JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur une relation entre deux fonctions numériques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 408.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__408_0>

SUR UNE RELATION ENTRE DEUX FONCTIONS NUMÉRIQUES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soient $f(m)$ et $F(m)$ deux fonctions numériques de l'entier m, en sorte que pour chaque valeur donnée de m, $f(m)$ et $F(m)$ prennent des valeurs déterminées. Admettons de plus qu'en désignant par d un diviseur quelconque de m, et par $\sum$ une somme relative à tous les diviseurs d, on ait

$$\sum f(d) = F(m). \tag{A}$$

Cette relation entre les fonctions $f(m)$ et $F(m)$ en entraînera beaucoup d'autres dont j'espère un jour m'occuper. Je profite de la page qui reste libre ici pour en indiquer une.

Soit δ le quotient de m par d, c'est-à-dire soit $m = d\delta$. Si le nombre m est pair, l'équation (A) entraînera la suivante :

$$\sum (-1)^{\delta - 1} f(d) = F(m) - 2F\left(\frac{m}{2}\right). \tag{B}$$

Il est inutile d'ajouter que si m était impair, on aurait évidemment

$$\sum (-1)^{\delta-1} f(d) = \sum f(d) = F(m),$$

puisqu'alors l'exposant $\delta - 1$ serait essentiellement pair.

La formule (B) pourra souvent être utile. J'ignore si quelqu'un l'a donnée déjà. Connue ou non, elle méritait, je crois, d'être mise sous les yeux de nos jeunes lecteurs; elle pourra leur servir à tirer plusieurs formules nouvelles des formules déjà si nombreuses que nous avons données au sujet des fonctions numériques.