JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

**Sur quelques séries et produits infinis**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série*, tome 2 (1857), p. 433-440.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__433_0>

## SUR QUELQUES SÉRIES ET PRODUITS INFINIS;

Par M. J. LIOUVILLE.

I. Il est assez curieux que les deux séries

$$\frac{\varphi(1)x}{1-x}+\frac{\varphi(2)x^2}{1-x^2}+\frac{\varphi(3)x^3}{1-x^3}+\ldots$$

et

$$\frac{\varphi(1)x}{1+x}+\frac{\varphi(2)x^2}{1+x^2}+\frac{\varphi(3)x^3}{1+x^3}+\ldots,$$

où $\varphi(m)$ marque généralement combien il y a de nombres premiers à $m$ dans la suite $1, 2, 3,\ldots, m$, aient des valeurs très-simples. En se servant, pour abréger, du signe $\sum$, on trouve en effet

$$(1)\qquad \sum\frac{\varphi(m)x^m}{1-x^m}=\frac{x}{(1-x)^2}$$

et

$$(2)\qquad \sum\frac{\varphi(m)x^m}{1+x^m}=\frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

Nous supposons, bien entendu, que la valeur numérique de $x$ (ou le module de $x$, si $x$ est imaginaire) reste $< 1$, sans quoi nos séries ne seraient pas convergentes.

Pour démontrer l'équation (1), observons qu'en développant

$$\frac{1}{1-x^m}$$

sous la forme

$$x^m+x^{2m}+x^{3m}+\ldots,$$

on peut écrire son premier membre ainsi qu'il suit :

$$x\varphi(1)+x^2[\varphi(1)+\varphi(2)]+\ldots+x^n[\varphi(1)+\varphi(d)+\ldots+\varphi(n)]+\ldots,$$

1, $d, \ldots, n$ étant les diviseurs de $n$. Or

$$\varphi(1) + \varphi(d) + \ldots + \varphi(n) = n,$$

d'après un théorème de Gauss. Il vient donc

$$\sum \frac{\varphi(m)\,x^m}{1 - x^m} = x + 2x^2 + \ldots + nx^n + \ldots = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

C'est la formule (1).

Quant à la formule (2), elle se déduit de l'équation (1) en en retranchant le double de celle que cette équation (1) donne quand on y remplace $x$ par $x^2$.

On peut aussi sommer aisément la série

$$\sum{}' \frac{\varphi(m)\,x^m}{1 - x^{2m}},$$

où je ne donne plus à $m$ que les valeurs impaires 1, 3, 5, 7,..., tandis que tout à l'heure $m$ était indifféremment pair ou impair. En développant en effet

$$\frac{1}{1 - x^{2m}},$$

et en appliquant encore le théorème de Gauss, il vient

$$\sum{}' \frac{\varphi(m)\,x^m}{1 - x^{2m}} = x + 3x^3 + 5x^5 + 7x^7 + \ldots.$$

Donc

$$(3) \qquad \sum{}' \frac{\varphi(m)\,x^m}{1 - x^{2m}} = \frac{x(1 + x^2)}{(1 - x^2)^2}.$$

On conclut des formules (2) et (3) que les deux séries

$$\sum \frac{\varphi(m)\,x^m}{1 + x^m}$$

et

$$\sum{}' \frac{\varphi(m)\,x^m}{1 - x^{2m}}$$

sont égales entre elles.

**2**. On pourrait ajouter aux séries déterminées par les formules (1), (2), (3) d'autres séries qui s'en déduisent, soit par la différentiation, soit par des transformations algébriques. Mais c'est surtout en les intégrant qu'on est conduit à des résultats curieux.

La formule (1) multipliée par $\frac{dx}{x}$ et intégrée donne par exemple

$$\sum \frac{\varphi(m)}{m} \log(1 - x^m) = -\frac{x}{1-x}.$$

Posons, pour abréger,

$$\frac{\varphi(m)}{m} = \mu,$$

et passons des logarithmes aux nombres. Nous obtiendrons

$$(4) \qquad \Pi(1 - x^m)^\mu = e^{-\frac{x}{1-x}},$$

ou bien encore

$$(5) \qquad \Pi \frac{1}{(1 - x^m)^\mu} = e^{\frac{x}{1-x}}.$$

Le signe $\Pi$ est le signe de multiplication. Il s'applique aux valeurs 1, 2, 3, 4, 5,... de $m$ et aux valeurs correspondantes 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$,... de $\mu$. Les facteurs sont les mêmes que dans le produit infini

$$(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)\ldots(1 - x^m)\ldots,$$

ou

$$\Pi(1 - x^m),$$

qu'Euler a développé, comme on sait, en une série ordonnée suivant les puissances de $x$; mais les exposants sont tous égaux à l'unité dans la série d'Euler, tandis que dans nos formules l'exposant de $1 - x^m$ est égal à $\mu$ ou à $-\mu$, ce qui, par le fait, ne rend que plus simples les valeurs de nos produits. Je n'ai pas besoin d'ajouter que l'exponentielle

$$e^{\pm \frac{x}{1-x}}$$

est aisée à développer en série suivant les puissances de $x$. En effet, on a d'abord

$$e^{\pm\frac{x}{1-x}} = 1 \pm \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1.2(1-x)^2} \pm \frac{x^3}{1.2.3(1-x)^3} + \ldots;$$

ensuite on développera les dénominateurs au moyen de la formule du binôme

$$\frac{1}{(1-x)^s} = 1 + \frac{s}{1}x + \frac{s(s+1)}{1.2}x^2 + \ldots.$$

Il ne restera plus après cela qu'à faire pour chaque puissance $x^n$ la somme des coefficients, ce qui ne donnera qu'une suite limitée, puisqu'on ne devra aller que jusqu'à $s = n$. Soit

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots$$

le développement cherché; on trouvera

$$C_0 = 1, \quad C_1 = \pm 1, \quad C_2 = \pm 1 + \frac{1}{2}, \quad C_3 = \pm 1 + 1 \pm \frac{1}{6},$$

et en général

$$C_n = \pm 1 + \frac{n-1}{1.2} \pm \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{1.2\ldots(n-2)} + \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n}:$$

la loi des signes dans cette expression de $C_n$ est évidente, et la valeur absolue du terme de rang $s$ est

$$\frac{(s+1)(s+2)\ldots(n-1)}{1.2\ldots(s-1).1.2\ldots(n-s)}.$$

Après avoir ainsi développé les seconds membres des formules (4) et (5), on pourrait de même chercher le coefficient de $x^n$ dans les développements directement effectués de leurs premiers membres, et l'on aurait, en comparant les deux résultats, des théorèmes concernant les exposants $\mu$ ou plutôt les fonctions $\varphi(m)$.

On arriverait à d'autres résultats du même genre en intégrant les formules (2) et (3). Les résultats fournis par la formule (2) seraient, pour le produit

$$\Pi \frac{1}{(1+x^m)^\mu},$$

les analogues de ceux que nous venons d'obtenir pour le produit

$$\Pi \frac{1}{(1-x^m)^\mu}.$$

3. J'indiquerai encore une application de nos formules à la théorie des nombres.

L'équation

$$\sum \frac{\varphi(m)x^m}{1+x^m} = \frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)^2} = x + 3x^3 + 5x^5 + \ldots$$

nous montre qu'en développant l'expression

$$\sum \frac{\varphi(m)x^m}{1+x^m}$$

suivant les puissances ascendantes de $x$, on doit trouver o pour la valeur du coefficient de toute puissance paire de $x$. Or on a

$$\frac{1}{1+x^m} = 1 - x^m + x^{2m} - x^{3m} + \ldots,$$

et il s'ensuit aisément que si l'on désigne par $d$ un diviseur quelconque de $n$, et par $\delta$ le diviseur conjugué qui donne $n = d.\delta$, l'expression du coefficient de $x^n$ dans le développement de

$$\sum \frac{\varphi(m)x^m}{1+x^m}$$

est

$$\sum (-1)^{\delta-1}\varphi(d),$$

le signe $\sum$ s'appliquant ici à tous les diviseurs $d$ de $n$, 1 et $n$ compris. Si donc nous supposons $n$ pair, nous aurons

$$\sum (-1)^{\delta-1}\varphi(d) = 0.$$

L'équation que je viens d'écrire résulte du reste, comme cas très-particulier, d'un théorème que nous avons démontré dans un des articles qui précèdent. On a pu voir que si, pour tout entier $n = d\delta$, on a

$$\sum f(d) = F(n),$$

$f$ et F étant deux fonctions numériques déterminées, il s'ensuit, pour $n$ pair,

$$\sum(-1)^{\delta-1} f(d) = \mathrm{F}(n) - 2\mathrm{F}\left(\frac{n}{2}\right).$$

Prenez $f(n) = \varphi(n)$, et par suite $\mathrm{F}(n) = n$, d'après le théorème de Gauss, et vous en conclurez, pour $n$ pair,

$$\sum(-1)^{\delta-1} f(d) = n - 2\frac{n}{2} = 0,$$

comme ci-dessus.

Distinguons les valeurs impaires de $\delta$ des valeurs paires en représentant l'une quelconque des valeurs impaires par $\delta_1$ et l'une quelconque des valeurs paires par $\delta_2$. Alors nous aurons, d'après ce qui vient d'être démontré,

$$\sum\varphi\left(\frac{n}{\delta_1}\right) = \sum\varphi\left(\frac{n}{\delta_2}\right).$$

Mais déjà, en vertu du théorème cité de Gauss,

$$\sum\varphi\left(\frac{n}{\delta}\right) = \sum\varphi\left(\frac{n}{\delta_1}\right) + \sum\varphi\left(\frac{n}{\delta_2}\right) = n.$$

Donc, séparément,

$$\sum\varphi\left(\frac{n}{\delta_1}\right) = \frac{n}{2}$$

et

$$\sum\varphi\left(\frac{n}{\delta_2}\right) = \frac{n}{2}.$$

Ces dernières formules sont, au reste, bien aisées à établir directement. Comme elles sont une conséquence immédiate l'une de l'autre, il suffit d'établir la première. Soit, à cet effet,

$$n = 2^\alpha . q,$$

$q$ étant un nombre impair. Les diviseurs impairs $\delta_1$ de $n$ seront précisément les diviseurs de $q$. On aura d'ailleurs, par une propriété bien connue de la fonction $\varphi$,

$$\varphi\left(\frac{n}{\delta_1}\right) = \varphi\left(2^\alpha . \frac{q}{\delta_1}\right) = \varphi(2^\alpha)\,\varphi\left(\frac{q}{\delta_1}\right) = 2^{\alpha-1}\varphi\left(\frac{q}{\delta_1}\right),$$

d'où

$$\sum \varphi\left(\frac{n}{\delta_1}\right) = 2^{\alpha-1} \sum \varphi\left(\frac{q}{\delta_1}\right).$$

Mais $\delta_1$ désignant un diviseur quelconque de $q$, son conjugué, qui est quelconque aussi, est $\frac{q}{\delta_1}$, et l'on a

$$\sum \varphi\left(\frac{q}{\delta_1}\right) = \sum \varphi(\delta_1) = q.$$

Donc

$$\sum \varphi\left(\frac{n}{\delta_1}\right) = 2^{\alpha-1}.q = \frac{n}{2},$$

ce qu'il fallait démontrer.

4. Le théorème de Gauss dont nous venons de nous servir s'applique également à la série

$$\frac{\varphi(1)}{1^s} + \frac{\varphi(2)}{2^s} + \frac{\varphi(3)}{3^s} + \ldots + \frac{\varphi(n)}{n^s} + \ldots,$$

que je représenterai, pour abréger, par

$$\sum \frac{\varphi(n)}{n^s},$$

en exprimant de même par

$$\sum \frac{1}{n^s}$$

la suite

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots,$$

des puissances de degré négatif des nombres naturels. Je suppose $s > 2$, afin que la série

$$\sum \frac{\varphi(n)}{n^s}$$

soit convergente.

Cela posé, considérons le produit

$$\sum \frac{1}{n^s} \sum \frac{\varphi(n)}{n^s},$$

et pour l'effectuer plus aisément, remplaçons $n$ par $\delta$ dans la première série et par $d$ dans la seconde; le terme général du produit dont il s'agit sera

$$\frac{\varphi(d)}{(d\delta)^s},$$

et en réunissant tous les termes où $d\delta$ conserve une même valeur $n$, on aura

$$\frac{\varphi(1)+\varphi(d)+\ldots+\varphi(n)}{n^s},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{n^{s-1}},$$

d'après le théorème de Gauss.

On a donc

$$\sum\frac{1}{n^s}\sum\frac{\varphi(n)}{n^s}=\sum\frac{1}{n^{s-1}},$$

d'où

$$\sum\frac{\varphi(n)}{n^s}=\sum\frac{1}{n^{s-1}}:\sum\frac{1}{n^s}.$$

On pourrait pousser plus loin ces détails; mais je m'arrête, en faisant observer pourtant que les considérations précédentes s'étendent à toutes les formules que j'ai obtenues dans mes recherches sur diverses fonctions numériques : je reviendrai donc plus tard sur ce sujet.

FIN DU TOME DEUXIÈME (2^e^ SÉRIE).