JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur le produit $m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 2 (1857), p. 277-278.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__277_0>

SUR LE PRODUIT

$$m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1);$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

Si l'on est assuré qu'il y a au moins un nombre premier dans la suite

$$m,\ m+1,\ m+2,\ldots,\ m+n-1,$$

on pourra affirmer par cela même qu'il y a au moins un nombre premier qui divise *une seule fois* le produit

$$m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1);$$

d'où l'on conclura, par exemple, que ce produit n'est ni un carré, ni un cube, ni une puissance d'ordre quelconque, ni même un produit de puissances.

On démontre facilement le théorème que je viens d'énoncer en s'appuyant sur cette vérité, aujourd'hui bien établie, qu'entre un nombre quelconque et son double (diminué même de deux unités si le nombre surpasse 3) il y a au moins un nombre premier [*].

Soit en effet, conformément à l'hypothèse, p un nombre premier contenu dans la suite

$$m,\ m+1,\ m+2,\ldots,\ m+n-1;$$

et s'il y en a plusieurs, soit p le plus grand de tous. Il faudra que l'on ait

$$m+n-1 < 2p,$$

sans quoi l'on rencontrerait dans la suite indiquée un nombre premier plus grand que p. Or les termes

$$m,\ m+1,\ldots,\ p-1,$$

[*] Voyez le beau Mémoire de M. Tchebichef, 1re série, t. XVII, p. 366.

qui précèdent p (si l'on n'a pas $m = p$), ne peuvent avoir que des diviseurs premiers moindres que p, et il en est de même des termes

$$p + 1, \ldots, \; m + n - 1,$$

qui suivent p (si p n'est pas précisément le dernier terme) : cela résulte de ce que tous ces termes sont plus petits que $2p$ d'après l'inégalité ci-dessus. Donc p ne divise le produit

$$m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)$$

qu'une seule fois ; ce qu'il fallait prouver.

Ceci s'applique de soi-même au produit

$$2.3.4\ldots n,$$

qui par conséquent n'est jamais une puissance exacte, ni même un produit de puissances.

Il est aisé de voir aussi que la même propriété appartient, quel que soit m, au produit

$$m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1),$$

lorsque l'on a

$$n > m - 5.$$

On arriverait à des résultats analogues à ceux qui précèdent pour le produit

$$(2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2n-1)$$

de n termes consécutifs pris dans la suite des nombres impairs (c'est-à-dire des nombres premiers à 2), et pour d'autres produits où l'on n'admettrait que des facteurs premiers à certains nombres donnés. On pourrait aussi considérer des produits où chacun des facteurs serait déjà un produit du genre de ceux qu'on vient d'indiquer. Mais j'abandonne ces développements à la sagacité du lecteur.