\varepsilon)^2}:$$

donc

$$(8)\qquad \mathrm{F} = \frac{4\pi\mu\mathrm{f}\rho\omega\sqrt{4pq}}{\sqrt{\varpi}\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}}.$$

Cette force est normale au paraboloïde A′; donc, en cherchant les cosinus des angles l, m, n que la normale fait avec les axes, nous aurons les cosinus des angles de cette force avec les axes. Or

$$\frac{\cos l}{-1} = \frac{\cos m}{\frac{2\beta}{2p+4\varepsilon}} = \frac{\cos n}{\frac{2\gamma}{2q+4\varepsilon}} = \frac{-1}{\sqrt{\varpi}}.$$

De là nous concluons immédiatement pour les composantes X, Y, Z de la force F :

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{4\pi\rho\mu f\omega\sqrt{4pq}}{\varpi\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}},\\ Y &= -\frac{8\pi\rho\mu f\omega\beta\sqrt{4pq}}{\varpi(2p+4\varepsilon)\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}},\\ Z &= -\frac{8\pi\rho\mu f\omega\gamma\sqrt{4pq}}{\varpi(2q+4\varepsilon)\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}}. \end{aligned}\right.$$

Remarque. — Nous pouvons donner à ces composantes une autre forme. En vertu de l'équation

$$\alpha - k + \varepsilon = \frac{\beta^2}{2p+4\varepsilon} + \frac{\gamma^2}{2q+4\varepsilon},$$

k et ε sont fonctions l'un de l'autre. Faisons varier k de ω, ε variera de $d\varepsilon$, et l'on aura

$$\varpi\, d\varepsilon = \omega;$$

donc, en remplaçant ω par cette valeur dans les équations (9), elles deviendront

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{4\pi\rho\mu f\sqrt{4pq}}{\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}}\,d\varepsilon,\\ Y &= -\frac{8\pi\rho\mu f\beta\sqrt{2pq}}{(2p+4\varepsilon)\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}}\,d\varepsilon,\\ Z &= -\frac{8\pi\rho\mu f\gamma\sqrt{4pq}}{(2q+4\varepsilon)\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}}\,d\varepsilon. \end{aligned}\right.$$

Problème 3. — *Trouver l'attraction sur un point extérieur d'une couche finie comprise entre deux paraboloïdes isothétiques et formée de couches isothétiques homogènes.*

Supposons la densité ρ une fonction quelconque de k donnée par

$$(11)\qquad \rho = F(k) = F\left(\alpha + \varepsilon - \frac{\beta^2}{2p+4\varepsilon} - \frac{\gamma^2}{2q+4\varepsilon}\right),$$

et intégrons les composantes (10) depuis la valeur ε_0 qui correspond à $k = 0$, et qui est donnée par

$$(12) \qquad \alpha + \varepsilon_0 = \frac{\beta^2}{2p + 4\varepsilon_0} + \frac{\gamma^2}{2q + 4\varepsilon_0},$$

jusqu'à une autre valeur de ε, correspondante à la dernière valeur de k. Les composantes de l'attraction totale seront

$$\begin{aligned} U &= \quad 4\pi\mu f \sqrt{4pq} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{\rho\, d\varepsilon}{\sqrt{(2p + 4\varepsilon)(2q + 4\varepsilon)}}, \\ V &= - 8\pi\mu f \beta \sqrt{4pq} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{\rho\, d\varepsilon}{(2p + 4\varepsilon)\sqrt{(2p + 4\varepsilon)(2q + 4\varepsilon)}}, \\ W &= - 8\pi\mu f \gamma \sqrt{4pq} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{\rho\, d\varepsilon}{(2q + 4\varepsilon)\sqrt{(2p + 4\varepsilon)(2q + 4\varepsilon)}}. \end{aligned}$$

On voit que, dans le cas d'une couche homogène, ces quadratures ne dépendent pas des fonctions elliptiques et peuvent s'effectuer.

III.

La question de l'attraction des paraboloïdes elliptiques est entièrement résolue par les formules qui précèdent; mais on peut se proposer de trouver le potentiel d'une couche infiniment mince relativement à un point extérieur. On arrive alors aux théorèmes suivants :

Théorème XII. — *Le potentiel d'une couche infiniment mince formée par deux paraboloïdes isothétiques relativement à un point extérieur est infini.*

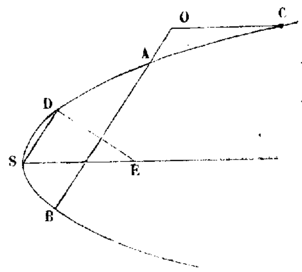
Ce théorème se vérifie aisément.

Bien que $V = \infty$, les diviseurs n'en représentent pas moins les composantes de l'attraction (Duhamel, *Traité de Mécanique*).

Théorème XIII. — *Le potentiel d'une couche infiniment mince formée par deux paraboloïdes isothétiques relativement à un point intérieur, dépend d'une transcendante elliptique de première espèce.*

On peut aussi aborder le problème de l'attraction d'une couche paraboloïdale en suivant une marche analogue à celle que M. Chasles a suivie pour les ellipsoïdes dans un Mémoire inséré au *Journal de l'École Polytechnique*. C'est ce que j'ai montré dans une Thèse présentée à la Faculté de Paris en 1852. Le théorème fondamental de cette autre théorie est le suivant, que je crois nouveau :

THÉORÈME XIV. — *Par un point* O, *menons une sécante* OAB *à un paraboloïde; par le sommet* S *imaginons une parallèle* SD; *par son extrémité* D, *menons un plan perpendiculaire à* SD, *qui rencontre l'axe en* E; *menons enfin par le point* O *une parallèle à l'axe qui rencontre en* C *le paraboloïde.*



Nous aurons

$$OA \cdot OB = OC \cdot SE \ [*].$$

[*] Si l'on suppose un hyperboloïde à deux nappes agissant sur un point matériel de manière à l'attirer par une de ses nappes et à le repousser par l'autre suivant la loi newtonienne, on étendra plus facilement encore à ce système les théorèmes de M. Chasles.