JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LEJEUNE-DIRICHLET

Sur une nouvelle formule pour la détermination de la densité d'une couche sphérique infiniment mince, quand la valeur du potentiel de cette couche est donnée en chaque point de la surface

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 57-80.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__57_0>

SUR UNE NOUVELLE FORMULE POUR LA DÉTERMINATION DE LA DENSITÉ D'UNE COUCHE SPHÉRIQUE INFINIMENT MINCE, QUAND LA VALEUR DU POTENTIEL DE CETTE COUCHE EST DONNÉE EN CHAQUE POINT DE LA SURFACE;

PAR M. LEJEUNE-DIRICHLET.

(Lu à l'Académie des Sciences de Berlin le 28 novembre 1850.)

TRADUIT DE L'ALLEMAND PAR M. JULES HOÜEL.

D'après un beau théorème, énoncé et démontré pour la première fois par Gauss [*], on peut couvrir une surface quelconque d'une couche de matière infiniment mince, dont le potentiel ait en chaque point une valeur donnée arbitrairement, pourvu que cette valeur varie d'une manière continue sur toute l'étendue de la surface. Mais les moyens d'effectuer cette distribution de la masse ne sont praticables, dans l'état actuel de la science, que pour quelques surfaces particulières, parmi lesquelles, comme Gauss l'a déjà remarqué, se trouve la surface totale de la sphère.

Soient R le rayon de la sphère, r la distance d'un point quelconque de l'espace au centre de cette sphère, θ l'angle du rayon vecteur r avec une droite fixe, φ l'angle dièdre compris entre le plan mené par cette droite et par r, et un certain plan fixe. La valeur V du potentiel, donnée sur toute l'étendue de la surface en fonction de θ et de φ, pourra se développer au moyen des fonctions connues sous le nom de *fonctions sphériques*. Soit

$$V = \sum X_n$$

[*] *Théorèmes généraux sur les forces attractives et répulsives agissant en raison inverse du carré de la distance*, par C.-F. Gauss.

ce développement, le signe sommatoire s'étendant depuis $n = 0$ jusqu'à $n = \infty$, et soit

$$\rho = \sum Y_n$$

le développement analogue de la densité ρ que l'on se propose de déterminer. On peut, au moyen de ce dernier développement, exprimer le potentiel v relatif à un point quelconque de l'espace [*]. Des deux expressions de ce potentiel, qui se rapportent, l'une à l'espace intérieur, l'autre à l'espace extérieur à la couche, et qui conviennent toutes les deux à l'objet que nous avons en vue, la première est

$$v = 4\pi R \sum \frac{1}{2n+1} \left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n.$$

Cette formule étant vraie jusqu'à la valeur $r = R$, pour laquelle v se change en V, et cette dernière quantité n'étant développable que d'une seule manière en fonctions sphériques, la comparaison avec la première série donne

$$Y_n = \frac{2n+1}{4\pi R} X_n,$$

et, par conséquent,

$$\rho = \frac{1}{4\pi R} \sum (2n+1) X_n.$$

Dans un précédent Mémoire [**], j'ai montré que toute fonction donnée arbitrairement pour toute la surface de la sphère, c'est-à-dire depuis $\theta = 0$, $\varphi = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$, $\varphi = 2\pi$, pourvu qu'elle ne devienne jamais infinie, pourra toujours être développée en une série convergente de fonctions sphériques. Le développement de V en série, sur lequel est fondée la solution que nous venons d'indiquer, est donc sans aucun doute convergent. Mais il n'en est plus de même pour la série $\sum Y_n$, que nous avons prise pour représenter la densité ρ, et que nous avons ensuite déterminée par comparaison avec la première. Comme

---

[*] *Mécanique céleste*, livre III, n° 13.

[**] Sur les séries dont le terme général, etc., *Journal de Crelle*, tome XVII.

l'existence d'une distribution complétement déterminée de la masse, correspondant à la valeur donnée du potentiel V, n'est pas incompatible avec la supposition que la densité devienne infinie en certains points ou suivant certaines lignes, il en résulte, toutes les fois que cela a lieu, qu'on n'est plus en droit de décider si, pour tous les points où la densité reste finie, la série conserve sa convergence et représente réellement la densité. Il m'a paru assez intéressant de soumettre cette question à une discussion plus approfondie, mon premier Mémoire contenant déjà les procédés dont on peut avoir besoin; d'autant plus que l'on pouvait s'attendre à tirer de ces recherches un moyen de simplifier l'expression que nous venons de trouver pour ρ. Cette expression indique quatre opérations infinies, une double sommation et une double intégration. Il est aisé de voir que l'on ne peut pas débarrasser l'expression générale de ρ de la double intégration; car la densité en chaque point dépend nécessairement de toutes les valeurs que l'on peut donner arbitrairement au potentiel sur toute l'étendue de la surface en satisfaisant à la condition de continuité. Mais il arrive, au contraire, que la densité peut toujours être représentée, avec un nombre *fini* de termes, par une intégrale double, qui dans plusieurs cas se ramène à une intégrale simple.

§ I.

Si l'on pose

$$V = f(\theta, \varphi),$$

on aura, comme on sait, pour la valeur du terme général X_n,

$$\frac{2n+1}{4\pi} \int\int f(\theta', \varphi') P_n(\cos\omega) \sin\theta' d\theta' d\varphi',$$

en faisant

$$\cos\omega = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi'),$$

et désignant par $P_n(\cos\omega)$ le coefficient de α^n dans le développement de l'expression radicale

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos\omega + \alpha^2}}.$$

La double intégration s'étend depuis $\theta' = 0$, $\varphi' = 0$ jusqu'à $\theta' = \pi$, $\varphi' = 2\pi$. En négligeant le diviseur R, ou, ce qui revient au même, en prenant le rayon de la sphère égal à l'unité, le terme général de la série qui représente ρ devient

$$\frac{(2n+1)^2}{(4\pi)^2} \int\int f(\theta', \varphi')\, P_n(\cos\omega) \sin\theta' d\theta' d\varphi'.$$

Il suffira évidemment d'examiner cette série pour le cas où l'on fera $\theta = 0$, c'est-à-dire pour le pôle p des coordonnées polaires sphériques θ, φ; car, comme dans mon premier Mémoire, le résultat trouvé pour le point p peut être étendu immédiatement à tout autre point m de la surface. On a alors

$$\cos\omega = \cos\theta',$$

et $P_n(\cos\omega)$ ne dépend plus de φ'. Posons

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta', \varphi')\, d\varphi' = F(\theta'),$$

de sorte que $F(\theta')$ désigne la valeur moyenne du potentiel V sur le cercle décrit du point p comme pôle, avec le rayon sphérique θ'; écrivons aussi γ à la place de θ', pour nous conformer aux notations du premier Mémoire, auquel nous aurons souvent occasion de renvoyer. Le terme général deviendra

$$\frac{(2n+1)^2}{8\pi} \int_0^{\pi} F(\gamma)\, P_n(\cos\gamma) \sin\gamma\, d\gamma.$$

Décomposant $(2n+1)^2$ dans ses différents termes $4n^2$, $4n$, 1, le terme général se partagera en trois autres, et, par suite, la série en trois séries partielles. La convergence de la seconde et de la troisième de ces séries ayant déjà été démontrée dans le premier Mémoire, nous n'avons plus à nous occuper que de la première, qui a pour terme général

$$\frac{1}{2\pi} n^2 \int_0^{\pi} F(\gamma)\, P_n(\cos\gamma) \sin\gamma\, d\gamma.$$

Prenons la somme des $n+1$ premiers termes; exprimons, au moyen de l'équation (3) du premier Mémoire, $P_n(\cos\gamma)$ par une intégrale définie, et intervertissons ensuite l'ordre des intégrations : il viendra

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi (\cos\psi + 4\cos 2\psi + \ldots + n^2\cos n\psi)\,\Pi(\psi)\,d\psi,$$

en faisant toujours

$$\Pi(\psi) = \sin\frac{\psi}{2}\int_0^\psi F(\gamma)\sin\gamma\,\frac{d\gamma}{\Delta} + \cos\frac{\psi}{2}\int_\psi^\pi F(\gamma)\sin\gamma\,\frac{d\gamma}{E},$$

$$\Delta = \sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)},\qquad E = \sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}.$$

Puisque les intégrales qui entrent dans $\Pi(\psi)$ sont toujours des fonctions continues de ψ, depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = \pi$ (premier Mémoire, § III), la fonction $\Pi(\psi)$ doit jouir elle-même de la même propriété. La question que nous traitons exige en outre la discussion du quotient différentiel $\Pi'(\psi)$; pour la formation de ce quotient, la présence des dénominateurs Δ, E dans les intégrales exige une transformation préalable au moyen de l'intégration par parties. En remarquant que la fonction $F(\gamma)$, d'après la manière dont elle provient de la valeur continue du potentiel $f(\theta, \varphi)$, doit elle-même être continue, on trouve, par cette double opération,

$$\begin{aligned}\Pi'(\psi) &= [F(0) - F(\pi)]\sin\psi\\ &\quad + \frac{1}{2}\cos\frac{\psi}{2}\int_0^\psi F'(\gamma)\,\Delta\,d\gamma + \frac{1}{2}\sin\frac{\psi}{2}\int_\psi^\pi F'(\gamma)\,E\,d\gamma\\ &\quad + \sin\frac{\psi}{2}\sin\psi\int_0^\psi F'(\gamma)\frac{d\gamma}{\Delta} + \cos\frac{\psi}{2}\sin\psi\int_\psi^\pi F'(\gamma)\frac{d\gamma}{E}.\end{aligned}$$

Admettons maintenant que $F'(\gamma)$ reste toujours finie depuis $\gamma = 0$ jusqu'à $\gamma = \pi$. Alors chacun des termes de $\Pi'(\psi)$, et par suite $\Pi'(\psi)$ elle-même, seront finis et continus depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = \pi$. Cela est évident pour les trois premiers termes, et quant aux deux derniers, on peut se convaincre, par des considérations tout à fait semblables à celles que nous avons employées dans le premier Mémoire, que les intégrales qu'ils renferment conserveront cette double propriété tant que l'on supposera dans la première $\psi < \pi$, et dans la seconde $\psi > 0$. Pour $\psi = \pi$ et $\psi = 0$ respectivement, ces intégrales prennent, il est vrai, des valeurs infinies; mais les ordres de ces valeurs, comme on peut le voir facilement, ne peuvent respectivement dépasser ceux de $\log\left(\dfrac{1}{\cos\frac{\psi}{2}}\right)$ et de $\log\left(\dfrac{1}{\sin\frac{\psi}{2}}\right)$, de sorte que les termes eux-mêmes seront nuls.

La suite de ce travail exige encore que l'on connaisse la valeur de la seconde dérivée $\Pi''(\psi)$ pour $\psi = 0$. En remarquant que $\Pi'(0) = 0$, on trouvera facilement la valeur cherchée en supposant ψ infiniment petit dans le rapport $\frac{1}{\psi}\Pi'(\psi)$. On a ainsi

$$\Pi''(0) = F(0) - F(\pi) + \frac{1}{2}\int_0^\pi F'(\gamma)\sin\frac{\gamma}{2}\,d\gamma + \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{F'(\gamma)\,d\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}},$$

ou, en intégrant par parties le troisième terme,

$$\Pi''(0) = F(0) - \frac{1}{2}F(\pi) - \frac{1}{4}\int_0^\pi F(\gamma)\cos\frac{\gamma}{2}\,d\gamma + \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{F'(\gamma)\,d\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Si l'on suppose non-seulement, comme on l'a fait jusqu'ici, que $F'(\gamma)$ reste finie, d'où résulte la continuité de $\Pi'(\psi)$, mais encore que $\Pi''(0)$ est finie, ou, ce qui revient au même, que la seconde intégrale l'est aussi, alors notre série sera toujours convergente, et l'on pourra facilement en déterminer la somme. En posant, pour abréger,

$$X(\psi) = \frac{\sin(2n+1)\frac{\psi}{2}}{2\sin\frac{\psi}{2}} = \frac{1}{2} + \cos\psi + \cos 2\psi + \ldots + \cos n\psi,$$

l'expression précédente de la somme des $n+1$ premiers termes devient

$$-\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi \Pi(\psi)\,X''(\psi)\,d\psi.$$

En intégrant deux fois de suite par parties, et remarquant que le terme

$\Pi(\psi)X'(\psi) - \Pi'(\psi)X(\psi)$, provenant de cette double opération, est continu et s'évanouit aux deux limites, on obtient l'expression

$$-\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi \Pi''(\psi)\,\frac{\sin(2n+1)\frac{\psi}{2}}{2\sin\frac{\psi}{2}}\,d\psi,$$

qui, par un théorème connu, et lors même que $\Pi''(\psi)$ devient infinie pour une ou plusieurs valeurs de ψ différentes de zéro, converge, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2\pi}\Pi''(o) = &-\frac{1}{2\pi}F(o) + \frac{1}{4\pi}F(\pi)\\ &+\frac{1}{8\pi}\int_0^\pi F(\gamma)\cos\frac{\gamma}{2}\,d\gamma - \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \frac{F'(\gamma)\,d\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}}.\end{aligned}$$

Ajoutant à cette valeur celles des autres séries, calculées dans le premier Mémoire, il vient, pour la densité au point p,

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\left[F(\pi) - \int_0^\pi \frac{F'(\gamma)}{\sin\frac{\gamma}{2}}\,d\gamma\right].$$

Il resterait encore à examiner ce que devient la convergence de la série qui exprime la densité, dans le cas où l'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{F'(\gamma)}{\sin\frac{\gamma}{2}}\,d\gamma,$$

et par suite aussi l'expression que nous venons de trouver pour ρ, conservent toujours des valeurs déterminées et finies, tandis que la fonction $F'(\gamma)$ devient infinie pour une ou plusieurs valeurs de γ différentes de zéro. D'après ce qui précède, la condition de convergence se réduit alors simplement à ce que la fonction $\Pi'(\psi)$, déduite de $F'(\gamma)$, reste finie et continue depuis $\psi = o$ jusqu'à $\psi = \pi$. Or, en examinant attentivement la manière dont se forme $\Pi'(\psi)$, on voit que, si toutes les valeurs c pour lesquelles $F'(\gamma)$ devient infinie, sont telles que, pour ε infiniment petit, $F'(c \pm \varepsilon)\sqrt{\varepsilon}$ soit aussi infiniment petit, la continuité de $\Pi'(\psi)$ aura lieu comme dans le cas considéré plus haut, où la fonction $F'(\gamma)$ était toujours finie, et elle entraînera la convergence de la série qui représente la densité ; et qu'au contraire la série est généralement divergente lorsque la condition dont nous venons de parler n'est plus remplie. Bien que la démonstration de ces énoncés n'offre aucune difficulté sérieuse, sa longueur et le peu d'intérêt qu'elle offre m'empêchent de la présenter ici. Il suffit, pour pouvoir faire usage de la série avec sécurité, de connaître, d'après ce qui précède, les cas qui peuvent *seuls* lui faire perdre sa convergence. Nous trouverons d'ailleurs plus loin l'occasion de montrer sur un exemple extrêmement simple un cas réel de divergence de l'espèce de ceux que nous venons de signaler.

§ II.

Les raisonnements par lesquels nous avons établi l'expression finie de ρ dans l'article précédent, n'étant plus applicables lorsque la série cesse d'être convergente, il faut donner une démonstration de cette formule qui convienne à tous les cas.

D'après une proposition connue, le quotient différentiel $\frac{dv}{dr}$, en y considérant θ et φ comme constants et r comme tendant vers l'unité, converge vers deux limites différentes, suivant que l'on y suppose r constamment < 1 ou constamment > 1. Désignons respectivement par K et L ces deux limites; la densité au point correspondant de la surface sera déterminée par l'équation

$$\rho = \frac{1}{4\pi}(K - L).$$

Les limites K, L et la valeur V du potentiel sur la surface sont liées par une relation simple qui permet de se borner à la recherche d'une seule de ces limites. Soient, en effet, v et v_1 les potentiels pour deux points situés sur le même rayon vecteur, et dont les distances r, r_1 au centre satisfont à l'équation

$$rr_1 = 1.$$

Il est facile de voir que l'on a

$$v_1 = \frac{1}{r_1} v,$$

et, par suite,

$$\frac{dv_1}{dr_1} = -\frac{1}{r_1^2} v + \frac{1}{r_1} \cdot \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dr_1} = -\frac{1}{r_1^2} v - \frac{1}{r_1^3} \cdot \frac{dv}{dr},$$

d'où il résulte

$$L = -V - K \quad \text{et} \quad \rho = \frac{1}{4\pi}(V + 2K).$$

Il suffit, pour déterminer K, d'avoir égard à la formule qui donne v pour un point intérieur :

$$v = \frac{(1 - r^2)}{4\pi} \int\int \frac{f(\theta', \varphi') \sin\theta' d\theta' d\varphi'}{(1 - 2r\cos\omega + r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

formule que l'on peut aisément démontrer sans se servir du développement en série. Pour cela, on remarquera seulement que cette expression, lorsque r y converge vers sa limite supérieure 1, se change, d'après une proposition bien connue, en

$$f(\theta, \varphi) = V,$$

et qu'elle satisfait d'autre part à l'équation aux différentielles partielles que Laplace a le premier démontrée pour v; car l'expression

$$\frac{(1 - r^2)}{(1 - 2r\cos\omega + r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

considérée comme fonction des coordonnées polaires r, θ, φ, est une intégrale particulière de cette équation. Dans le cas où $\theta = 0$, en écrivant alors γ au lieu de θ', et conservant les notations ci-dessus, l'expression prendra cette forme simple,

$$v = \frac{1}{2}(1 - r^2) \int_0^\pi \frac{F(\gamma) \sin\gamma\, d\gamma}{(1 - 2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on différentiait l'expression sous cette forme, il serait difficile de déterminer la valeur limite de $\frac{dv}{dr}$; mais on y réussit en lui faisant subir d'abord une intégration par parties, ce qui donne

$$2v = \left(\frac{1}{r} + 1\right) F(0) - \left(\frac{1}{r} - 1\right) F(\pi) + \left(\frac{1}{r} - r\right) \int_0^\pi \frac{F'(\gamma)\, d\gamma}{(1 - 2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Maintenant le passage à la limite, après la différentiation, n'offre plus aucune difficulté, et l'on obtient pour résultat

$$K = -\frac{1}{2} F(0) + \frac{1}{2} F(\pi) - \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{F'(\gamma)}{\sin\frac{\gamma}{2}} d\gamma.$$

Par conséquent, en remarquant que, pour le point p, $V = F(0)$, on a l'équation

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \left[F(\pi) - \int_0^\pi \frac{F'(\gamma)}{\sin\frac{\gamma}{2}} d\gamma \right],$$

qui s'accorde avec celle que nous avions déduite du développement en série.

§ III.

En étendant à un point quelconque m le résultat que l'on vient de trouver pour le point correspondant à $\theta = 0$, on trouve, pour déterminer la densité, la règle suivante :

On cherchera, par une première intégration, la valeur moyenne du potentiel donné V, pour un cercle décrit sur la surface, du point m comme pôle, avec un rayon sphérique arbitraire λ. Si l'on désigne cette valeur moyenne par $\varphi(\lambda)$, la densité cherchée ρ sera donnée par l'équation

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \left[\varphi(\pi) - \int_0^\pi \frac{\varphi'(\lambda)}{\sin\frac{\lambda}{2}} d\lambda \right].$$

On peut encore remarquer que, d'après la définition de la fonction $\varphi(\lambda)$, la valeur particulière $\varphi(\pi)$ n'est autre chose que la valeur du potentiel pour le point diamétralement opposé au point m; et il est presque inutile d'ajouter que la fonction $\varphi(\lambda)$ aura des valeurs différentes pour les différentes positions du point m, ou, en d'autres termes, que $\varphi(\lambda)$ contiendra, outre λ, les deux coordonnées qui déterminent la position du point m sur la surface.

Mais il n'est peut-être pas superflu d'avertir d'une erreur dans laquelle on peut facilement tomber si l'on n'examine pas d'assez près le résultat que nous venons d'énoncer. Le diviseur qui entre sous le signe d'intégration s'évanouissant à la limite inférieure, on est tenté de croire, au premier abord, que l'intégrale ne reste finie que pour des positions particulières du point m, et qu'elle est en général infinie, tandis que c'est précisément le contraire qui a lieu. D'abord il est aisé de voir, à cause de la continuité de $\varphi(\lambda)$, que la partie de l'intégrale qui s'étend depuis une valeur positive δ, aussi petite qu'on voudra, de la variable jusqu'à la limite supérieure π, reste toujours finie et déterminée, quand même $\varphi'(\lambda)$ deviendrait infini un nombre quelconque de fois dans cet intervalle. Mais il en est de même aussi (les cas singuliers exceptés) pour la partie de l'intégrale qui s'étend de 0 à δ: cela résulte de ce que, pour de petites valeurs de λ, $\varphi'(\lambda)$ est en général du premier ordre, comme le dénominateur. Si l'on met la valeur V du potentiel sous la forme d'une fonction $\chi(\lambda, \psi)$ des coordonnées polaires sphériques λ, ψ, dont le point m est le pôle, auquel cas

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi(\lambda, \psi)\, d\psi,$$

la propriété dont nous parlons ne se manifeste pas, par la raison que la fonction $\chi(\lambda, \psi)$ n'est pas entièrement arbitraire, mais qu'elle est assujettie aux deux conditions particulières suivantes, d'être périodique par rapport à θ, et de devenir indépendante de ψ lorsqu'on y fait $\lambda = 0$. On peut, au contraire, se convaincre sans peine de la vérité de notre assertion en projetant la surface sphérique sur un plan quelconque, dont les points soient rapportés à deux axes rectangulaires, que nous appellerons axes des t et des u, et en exprimant alors la valeur de V en chaque point au moyen des coordonnées t, u de la projection de ce point. Ce mode de représentation a sans doute l'inconvénient que, pour représenter la surface tout entière, il faut considérer deux fonctions de t et de u; mais cet inconvénient disparaît dans la question actuelle, où l'on ne doit considérer qu'une portion de surface infiniment petite renfermant le point m. Prenons le plan tangent en m pour plan de projection, m pour origine des coordonnées, et posons

$$V = \chi(t, u).$$

Cette nouvelle fonction ne sera plus assujettie à d'autres conditions qu'à celle de la continuité. Comme on peut évidemment faire maintenant

$$t = \sin\lambda \cos\psi, \qquad u = \sin\lambda \sin\psi,$$

$\varphi(\lambda)$ va prendre la forme

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi(\sin\lambda\cos\psi, \sin\lambda\sin\psi)\, d\psi,$$

et sous cette forme la propriété en question devient évidente, pourvu que d'un autre côté les coefficients différentiels de $\chi(t, u)$, jusqu'au second ordre inclusivement, conservent des valeurs finies lorsqu'on y fera simultanément

$$t = 0, \qquad u = 0.$$

Au reste, pour que ρ reste finie, il n'est pas même nécessaire que $\varphi'(\lambda)$, soit du premier ordre pour de petites valeurs de la variable; il suffit que $\varphi'(\lambda)$ soit du même ordre qu'une puissance positive quelconqué de λ.

Le cas où la valeur de ρ, devenant infinie, entraîne la divergence de la série fait connaître ce qui arrivera dans celui où, la densité restant toujours finie, la série cesse cependant de converger. Ce dernier cas est encore moins étendu que le premier, comme on peut aisément s'en convaincre en examinant attentivement les conditions dont il dépend.

§ IV.

Pour donner un exemple simple des cas d'exception que nous avons indiqués, pour lesquels le développement de ρ en série est divergent, nous allons supposer que la valeur V du potentiel est indépendante de l'angle φ, et qu'elle est représentée par $f(\theta)$. On sait que les séries de fonctions sphériques peuvent alors recevoir une forme beaucoup plus simple, et l'on a

$$V = \frac{1}{2}\sum(2n+1)A_n P_n(\cos\theta), \quad \text{et} \quad \rho = \frac{1}{8\pi}\sum(2n+1)^2 A_n P_n(\cos\theta),$$

le coefficient général A_n étant donné par la formule

$$A_n = \int_0^\pi f(\theta)\, P_n(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta.$$

Si l'on pose $f(\theta) = \sqrt{\cos\theta}$ pour toute valeur de $\theta < \frac{\pi}{2}$, et $f(\theta) = 0$ pour θ compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, la condition de la continuité sera satisfaite, et l'on aura à déterminer l'intégrale

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_n(\cos\theta) \sqrt{\cos\theta} \sin\theta\, d\theta.$$

Le calcul de cette intégrale au moyen des expressions connues de $P_n(\cos\theta)$ ne donnant pas immédiatement le résultat sous sa forme la plus simple, il est préférable d'employer la méthode suivante. En vertu de l'équation

$$\sum P_n(\cos\theta)\,\alpha^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2}},$$

l'intégrale cherchée n'est autre que le coefficient de α^n dans le développement de l'expression

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos\theta}\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2}},$$

où la fraction $\alpha < 1$ peut être considérée comme positive. En faisant $t = \sqrt{\cos\theta}$ et intégrant, il vient

$$2\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1 - 2\alpha t^2 + \alpha^2}} = \sqrt{\frac{1}{8\alpha^3}}\left[(1+\alpha^2)\arc\sin\sqrt{\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}} - (1-\alpha)\sqrt{2\alpha}\right].$$

En posant, pour faciliter le développement, $z = \arc\sin\sqrt{\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}}$, et différentiant, on a

$$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{1+\alpha}{1+\alpha^2}\sqrt{\frac{1}{2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha^{-\frac{1}{2}} + \alpha^{\frac{1}{2}} - \alpha^{\frac{3}{2}} - \alpha^{\frac{5}{2}} + \ldots\right);$$

d'où, en intégrant, et remarquant que z s'évanouit avec α,

$$\arc\sin\sqrt{\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}} = \sqrt{2}\left(\alpha^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\alpha^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}\alpha^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{7}\alpha^{\frac{7}{2}} + \ldots\right).$$

En substituant cette valeur, on obtient, pour le développement cherché,

$$-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{-1} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5}\right)\alpha - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right)\alpha^2 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right)\alpha^3 + \ldots\right],$$

les signes renfermés dans les crochets formant la période à quatre termes $+ - - +$, que l'on peut représenter par $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$. On a donc

$$A_n = -(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{2}{(2n-1).(2n-3)},$$

et les séries ci-dessus prennent la forme suivante :

$$V = -\sum(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{2n+1}{(2n-1).(2n+3)} P_n(\cos\theta),$$

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\sum(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{(2n+1)^2}{(2n-1).(2n+3)} P_n(\cos\theta).$$

D'après ce qui a été remarqué dans l'article précédent, on voit sans difficulté que, dans le cas actuel, le quotient différentiel $\varphi'(\lambda)$ devient infini seulement pour $\lambda = \frac{\pi}{2}$, et cela de telle sorte que la condition énoncée à la fin du § I n'est pas remplie lorsque le point m répond à l'une des valeurs $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, auxquels cas cependant, pour de petites valeurs de λ, $\varphi'(\lambda)$ est de l'ordre λ, et par conséquent ρ conserve des valeurs finies; et qu'en même temps la densité est infinie seulement à l'équateur, c'est-à-dire pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi'(\lambda)$ étant alors de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ pour une petite valeur de λ. Dans ces trois cas, les séries cessent donc d'être convergentes, et il est facile de s'en assurer en remarquant que $P_n(\cos\theta)$, pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, prendra respectivement les valeurs 1 et $(-1)^n$, tandis que, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, il s'évanouit si n est impair, et si n est pair, il devient égal à l'expression $\frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n}(-1)^{\frac{n}{2}}$, qui est, comme on sait, pour de grandes valeurs de n, de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Dans les deux premiers cas, où ρ conserve une valeur finie et déterminée, la série présente le caractère d'une série oscillante, puisque ses termes, convergeant tous vers la limite 1, sont tels que, sur quatre consécutifs, deux ont le signe $+$ et deux le signe $-$; tandis que, dans le troisième cas, tous les termes sont de même signe, et donnent une somme infinie.

§ V.

Quoique la méthode au moyen de laquelle nous venons de déterminer le coefficient A_n ne soit plus applicable lorsque, tout en continuant à supposer $f(\theta) = 0$ pour la seconde moitié de l'intervalle, on prend dans le premier $f(\theta) = \cos^k\theta$, k désignant une constante positive quelconque; cependant la forme très-simple du résultat trouvé pour la valeur particulière $k = \frac{1}{2}$ permet d'espérer quelque chose d'analogue pour le cas plus général. Comme l'expression la plus simple de A_n ne se présente pas toutefois au premier abord, nous allons nous arrêter un instant sur la manière de la trouver. Poisson, qui a choisi dans un de ses Mémoires [*] la fonction que nous venons de définir pour exemple de développement en série de fonctions sphériques, laisse au coefficient A_n la forme

$$\frac{1.3\ldots(2n-1)}{1.2\ldots n}$$
$$\times\left[\frac{1}{k+n+1}-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\cdot\frac{1}{k+n-1}+\frac{n(n-1).(n-2).(n-3)}{2.4\ldots(2n-1).(2n-3)}\cdot\frac{1}{k+n-3}-\ldots\right],$$

sous laquelle il se présente de lui-même immédiatement lorsque l'on part, pour le développement, de l'expression ordinaire de $P_n(\cos\theta)$, sans remarquer la simplification considérable dont cette forme est susceptible, et qui n'est réellement pas facile à deviner quand on n'a pas été averti par l'examen d'un cas particulier, comme celui que nous venons de traiter. On est conduit à l'expression la plus simple de A_n par le procédé suivant, très-court, bien qu'il ne soit pas élémentaire.

D'après le § I du premier Mémoire, les deux intégrales

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\cos n\psi\cos\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{2(\cos\psi-\cos\gamma)}}\,d\psi,\qquad -\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\sin n\psi\sin\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{2(\cos\psi-\cos\gamma)}}\,d\psi$$

sont respectivement égales aux coefficients de α^n dans les développements des expressions

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{1+\alpha}{\sqrt{1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2}},\qquad -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{1-\alpha}{\sqrt{1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2}}.$$

On en tire par addition

$$P_n(\cos\gamma)=\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\psi}{\sqrt{2(\cos\psi-\cos\gamma)}}\,d\psi.$$

Multipliant cette équation par $\cos^k\gamma\sin\gamma d\gamma$, intégrant ensuite depuis $\gamma=0$ jusqu'à $\gamma=\frac{\pi}{2}$, et intervertissant dans le second membre l'ordre

[*] *Connaissance des Temps* pour l'année 1829.

des intégrations, il vient

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\psi \int_\psi^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^k\gamma \sin\gamma}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}}\,d\gamma,$$

ou, en introduisant à la place de γ une nouvelle variable t, donnée par l'équation $\cos\gamma = t\cos\psi$, ce qui rend les deux intégrations indépendantes l'une de l'autre,

$$A_n = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t}}\,dt \,.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{k+\frac{1}{2}}\psi \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\psi\, d\psi.$$

Or on a, par une formule connue,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1}\psi \cos q\psi\, d\psi = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{1+p+q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+p-q}{2}\right)}\cdot\frac{\pi}{2^p},$$

la constante p devant être positive, et la transcendante $\Gamma(l)$, quand l'argument l devient négatif, étant déterminée par la relation

$$\Gamma(l+1) = l\Gamma(l),$$

ou, ce qui revient au même, par la définition donnée par Gauss, et qui s'applique indifféremment aux arguments positifs et négatifs. A l'aide de cette formule et de l'expression connue d'une intégrale eulérienne de première espèce au moyen de trois de seconde espèce, notre équation devient

$$A_n = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(\frac{k+n+3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{k-n+2}{2}\right)}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2^{k+1}},$$

ou

$$A_n = \frac{k.(k-1)\ldots(k-n+1)}{\frac{k+n+1}{2}\cdot\left(\frac{k+n+1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{k+n+1}{2}-n\right)}$$
$$\times \frac{\Gamma(k-n+1)}{\Gamma\left(\frac{k-n+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{k-n+2}{2}\right)}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2^{k+.}},$$

ou enfin, en remplaçant le second facteur par sa valeur connue $2^{k-n}\frac{1}{\sqrt{\pi}}$,

$$A_n = \frac{k.(k-1)\ldots(k-n+1)}{(k+n+1)(k+n-1)\ldots(k-n+1)},$$

où les facteurs du dénominateur vont en diminuant de deux unités.

Il est à peine besoin de faire remarquer que cette expression si simple peut se vérifier avec la plus grande facilité. Il suffit, par exemple, de la décomposer en fractions simples, pour reconnaître qu'elle coïncide avec celle de Poisson. Si l'on ne veut pas employer celle-ci pour cette vérification, on peut se servir de l'équation

$$(n+1)A_{n+1,k} = (2n+1)A_{n,k+1} - nA_{n-1,k},$$

qui résulte immédiatement de la relation qui a lieu entre un groupe quelconque de trois coefficients $P_n(\cos\gamma)$ consécutifs.

Pour simplifier encore davantage l'expression que nous venons de trouver, nous distinguerons deux cas, suivant que n sera pair ou impair. On a respectivement dans ces deux cas :

$$A_n = \frac{k.(k-2)\ldots(k-n+2)}{(k+1)(k+3)\ldots(k+n+1)}, \qquad A_n = \frac{(k-1)(k-3)\ldots(k-n+2)}{(k+2)(k+4)\ldots(k+n+1)}.$$

A l'aide de ces expressions et des formules connues qui donnent les valeurs approchées des factorielles dont le nombre des facteurs est très-grand, on peut se convaincre facilement que le cas particulier examiné ci-dessus, où $k = \frac{1}{2}$, et dans lequel la série est divergente pour $\theta = 0$ et pour $\theta = \pi$, est précisément le cas limite de la série, et que la divergence cesse dès que k est $> \frac{1}{2}$. Mais il n'en est plus de même pour la valeur $\theta = \frac{\pi}{2}$; dans ce cas, la divergence subsiste, ainsi que la valeur infinie de la densité, tant qu'on ne prend pas $k > 1$.

§ VI.

Nous allons maintenant appliquer encore à un cas particulier l'expression finie que nous avons trouvée pour la densité. Considérons encore V comme une fonction de θ seulement, que nous pourrons mettre sous la forme $f(\cos\theta)$; ρ ne dépendra plus encore que de la distance sphérique θ du point m au pôle p. Sur le cercle décrit du point m comme pôle, avec le rayon sphérique λ, on aura, par la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique,

$$V = f(\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda\cos\psi),$$

ψ désignant l'angle compris entre le rayon quelconque λ et l'arc de grand cercle passant par m et par p. Cette expression ne changeant pas de valeur quand on y remplace ψ par $-\psi$, il suffira de prendre entre les limites $\psi = 0$, $\psi = \pi$ l'intégrale qui exprime la valeur moyenne $\varphi(\lambda)$, et ensuite de la doubler. On a ainsi

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda\cos\psi)\,d\psi.$$

Toutes les fois que $\varphi'(\lambda)$ pourra s'exprimer sans le signe d'intégration, ce qui a lieu lorsque $f(z)$, ou plus généralement $f'(z)$ est une fonction rationnelle de z, alors, soit que la forme de cette fonction reste la même pour tout l'intervalle compris entre $z = -1$ et $z = +1$, soit qu'elle change de telle sorte que la continuité ne soit pas interrompue, ρ pourra se ramener à une intégrale simple, ou même s'exprimer sans le signe d'intégration [*].

[*] Dans le cas général où V contient les deux angles θ, φ, la réduction de ρ à une intégrale simple pourra toujours s'effectuer lorsque, en posant

$$x = \cos\theta,\quad y = \sin\theta\cos\varphi,\quad z = \sin\theta\sin\varphi,$$

V pourra s'exprimer par une fonction de x, y, z dont les trois coefficients différentiels du premier ordre soient des fonctions rationnelles, entières ou fractionnaires, de x, y, z, la forme de la fonction $f(x, y, z)$ pouvant toujours changer dans les différentes parties de la surface, ce qui constitue un résultat remarquable par sa grande généralité.

Parmi les cas qui se rapportent au cas général précédent, nous ne traiterons que celui où $f(\cos\theta) = \cos\theta$ pour $\theta < \frac{\pi}{2}$, et $f(\cos\theta) = 0$ pour $\theta > \frac{\pi}{2}$. L'intégrale s'étendra seulement à la partie de l'intervalle compris entre $\psi = 0$ et $\psi = \pi$, à l'intérieur de laquelle l'expression

$$\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda\cos\psi$$

a des valeurs positives. Si l'on suppose $\theta < \frac{\pi}{2}$, et il est facile de ramener à ce cas celui où θ serait $> \frac{\pi}{2}$, on trouve simplement, en discutant l'expression précédente que, pour toute valeur de λ inférieure à $\frac{\pi}{2} - \theta$, l'intégrale doit être prise de $\psi = 0$ à $\psi = \pi$; pour toute valeur de λ comprise entre $\frac{\pi}{2} - \theta$ et $\frac{\pi}{2} + \theta$, les limites de l'intégrale sont zéro et l'angle ψ_1, compris entre 0 et π, et déterminé par l'équation

$$\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda\cos\psi_1 = 0;$$

et enfin, pour $\lambda > \frac{\pi}{2} + \theta$, l'intégrale s'évanouit, puisqu'alors l'expression précédente est toujours négative. La fonction $\varphi(\lambda)$ a donc pour valeurs respectives, dans ces trois intervalles,

$$\cos\theta\cos\lambda, \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{\psi_1}(\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda\cos\psi)\,d\psi, \qquad 0;$$

dans la seconde expression, pour abréger le calcul, nous n'effectuerons l'intégration qu'après avoir différentié. Dans cette dernière opération, le terme résultant de la variation de la limite supérieure ψ_1 s'évanouit en vertu de l'équation qui détermine ψ_1, et l'on obtient pour $\varphi'(\lambda)$ les trois expressions

$$-\cos\theta\sin\lambda, \qquad \frac{1}{\pi}(-\psi_1\cos\theta\sin\lambda + \sin\psi_1\sin\theta\cos\lambda), \qquad 0,$$

à la simple inspection desquelles on peut se convaincre qu'au moins tant que m reste sur l'hémisphère pour lequel ces expressions ont été calculées, $\varphi'(\lambda)$ ne deviendra pas infinie, et que cette fonction sera du premier ordre pour une petite valeur de λ, auquel cas c'est la première forme qu'il faut prendre. Il n'y a d'exception sous ce rapport que pour $\theta = \frac{\pi}{2}$: alors les deux intervalles extrêmes s'évanouissent, et $\varphi'(\lambda)$ a généralement pour expression $\frac{1}{\pi}\cos\lambda$, quantité de l'ordre zéro pour de petites valeurs de λ, de sorte que la densité devient infinie à l'équateur.

D'après l'expression trouvée pour $\varphi'(\lambda)$, l'intégrale que contient l'expression générale de ρ se partage en deux autres, qui ont pour limites, l'une o et $\frac{\pi}{2} - \theta$, l'autre $\frac{\pi}{2} - \theta$ et $\frac{\pi}{2} + \theta$, et dont la première a la valeur très-simple

$$- 4\cos\theta \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right).$$

La seconde, composée elle-même de deux parties, est, abstraction faite des limites,

$$\frac{\sin\theta}{\pi}\int \frac{\sin\psi_1 \cos\lambda}{\sin\frac{\lambda}{2}}\,d\lambda - \frac{2\cos\theta}{\pi}\int \psi_1 \cos\frac{\lambda}{2}\,d\lambda;$$

en intégrant le dernier terme par parties, elle prend la forme

$$\frac{\sin\theta}{\pi}\int \frac{\sin\psi_1 \cos\lambda}{\sin\frac{\lambda}{2}}\,d\lambda + \frac{4\cos\theta}{\pi}\int \frac{d\psi_1}{d\lambda}\sin\frac{\lambda}{2}\,d\lambda - \frac{4}{\pi}\psi_1 \cos\theta \sin\frac{\lambda}{2}.$$

En remarquant que, d'après l'équation qui détermine ψ_1, on a respectivement aux deux limites $\psi_1 = \pi$ et $\psi_1 = 0$, on trouve, en passant aux limites, pour le terme dégagé du signe $\int$, une valeur égale et de signe contraire à celle qu'on a trouvée pour la première intégrale. Il ne reste donc que les deux premiers termes, qui, en y substituant les valeurs suivantes, tirées de l'équation qui donne ψ_1,

$$\sin\psi_1 = \frac{\sqrt{\sin^2\theta - \cos^2\lambda}}{\sin\theta\sin\lambda}, \qquad \frac{d\psi_1}{d\lambda} = -\frac{\cos\theta}{\sin\lambda}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sin^2\theta - \cos^2\lambda}},$$

prennent la forme

$$\frac{1}{\pi}\int\frac{\cos\lambda}{\sin\lambda\sin\frac{\lambda}{2}}\sqrt{\sin^2\theta - \cos^2\lambda}\,.\,d\lambda - \frac{4\cos^2\theta}{\pi}\int\frac{\sin\frac{\lambda}{2}}{\sin\lambda}\cdot\frac{d\lambda}{\sqrt{\cos^2\theta - \cos^2\lambda}},$$

où les intégrales doivent être prises depuis $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$ jusqu'à $\lambda = \frac{\pi}{2} + \theta$. En introduisant une nouvelle variable

$$z = \frac{\cos\lambda}{\cos\theta},$$

les limites des intégrales deviennent $+1$ et -1, ou, en changeant les signes et en même temps l'ordre des limites, -1 et $+1$; et l'on a, en substituant dans l'expression de ρ, et remarquant en même temps que $\varphi(\pi) = 0$,

$$\rho = \frac{1}{\pi^2.2\sqrt{2}}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{2 - z\sin\theta}{1 - z^2\sin^2\theta}\cos^2\theta - z\sin\theta\right)\cdot\frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2).(1 - z\sin\theta)}}.$$

Ce résultat semble renfermer un terme dépendant des intégrales elliptiques de troisième espèce. Mais comme les limites sont deux valeurs consécutives parmi celles qui font évanouir le radical, l'expression, ramenée à la forme habituelle, ne contiendra plus que des intégrales elliptiques *complètes* [*], et par conséquent, en vertu d'un beau théorème dû à Legendre, on pourra la ramener aux intégrales de première et de seconde espèce.

Faisons voir encore, en terminant cet article, comment le cas de notre problème, traité dans le Mémoire cité plus haut, et relatif à une surface peu différente de la sphère, peut être ramené au cas de la sphère sans le secours du développement en séries.

---

[*] *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum*, auct. C.-G.-J. Jacobi, page 14.

Soit $r = 1 + \gamma z$ l'équation de la surface, γ désignant une constante très-petite, dont on néglige les puissances supérieures, et z une fonction de θ et de φ. Si l'on convient de marquer d'un accent la valeur que prend une fonction des quantités θ, φ, lorsqu'on y remplace ces quantités par θ', φ', et si l'on désigne par ds' l'élément de surface correspondant aux coordonnées θ', φ', et par p la distance des points qui ont pour coordonnées respectives θ et φ, θ' et φ', le problème exige que l'équation

$$\mathrm{V} = \int \frac{\rho' ds'}{p},$$

où la double intégration s'étend à toute la surface, c'est-à-dire depuis $\theta' = 0$, $\varphi' = 0$ jusqu'à $\theta' = \pi$, $\varphi' = 2\pi$, soit satisfaite pour toutes les valeurs de θ, φ comprises dans les mêmes limites. Soit $d\sigma'$ l'élément de la surface sphérique correspondant à l'élément ds' et dont le contour est tracé par les mêmes rayons vecteurs, et soit q la distance des points de la sphère qui ont pour coordonnées respectives θ et φ, θ' et φ'. On trouve de suite, par des considérations géométriques très-simples,

$$ds' = (1 + 2\gamma z')\, d\sigma', \qquad p = q\left[1 + \tfrac{1}{2}\gamma(z + z')\right].$$

Par la substitution de ces expressions, notre équation devient

$$\mathrm{V} = \int \rho' \left[1 + \gamma\left(\frac{3}{2} z' - \frac{1}{2} z\right)\right] \frac{d\sigma'}{q},$$

ou

$$\mathrm{V} + \frac{1}{2}\gamma z \int \frac{\rho' d\sigma'}{q} = \int \rho' \left(1 + \frac{3}{2}\gamma z'\right) \frac{d\sigma'}{q}.$$

D'après l'avant-dernière équation, l'intégrale multipliée par γ dans la dernière équation ne diffère de V que d'une quantité de l'ordre γ; on peut donc remplacer cette intégrale par V, ce qui donne

$$\left(1 + \frac{1}{2}\gamma z\right) \mathrm{V} = \int \rho' \left(1 + \frac{3}{2}\gamma z'\right) \frac{d\sigma'}{q},$$

et par cette équation le problème est ramené au cas de la sphère. On voit qu'il faudra considérer le produit de la valeur donnée du potentiel par $1 + \frac{1}{2}\gamma z$ comme la valeur correspondante à la sphère, puis diviser par $1 + \frac{3}{2}\gamma z$ la densité déterminée d'après cette hypothèse.