JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques fonctions numériques; (Quatrième article.)

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 425-432.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__425_0>

SUR QUELQUES FONCTIONS NUMÉRIQUES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

(Quatrième article.)

Je conserve avec la signification qu'elles avaient dans nos trois premiers articles (cahiers d'*Avril*, de *Juillet* et de *Novembre*) les fonctions $\varphi(m)$, $\theta(m)$, $\lambda(m)$ et $\zeta(m)$; mais je substitue à la fonction $\int m$, qui marquait la somme des diviseurs de m, une autre fonction plus générale $\zeta_\mu(m)$ qui désignera la somme des puissances de degré μ de ces diviseurs. Ainsi on aura

$$\zeta_\mu(m) = \sum (d^\mu).$$

L'exposant μ est quelconque : on peut le prendre positif ou négatif, entier ou fractionnaire, comme on voudra. Je remarque du reste que les valeurs négatives de μ peuvent être remplacées par des valeurs positives, au moyen de cette formule aisée à établir :

$$m^\mu \zeta_{-\mu}(m) = \zeta_\mu(m).$$

Quand $\mu = 1$, la fonction $\zeta_\mu(m)$ devient $\zeta_1(m)$; c'est donc par $\zeta_1(m)$ que désormais s'exprimera l'ancienne fonction $\int m$. Quand $\mu = 0$, $\zeta_\mu(m)$ devient $\zeta_0(m)$, ou plutôt $\zeta(m)$, car alors nous n'écrirons pas l'indice. On voit que $\zeta(m)$ continue à exprimer le nombre des diviseurs de m.

La fonction $\zeta_\mu(m)$ jouit comme les fonctions $\varphi(m)$, $\theta(m)$, $\lambda(m)$, $\zeta(m)$ et $\int m$ de la propriété fondamentale que voici. Soit $f(m)$ une quelconque de ces fonctions. On a

$$f(1) = 1;$$

et pour l'entier quelconque m, décomposé en facteurs premiers sous la forme

$$m = a^{\alpha} b^{\beta} \ldots c^{\gamma},$$

$f(m)$ se décompose aussi en facteurs et s'exprime par le produit

$$f(m) = f(a^{\alpha}) f(b^{\beta}) \ldots f(c^{\gamma}),$$

de sorte que quand la fonction $f(m)$ est connue pour les puissances de nombres premiers, elle l'est pour tous les autres nombres. Ce dernier fait résulte pour $\zeta_{\mu}(m)$ de la formule suivante, qui s'offre d'elle-même :

$$\zeta_{\mu}(m) = \frac{a^{\mu(\alpha+1)} - 1}{a^{\mu} - 1} \cdot \frac{b^{\mu(\beta+1)} - 1}{b^{\mu} - 1} \cdots \frac{c^{\mu(\gamma+1)} - 1}{c^{\mu} - 1}.$$

Les fonctions qui jouissent de la double propriété indiquée par les équations

$$f(1) = 1, \quad f(m) = f(a^{\alpha}) f(b^{\beta}) \ldots f(c^{\gamma}),$$

offrent dans leur étude des facilités particulières. Il s'ensuit, par exemple, que pour établir les formules de nos trois premiers articles et celles dont je vais parler ici, on n'a besoin que de traiter le cas où m est une puissance de nombre premier, c'est-à-dire le cas de $m = a^{\alpha}$. De là un mode de démonstration simple et qui ne s'appliquerait pas à une fonction numérique non décomposable en facteurs. J'entrerai plus tard à ce sujet dans tous les détails convenables ; mais dès à présent le lecteur peut se faire une idée de la marche à suivre en prenant pour type la démonstration que j'ai donnée de la formule

$$\sum \zeta(d)^3 = \left[\sum \zeta(d)\right]^2,$$

dans le dernier cahier de ce Journal (voir page 393). Du reste, c'est au fond de cette manière que M. Catalan a démontré ou plutôt vérifié (tome IV, 1^re^ série, page 7) l'équation de Gauss

$$\sum \varphi(d) = m.$$

Pour la plupart de nos formules, une telle vérification est on ne peut plus facile. Quelquefois cependant elle exige des détails d'algèbre et l'établissement préliminaire de certains résultats qui ne sont pas tout d'abord évidents. C'est ainsi que pour arriver à l'équation

$$\sum \int d \int \delta = \sum d\zeta(d)\zeta(\delta),$$

il faut prouver l'égalité des deux expressions suivantes :

$$\sum (1 + a + a^2 + \ldots + a^{\alpha'}) (1 + a + a^2 + \ldots + a^{\alpha - \alpha'})$$

et

$$\sum (1 + \alpha')(1 + \alpha - \alpha') a^{\alpha'},$$

où le signe sommatoire $\sum$ porte sur α' qui doit prendre successivement toutes les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, \alpha$.

Quoi qu'il en soit, je me borne pour le moment à cette indication rapide d'un premier procédé qui suffira à nos lecteurs pour établir par eux-mêmes celles de nos formules qui leur paraîtront dignes d'intérêt. Plus tard nous le développerons et nous ajouterons d'autres méthodes. En attendant continuons à poser quelques équations du même genre que celles qui ont précédé, mais où figurera la nouvelle fonction $\zeta_\mu(m)$.

Je trouve d'abord

$$(\alpha) \qquad \sum \zeta_\mu(d)\varphi(\delta) = m\zeta_{\mu-1}(m).$$

Ainsi, pour $m = 6$, les deux quantités

$$1 + 2^\mu + 3^\mu + 6^\mu + 1 + 3^\mu + 2(1 + 2^\mu) + 2$$

et

$$6(1 + 2^{\mu-1} + 3^{\mu-1} + 6^{\mu-1})$$

doivent être et sont en effet égales entre elles.

J'ai ensuite

$$(\beta)\qquad \sum d^\mu \zeta_\nu(\delta) = \sum d^\nu \zeta_\mu(\delta).$$

Ainsi, pour $m = 6$, la somme

$$6^\mu + 3^\mu(1 + 2^\nu) + 2^\mu(1 + 3^\nu) + 1 + 2^\nu + 3^\nu + 6^\nu$$

est égale à

$$6^\nu + 3^\nu(1 + 2^\mu) + 2^\nu(1 + 3^\mu) + 1 + 2^\mu + 3^\mu + 6^\mu.$$

On a, en troisième lieu,

$$(\gamma)\qquad \sum \theta(d)\zeta_\mu(\delta) = \sum d^\mu \zeta(\delta^2).$$

C'est, pour $m = 6$,

$$4 + 2(1 + 2^\mu) + 2(1 + 3^\mu) + 1 + 2^\mu + 3^\mu + 6^\mu = 6^\mu + 3.3^\mu + 3.2^\mu + 9.$$

Ensuite vient la formule

$$(\delta)\qquad \sum \lambda(d)\zeta(d^2)\zeta_\mu(\delta) = \sum d^\mu \zeta(\delta)\lambda(\delta),$$

qui, pour $m = 6$, exprime l'égalité des deux quantités

$$1 + 2^\mu + 3^\mu + 6^\mu - 3(1 + 3^\mu) - 3(1 + 2^\mu) + 9$$

et

$$6^\mu - 2.3^\mu - 2.2^\mu + 4.$$

Dans les formules ci-après, comme déjà dans la formule (β), les fonctions ζ_μ figurent seules, avec différents indices.

On a

$$(\varepsilon)\qquad \sum d^\mu \zeta_\mu(\delta) = \sum d^\mu \zeta(d).$$

Ainsi, pour $m = 6$, la somme

$$6^\mu + 3^\mu(1 + 2^\mu) + 2^\mu(1 + 3^\mu) + 1 + 2^\mu + 3 + 6^\mu$$

est égale à

$$4.6^\mu + 2.3^\mu + 2.2^\mu + 1.$$

On a encore

$$(\zeta) \qquad \sum d^\mu \zeta_\mu(d) = \sum \delta^{2\mu} \zeta_\mu(d).$$

C'est, pour $m = 6$, l'égalité entre

$$6^\mu(1 + 2^\mu + 3^\mu + 6^\mu) + 3^\mu(1 + 3^\mu) + 2^\mu(1 + 2^\mu) + 1$$

et

$$1 + 2^\mu + 3^\mu + 6^\mu + 2^{2\mu}(1 + 3^\mu) + 3^{2\mu}(1 + 2^\mu) + 6^{2\mu}.$$

Je trouve aussi l'équation

$$(\eta) \qquad \sum d^\mu \zeta_{3\mu}(\delta) = \sum d^\mu \zeta_{2\mu}(d),$$

qui, pour $m = 6$, exprime que

$$6^\mu + 3^\mu(1 + 2^{3\mu}) + 2^\mu(1 + 3^{3\mu}) + 1 + 2^{3\mu} + 3^{3\mu} + 6^{3\mu}$$

égale

$$6^\mu(1 + 2^{2\mu} + 3^{2\mu} + 6^{2\mu}) + 3^\mu(1 + 3^{2\mu}) + 2^\mu(1 + 2^{2\mu}) + 1.$$

Mais la formule que voici est surtout remarquable :

$$(\theta) \qquad \sum d^{\mu+\nu} \zeta_{\tau-\nu}(d)\,\zeta_\nu(\delta) = \sum d^\nu \zeta_\mu(d)\,\zeta_{\tau+\mu}(\delta).$$

Ainsi, pour $m = 4$, les deux quantités

$$4^{\mu+\nu}(1 + 2^{\tau-\nu} + 4^{\tau-\nu}) + 2^{\mu+\nu}(1 + 2^{\tau-\nu})(1 + 2^\nu) + 1 + 2^\nu + 4^\nu$$

et

$$4^{\nu}(1+2^{\mu}+4^{\mu})+2^{\nu}(1+2^{\mu})(1+2^{\tau+\mu})+1+2^{\tau+\mu}+4^{\tau+\mu}$$

doivent être égales, ce qui est exact.

On change aisément la formule (θ) en une autre, plus élégante encore peut-être,

$$(\iota)\qquad \sum d^{\mu}\zeta_{\nu+\tau}(d)\,\zeta_{\nu}(\delta)=\sum d^{\nu}\zeta_{\mu+\tau}(d)\,\zeta_{\mu}(\delta).$$

Cette nouvelle formule, dont la formule (θ) est à son tour une conséquence, peut d'ailleurs, elle aussi, s'établir directement. Pour cela, il faudra prouver que les deux sommes

$$\sum a^{\alpha'\mu}\left[1+a^{\nu+\tau}+a^{2(\nu+\tau)}+\ldots+a^{\alpha'(\nu+\tau)}\right]\left[1+a^{\nu}+a^{2\nu}+\ldots+a^{(\alpha-\alpha')\nu}\right]$$

et

$$\sum a^{\alpha'\nu}\left[1+a^{\mu+\tau}+a^{2(\mu+\tau)}+\ldots+a^{\alpha'(\mu+\tau)}\right]\left[1+a^{\mu}+a^{2\mu}+\ldots+a^{(\alpha-\alpha')\mu}\right]$$

ont la même valeur, α' variant dans l'une et dans l'autre de 0 à α.

Quand on y pose $\tau=0$, la formule (ι) devient

$$(\varkappa)\qquad \sum d^{\mu}\zeta_{\nu}(d)\,\zeta_{\nu}(\delta)=\sum d^{\nu}\zeta_{\mu}(d)\,\zeta_{\mu}(\delta),$$

et quoique plus restreinte, l'équation ($\varkappa$) offre encore un grand intérêt. On distingue surtout les cas particuliers que voici.

Pour $\mu=3$ et $\nu=1$, on a

$$(\lambda)\qquad \sum d^{3}\zeta_{1}(d)\,\zeta_{1}(\delta)=\sum d\zeta_{3}(d)\,\zeta_{3}(\delta);$$

pour $\mu=5$ et $\nu=1$,

$$(\mu)\qquad \sum d^{5}\zeta_{1}(d)\,\zeta_{1}(\delta)=\sum d\zeta_{5}(d)\,\zeta_{5}(\delta);$$

pour $\mu=5$ et $\nu=3$,

$$(\nu)\qquad \sum d^{5}\zeta_{3}(d)\,\zeta_{3}(\delta)=\sum d^{3}\zeta_{5}(d)\,\zeta_{5}(\delta);$$

pour $\mu = 3$ et $\nu = 0$,

$$(\xi) \qquad \sum d^3 \zeta(d) \zeta(\delta) = \sum \zeta_3(d) \zeta_3(\delta);$$

enfin, pour $\mu = 5$ et $\nu = 0$,

$$(o) \qquad \sum d^5 \zeta(d) \zeta(\delta) = \sum \zeta_5(d) \zeta_5(\delta).$$

On comprendra l'importance des formules que je viens d'écrire si je rappelle que $\zeta(m)$ désigne, pour un nombre m impair et n'ayant aucun facteur premier $4n+3$, le nombre des décompositions de $2m$ en une somme de deux carrés impairs, et que $\zeta_1(m)$ et $\zeta_3(m)$ expriment, pour un nombre impair quelconque, le nombre des décompositions de $4m$ en une somme de quatre carrés impairs et de $8m$ en une somme de huit carrés impairs; mode d'interprétation que j'étendrai plus tard, avec des changements convenables, à $\zeta_5(m)$, $\zeta_7(m)$, etc. De là découleront, en vertu de nos formules, de nombreux théorèmes dont on peut se faire une idée par celui que j'ai déjà donné au cahier d'octobre, page 351, et qui répond à la formule

$$\sum \int d \int \delta = \sum d \zeta(d) \zeta(\delta).$$

Présentons maintenant une formule où figurent à la fois une sommation relative aux seuls diviseurs carrés D^2 de m et une sommation relative à tous les diviseurs d. On a

$$(\pi) \qquad \sum \lambda(d) \zeta_\mu(\delta) = \sum' \left(\frac{m}{D^2}\right)^\mu.$$

Ainsi, pour $m = 4$, il faut que

$$1 + 2^\mu + 4^\mu - (1 + 2^\mu) + 1 = 4^\mu + 1,$$

ce qui est exact.

Jusqu'ici, μ, ν, τ ont désigné des quantités quelconques, entières ou non, positives ou négatives. Mais μ doit être un entier positif dans la formule que voici :

$$(\rho) \qquad \sum \zeta(d^{2\mu})\,\zeta_\nu(\delta) = \sum d^\nu\,\zeta(\delta)\,\zeta(\delta^\mu).$$

Pour $m = 6$, la formule (ρ) marque l'égalité des deux expressions

$$(1+2\mu)^2 + (1+2\mu)(1+2^\nu) + (1+2\mu)(1+3^\nu) + 1 + 2^\nu + 3^\nu + 6^\nu,$$

et

$$6^\nu + 3^\nu . 2(1+\mu) + 2^\nu . 2(1+\mu) + 4(1+\mu)^2.$$

La condition de μ entier positif devra également être remplie dans la formule

$$(\sigma) \qquad \sum \theta(d)^\nu\,\zeta_\mu(\delta) = \sum d^\mu\,\zeta(\delta^{2\nu}),$$

dont la formule (γ) n'est qu'un cas particulier, et par laquelle je terminerai cet article : elle donne, pour $m = 3$, l'équation

$$\theta(1)^\nu\,\zeta_\mu(3) + \theta(3)^\nu\,\zeta_\mu(1) = 3^\mu\,\zeta(1) + \zeta(3^{2\nu}),$$

c'est-à-dire l'identité

$$1 + 3^\mu + 2^\nu = 3^\mu + 2^\nu + 1.$$