JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

# Note à l'occasion d'un mémoire de M. Bouniakowsky

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série*, tome 2 (1857), p. 424.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__424_0>

## NOTE A L'OCCASION D'UN MÉMOIRE DE M. BOUNIAKOWSKY;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Dans un Mémoire faisant suite aux Recherches sur les sommes des diviseurs des nombres dont il a été question plus haut (page 411), et qui est intitulé *Nouvelle méthode pour la théorie des formes quadratiques* et inséré au tome V, 6ᵉ série, des Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg, M. Bouniakowsky a donné le théorème suivant : « Tout nombre premier $16k + 7$ est nécessairement de la forme » $2u^2 + Qv^2$, Q représentant un nombre premier $8c + 5$ ». La méthode de l'auteur est fondée sur cette double propriété de la somme des diviseurs d'un nombre $m$, de n'avoir une valeur impaire que quand $m$ est un carré ou le double d'un carré, et de n'avoir une valeur impairement paire que quand $m$ est le produit d'un carré par un nombre premier de la forme $4n + 1$ (élevé à la puissance 1 ou $4\mu + 1$), ou par le double d'un tel nombre. Cette propriété facile à établir était connue d'Euler, qui s'en est servi dans un travail sur les nombres parfaits; mais c'est à M. Bouniakowsky qu'on doit d'en avoir révélé toute l'importance en en faisant la base d'une méthode générale et en tirant de beaux théorèmes.

En mettant à mon tour à profit l'idée heureuse de M. Bouniakowsky, j'ai obtenu des résultats analogues aux siens. Je citerai en particulier le théorème suivant, dont je donnerai plus tard la démonstration détaillée : « Le double d'un nombre premier de la forme $8\mu + 3$ s'exprime toujours par la somme d'un carré et du produit d'un autre » carré par un nombre premier de la forme $8\mu + 5$ ». En d'autres termes, si $p$ est un nombre premier $8\mu + 3$, on a nécessairement l'équation

$$2p = x^2 + qy^2,$$

$q$ désignant un autre nombre premier de la forme $8\nu + 5$.