JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Démonstrations du théorème énoncé dans l'article précédent

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 409-412.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__409_0>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME ÉNONCÉ DANS L'ARTICLE PRÉCÉDENT;

Par M. J. LIOUVILLE.

On admet que, pour tout nombre entier, pair ou impair, $m = d\delta$, on a

$$\text{(A)} \qquad \sum f(d) = \mathrm{F}(m),$$

le signe sommatoire du premier membre s'appliquant à tous les diviseurs d de m, et l'on demande d'en conclure la valeur de

$$\sum (-1)^{\delta - 1} f(d).$$

Comme dans le cas de m impair, l'exposant $\delta - 1$ est essentiellement pair, on a alors tout de suite

$$\sum (-1)^{\delta - 1} f(d) = \sum f(d) = \mathrm{F}(m).$$

Le cas de m pair, $m = 2n$, est donc le seul dont nous ayons à nous occuper.

Distinguons les valeurs impaires de δ des valeurs paires, en désignant les premières par δ_1 et les autres par δ_2. Comme on a

$$d = \frac{m}{\delta},$$

les valeurs de d se partageront aussi en deux classes, et l'on aura

$$\sum (-1)^{\delta - 1} f(d) = \sum f\left(\frac{m}{\delta_1}\right) - \sum f\left(\frac{m}{\delta_2}\right),$$

les sommes à faire au second membre étant respectivement relatives à δ_1 et à δ_2. La formule (A) pourra aussi s'écrire

$$\sum f\left(\frac{m}{\delta_1}\right) + \sum f\left(\frac{m}{\delta_2}\right) = \mathrm{F}(m).$$

Appliquons cette même formule (A) au nombre n ou $\frac{m}{2}$. Il est clair que $\frac{m}{\delta_2}$ est un diviseur de ce nombre, puisqu'il donne le quotient entier $\frac{1}{2}\delta_2$. Réciproquement tout diviseur k de $\frac{m}{2}$ devant donner le quotient entier

$$\frac{m}{2k} = h,$$

on en conclut que

$$k = \frac{m}{2h} = \frac{m}{\delta_2},$$

en prenant pour δ_2 le diviseur pair $2h$ de m. Les diviseurs de m sont donc exprimés par $\frac{m}{\delta_2}$, et la formule (A) nous donne en conséquence

$$\sum f\left(\frac{m}{\delta_2}\right) = \mathrm{F}\left(\frac{m}{2}\right).$$

En retranchant le double de cette équation de l'équation obtenue plus haut,

$$\sum f\left(\frac{m}{\delta_1}\right) + \sum f\left(\frac{m}{\delta_2}\right) = \mathrm{F}(m),$$

on trouve

$$\sum f\left(\frac{m}{\delta_1}\right) - \sum f\left(\frac{m}{\delta_2}\right) = \mathrm{F}(m) - 2\,\mathrm{F}\left(\frac{m}{2}\right),$$

et par conséquent

$$\text{(B)} \qquad \sum (-1)^{\delta-1} f(d) = \mathrm{F}(m) - 2\,\mathrm{F}\left(\frac{m}{2}\right),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Dans un curieux travail inséré au tome IV de la 6ᵉ série des *Mémoires* *de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, M. Bouniakowsky a été conduit à s'occuper d'une expression qui, avec nos notations actuelles, peut s'écrire

$$\sum (-1)^{\delta} d,$$

ou, en changeant le signe,

$$\sum (-1)^{\delta-1} d.$$

Quand m est impair, on a évidemment

$$\sum (-1)^{\delta} d = -\int m,$$

en désignant avec Euler par $\int m$ la somme des diviseurs de m. M. Bouniakowsky arrive aussi à une expression simple quand m est une puissance de 2. Mais il ne paraît pas avoir vu qu'en général on a, pour m pair,

$$\sum (-1)^{\delta-1} d = \int m - 2\int \frac{m}{2},$$

comme cela résulte de notre formule (B), en y prenant $f(d) = d$, ce qui réduit la formule (A) à l'identité

$$\sum d = \int m.$$

Ainsi, pour m pair, on a cette formule élégante

$$\sum (-1)^{\delta} d = 2\int \frac{m}{2} - \int m,$$

qui pourra servir à compléter en un point de détail le beau Mémoire de l'habile géomètre que nous venons de nommer.

Le Mémoire de M. Bouniakowsky est intitulé : *Recherches sur différentes lois nouvelles relatives à la somme des diviseurs des nombres.* Il a été présenté à l'Académie de Saint-Pétersbourg le 11 février 1848 et imprimé la même année. J'aurais dû le citer (dans le cahier de septembre 1856) à l'occasion de la formule

$$\sum\left[n-5\frac{m(m+1)}{2}\right]\int(2n+1-m^2-m)=0;$$

car cette formule est une de celles que donne M. Bouniakowsky qui, lui aussi du reste, ne la présente que comme la conséquence immédiate et évidente d'une équation de Jacobi bien connue. Au surplus, si j'ai manqué ici de mémoire, nos lecteurs y gagneront : je me propose, en effet, de mettre bientôt sous leurs yeux une analyse détaillée que M. Bouniakowsky (à cette occasion même) a faite de son travail pour le rappeler aux géomètres. Cet extrait en donnera une idée exacte et fixera l'attention des savants sur un genre de recherches qui offre beaucoup d'intérêt.