JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques fonctions numériques; (troisième article.)

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 377-384.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__377_0>

SUR QUELQUES FONCTIONS NUMÉRIQUES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

(Troisième article.)

Je conserve dans ce troisième article les notations des deux précédents. On se souvient que dans le premier article (inséré au cahier d'*avril*) je me suis occupé de quatre fonctions numériques bien connues

$$\varphi(m), \quad \int m, \quad \zeta(m), \quad \theta(m),$$

exprimant respectivement le nombre des entiers premiers à m et non plus grands que m, la somme des diviseurs de m, le nombre de ces diviseurs, enfin le nombre de manières dont m peut se décomposer en deux facteurs premiers entre eux. Dans le deuxième article (inséré au cahier de *juillet*) j'ai ajouté la fonction $\lambda(m)$ qui, pour $m = 1$, se réduit comme les autres à l'unité, et qui, pour m décomposé en facteurs premiers sous la forme

$$m = a^\alpha b^\beta \ldots c^\gamma,$$

donne

$$\lambda(m) = (-1)^{\alpha+\beta+\ldots+\gamma}.$$

Comme on peut, sans inconvénient, ôter un nombre pair de la somme $\alpha + \beta + \ldots + \gamma$ qui sert d'exposant à -1, on voit que cette définition revient à dire que la valeur de $\lambda(m)$ est 1 ou -1, suivant qu'après avoir divisé m par le plus grand carré qui le mesure, on trouve les facteurs premiers (nécessairement inégaux) que la division laisse subsister, en nombre pair ou en nombre impair. On reconnaît ainsi que $\lambda(m)$ est une des fonctions numériques qui figurent dans les *Fundamenta* de Jacobi.

Quoique j'aie donné déjà un assez grand nombre de formules plus ou moins curieuses concernant les fonctions

$$\varphi(m), \quad \int m, \quad \zeta(m), \quad \theta(m), \quad \lambda(m),$$

je ne crois pas déplaire à nos lecteurs en revenant encore sur ce sujet, non pour épuiser la matière, qui est vraiment inépuisable, mais pour montrer combien peuvent offrir de variété ces théorèmes, même bornés ainsi à la considération d'un petit nombre de fonctions.

Je m'en tiens, au surplus, cette fois encore, à un simple énoncé, auquel je joins un exemple numérique qui en fixe mieux le sens, et qui d'ailleurs est une sorte de garantie contre les fautes d'impression.

Désignons donc, à l'ordinaire, par d un diviseur quelconque du nombre entier positif m, et par δ le diviseur conjugué qui donne $m = d.\delta$.

Nous aurons d'abord cette formule :

$$\text{(I)} \qquad \sum \zeta(\delta^2)\varphi(d) = \sum \delta\theta(d),$$

où le signe $\sum$ s'applique, comme d'habitude, à tous les diviseurs d. Soit, pour exemple, $m = 6$. Cette formule nous dit que les deux expressions

$$\zeta(36)\varphi(1) + \zeta(9)\varphi(2) + \zeta(4)\varphi(3) + \zeta(1)\varphi(6)$$

et

$$6\theta(1) + 3\theta(2) + 2\theta(3) + \theta(6),$$

doivent être égales entre elles. Leur valeur commune est en effet 20.

J'écris ensuite cette autre formule, où $\zeta(\delta^2)$ figure également :

$$\text{(II)} \qquad \sum d\zeta(\delta^2) = \sum \theta(\delta)\int d$$

Pour $m = 6$, il faut donc que les deux quantités

$$\zeta(36) + 2\zeta(9) + 3\zeta(4) + 6\zeta(1)$$

et

$$\theta(6)\int 1 + \theta(3)\int 2 + \theta(2)\int 3 + \theta(1)\int 6$$

soient égales entre elles; elles ont, en effet, 30 pour commune valeur.

On trouve encore $\zeta(\delta^2)$, mais cette fois avec $\lambda(d)$, dans la formule

$$\text{(III)} \qquad \sum \zeta(\delta^2)\lambda(d) = \zeta(m).$$

C'est, pour $m = 6$, l'identité

$$\zeta(36) - \zeta(9) - \zeta(4) + \zeta(1) = 9 - 3 - 3 + 1 = 4 = \zeta(6).$$

De la formule (III) je rapproche celle-ci :

$$\text{(IV)} \qquad \sum \zeta(\delta)^2 \lambda(d)\theta(d) = \zeta(m),$$

où l'on n'a plus $\zeta(\delta^2)$, mais bien $\zeta(\delta)^2$. Pour $m = 6$, la formule (IV) donne l'identité

$$16 - 4.2 - 4.2 + 4 = 4.$$

On conclut d'ailleurs des formules (III) et (IV) comparées :

$$\sum \zeta(\delta)^2 \lambda(d)\theta(d) = \sum \zeta(\delta^2)\lambda(d).$$

A présent voici une équation entre les seules fonctions ζ et φ :

$$\text{(V)} \qquad \sum \varphi(d)\zeta(\delta)\zeta(\delta^\mu) = \sum d\zeta(\delta^{2\mu}).$$

L'exposant μ est un nombre entier positif. Si pourtant on voulait faire $\mu = 0$, on aurait encore un résultat exact, car on retomberait sur la formule (4) de notre premier article. Appliquée à $m = 3$, la formule (V) se réduit à l'identité :

$$\zeta(3)\zeta(3^\mu) + \varphi(3) = \zeta(3^{2\mu}) + 3,$$

dont les deux membres sont égaux à $2\mu + 4$.

En voici une autre entre ζ et θ :

$$\text{(VI)} \qquad \sum \theta(\delta)\zeta(d)\zeta(d^\mu) = \sum \zeta(\delta^2)\zeta(d^{2\mu}).$$

Pour $m = 3$, c'est l'identité

$$\theta(3) + \zeta(3)\zeta(3^\mu) = \zeta(9) + \zeta(3^{2\mu}) :$$

la valeur commune des deux membres est $2\mu + 4$.

Enfin en voici une entre $\int$ et ζ :

$$\text{(VII)} \qquad \sum \zeta(\delta^{2\mu}) \int d = \sum \delta\zeta(d)\zeta(d^\mu).$$

Pour $m = 3$, elle donne ce résultat exact

$$\zeta(3^{2\mu}) + \int 3 = 3 + \zeta(3)\zeta(3^\mu) :$$

la valeur commune des deux membres est $2\mu + 5$.

Je répète pour les formules (VI) et (VII) ce que j'ai dit pour la formule (V), relativement à l'exposant μ. Cet exposant est entier positif, mais on peut aussi le prendre égal à zéro : quand on lui donne cette valeur, la formule (VII), par exemple, se réduit à la formule (3) de notre premier article, et, par conséquent, reste exacte.

Jusqu'ici le signe $\sum$ portait sur les diverses valeurs du diviseur d et concernait tous les diviseurs de m. Nous allons maintenant le marquer d'un accent, et désormais il ne portera plus que sur les diviseurs D dont le carré D^2 divise aussi m. Cette notation a déjà été employée dans nos premiers articles.

On a

$$\text{(VIII)} \qquad \sum' \varphi(D)\zeta\left(\frac{m}{D^2}\right) = \sum' D\theta\left(\frac{m}{D^2}\right).$$

Soit, comme exemple, $m = 6$; on n'a qu'un seul diviseur carré D^2, savoir 1 ; ainsi on n'a à considérer que la seule valeur $D = 1$, et la formule (VIII) se réduit à

$$\zeta(6) = \theta(6),$$

ce qui est exact, les deux membres étant égaux à 4.

Soit encore $m = 4$; alors D a ces deux valeurs 1 et 2, et la formule (VIII) exige que

$$\varphi(1)\zeta(4) + \varphi(2)\zeta(1) = \theta(4) + 2\theta(1):$$

or cela a lieu en effet, puisque 4 est la valeur commune des deux membres.

On a également

$$\text{(IX)} \qquad \sum{}' \theta(\mathrm{D})\zeta\left(\frac{m}{\mathrm{D}^2}\right) = \sum \zeta(\mathrm{D}^2)\theta\left(\frac{m}{\mathrm{D}^2}\right).$$

Prenons pour exemple le nombre 32 pour lequel on a trois valeurs de D, savoir $\mathrm{D} = 1$, $\mathrm{D} = 2$, $\mathrm{D} = 4$. La formule (IX) exige que les deux quantités

$$\theta(1)\zeta(32) + \theta(2)\zeta(8) + \theta(4)\zeta(2),$$

et

$$\zeta(1)\theta(32) + \zeta(4)\theta(8) + \zeta(16)\theta(2),$$

soient égales entre elles; elles ont, en effet, 18 pour valeur commune.

On sait que $\theta(m) = 2^\nu$, ν désignant le nombre des facteurs premiers inégaux de m; il s'ensuit que

$$\theta(\mathrm{D}) = \theta(\mathrm{D}^2),$$

en sorte que la formule (IX) peut s'écrire

$$\sum{}' \theta(\mathrm{D}^2)\zeta\left(\frac{m}{\mathrm{D}^2}\right) = \sum{}' \zeta(\mathrm{D}^2)\theta\left(\frac{m}{\mathrm{D}^2}\right):$$

si m était un carré, cette équation serait insignifiante, car alors D^2 et $\frac{m}{\mathrm{D}^2}$ représenteraient au même titre les diviseurs carrés de m; mais l'entier m est ici quelconque, et la symétrie parfaite des deux membres ne peut qu'ajouter à l'élégance de notre formule.

En voici une autre un peu plus compliquée, mais bien élégante encore

$$(\mathrm{X}) \qquad \sum{}' \zeta(\mathrm{D})\,\zeta(\mathrm{D}^{\mu})\,\theta\left(\frac{m}{\mathrm{D}^2}\right) = \sum{}' \zeta(\mathrm{D}^{2\mu})\,\zeta\left(\frac{m}{\mathrm{D}^2}\right).$$

Appliquée au cas de $m = 4$, cette formule conduit à l'identité

$$\theta(4) + \zeta(2)\,\zeta(2^{\mu}) = \zeta(4) + \zeta(2^{2\mu});$$

la somme vaut $2\mu + 4$ aux deux membres. L'exposant μ est comme précédemment un nombre entier positif ou zéro.

Dans les deux formules ci-après, on a tout à la fois des sommes $\sum$ relatives à tous les diviseurs d de m et des sommes $\sum{}'$ prises seulement par rapport aux diviseurs D dont le carré D^2 est aussi un diviseur de m.

L'une de ces formules, dans laquelle on rencontre encore un exposant positif ou nul, est

$$(\mathrm{XI}) \qquad \sum \lambda(\delta)\,\zeta(d)\,\zeta(d^{\mu}) = \sum{}' \zeta\left(\frac{m^{2\mu}}{\mathrm{D}^{4\mu}}\right).$$

Voici l'autre

$$(\mathrm{XII}) \qquad \sum \lambda(d) \int d = m\lambda(m) \sum{}' \frac{1}{\mathrm{D}^2}.$$

En les appliquant au cas de $m = 4$, on voit que la première exige l'égalité des deux expressions

$$1 - \zeta(2)\,\zeta(2^{\mu}) + \zeta(4)\,\zeta(4^{\mu})$$

et

$$\zeta(4^{2\mu}) + 1,$$

dont la valeur commune est $4\mu + 2$; quant à la seconde, elle se réduit à l'identité

$$\int 1 - \int 2 + \int 4 = 5 = 4\left(1 + \frac{1}{4}\right).$$

De même que l'on vient de considérer des sommes relatives aux seuls diviseurs D dont le carré D^2 est aussi un diviseur, on pourrait introduire des sommes concernant les seuls diviseurs dont une puissance donnée est aussi un diviseur de m. En voici un exemple. Désignons par $\mathfrak{D}^4$ un quelconque des diviseurs de m qui s'expriment par une quatrième puissance, ou, en d'autres termes, désignons par $\mathfrak{D}$ un quelconque des diviseurs de m dont la quatrième puissance aussi divise m. Nous aurons

$$\text{(XIII)}\qquad \sum{}'\lambda(\mathrm{D})\zeta\left(\frac{m}{\mathrm{D}^2}\right) = \sum{}''\theta\left(\frac{m}{\mathfrak{D}^4}\right).$$

La lettre D à laquelle se rapporte la somme marquée par $\sum'$ conserve la signification qu'elle avait plus haut. Mais la somme indiquée au second membre porte sur les diviseurs $\mathfrak{D}$ qui ne font qu'une partie des diviseurs D, et nous avons accentué deux fois le signe $\sum$ qui s'applique à eux.

Soit comme exemple $m = 16$; les valeurs de D seront $\mathrm{D} = 1, 2, 4$, et celles de $\mathfrak{D}$ seulement 1 et 2. La formule (XIII), pour ce cas particulier, se réduira donc à l'identité

$$\zeta(16) - \zeta(4) + \zeta(1) = 3 = \theta(16) + \theta(1).$$

Je n'ai introduit jusqu'ici dans nos équations que des exposants simples. Mais ces exposants peuvent aussi quelquefois être eux-mêmes des puissances. Comme les formules où cette circonstance a lieu sont incommodes à écrire, je n'en présenterai que quelques-unes.

On a, avec un exposant composé 2^μ:

$$\text{(XIV)}\qquad \sum\left[\theta(d)^\mu\right] = \zeta\left(m^{2^\mu}\right).$$

Pour $m = 3$, cela conduit à l'identité

$$1 + 2^\mu = \zeta\left(3^{2^\mu}\right).$$

On a également

$$\text{(XV)}\qquad \sum\varphi(\delta)\zeta\left(d^{2^\mu}\right) = \sum\left[\delta\theta(d)^\mu\right].$$

On a encore cette formule double

$$\text{(XVI)}\qquad \sum\left[\theta(d)^\mu\zeta(\delta)\right]=\sum\zeta\left(d^{2^\mu}\right)=\zeta(m)\zeta\left(m^{2^\mu-1}\right).$$

J'ajoute l'équation

$$\text{(XVII)}\qquad \sum\zeta\left(d^{2^\mu}\right)\theta(\delta)=\sum\left[\theta(d)^\mu\zeta(\delta^2)\right].$$

Enfin je termine par la formule

$$\text{(XVIII)}\qquad \sum\zeta\left(d^{2^\mu}\right)\lambda(\delta)=\sum{}'\left[\theta\left(\frac{m}{\mathrm{D}^2}\right)^\mu\right],$$

dans laquelle on retrouve à la fois des diviseurs d et des diviseurs D.

Les identités auxquelles nos quatre dernières formules se réduisent quand $m=3$ sont respectivement, pour la formule (XV),

$$\varphi(3)\zeta(1)+\varphi(1)\zeta\left(3^{2^\mu}\right)=2^\mu+3=3+\theta(3)^\mu;$$

pour la formule (XVI),

$$\zeta(3)+\theta(3)^\mu=2^\mu+2=\zeta(1)+\zeta\left(3^{2^\mu}\right)=\zeta(3)\zeta\left(3^{2^\mu-1}\right);$$

pour la formule (XVII),

$$\zeta(1)\theta(3)+\zeta\left(3^{2^\mu}\right)\theta(1)=2^\mu+3=\zeta(9)+\theta(3)^\mu;$$

et enfin

$$\zeta(1)\lambda(3)+\zeta\left(3^{2^\mu}\right)\lambda(1)=2^\mu=\theta(3)^\mu$$

pour la formule (XVIII).