JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la décomposition d'un nombre en un produit de deux sommes de carrés

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 351-352.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__351_0>

SUR LA DÉCOMPOSITION D'UN NOMBRE EN UN PRODUIT DE DEUX SOMMES DE CARRÉS;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Désignons par m un nombre impair donné dont tous les facteurs premiers soient de la forme $4\mu + 1$. Décomposons $16m$ de toutes les manières possibles en un produit de deux sommes de quatre carrés impairs, de manière à avoir

$$16m = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2 + t'^2),$$

x, y, z, t, x', y', z', t' étant impairs et positifs, et deux décompositions étant regardées comme différentes quand les nombres x, y, etc., ne sont pas tous identiques de part et d'autre. Soit A le nombre des décompositions ainsi obtenues.

D'un autre côté, décomposons $4m$ de toutes les manières possibles en un produit de deux sommes de deux carrés impairs, de manière à avoir

$$4m = (u^2 + v^2)(u'^2 + v'^2),$$

u, v, u', v' étant impairs et positifs, et deux décompositions étant regardées comme différentes quand les nombres u, v, etc., n'y sont pas tous identiquement les mêmes. Prenons partout le premier facteur $u^2 + v^2$, que nous désignerons par $2a$, et formons la somme $\sum a$ pour toutes les décompositions indiquées.

On aura entre A et $\sum a$ une relation bien simple. Car

$$\mathrm{A} = \sum a.$$

Soit, comme exemple, $m = 5$. Les décompositions de 16.5 sont au nombre de douze : elles résultent du produit de la quantité

$$1 + 1 + 1 + 1.$$

prise successivement pour premier et pour second facteur, par chacune des six quantités suivantes :

$$
\begin{gathered}
9+9+1+1, \\
9+1+9+1, \\
9+1+1+9, \\
1+9+1+9, \\
1+1+9+9, \\
1+9+9+1.
\end{gathered}
$$

Quant aux décompositions de $4m$, les voici :

$$
\begin{gathered}
(1+1)(1+9), \quad (1+1)(9+1), \\
(1+9)(1+1), \quad (9+1)(1+1).
\end{gathered}
$$

Les premiers facteurs $2a$ étant successivement

$$2, \ 2, \ 10, \ 10,$$

on en conclut, conformément à notre théorème,

$$\sum a = 12 = \mathrm{A}.$$

Si le nombre m avait un ou plusieurs facteurs premiers de la forme $4\mu + 3$, l'égalité

$$\mathrm{A} = \sum a$$

n'aurait plus lieu : elle serait remplacée par l'inégalité

$$\mathrm{A} > \sum a.$$

Le théorème que nous venons de donner n'est qu'un exemple pris entre plusieurs autres d'un genre semblable. Mais l'espace dont nous pouvions disposer étant rempli, nous nous arrêtons et nous supprimons même la démonstration.