JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LEJEUNE-DIRICHLET

Démonstration nouvelle d'une proposition relative à la théorie des formes quadratiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 273-276.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__273_0>

DÉMONSTRATION NOUVELLE

D'UNE PROPOSITION

RELATIVE A LA THÉORIE DES FORMES QUADRATIQUES;

PAR M. LEJEUNE-DIRICHLET.

La proposition dont je veux donner une démonstration nouvelle et très-simple appartenant à une théorie exposée avec détail dans les *Disquisitiones arithmeticæ* de Gauss, je puis m'en référer à cet ouvrage quant à la terminologie dont j'aurai à faire usage, et passer immédiatement à l'objet qu'il s'agit de remplir.

« Étant donnée une substitution impropre $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ par laquelle la
» forme quadratique $(a,\ b,\ c) = f$ (dont le déterminant est supposé
» différent de zéro) se change en elle-même, on peut toujours obtenir
» une nouvelle forme appartenant à la même classe, et pour laquelle
» le double du coefficient moyen soit un multiple du premier coef-
» ficient. »

La supposition de l'énoncé fournit sur-le-champ, outre l'équation

$$\alpha\delta - \beta\gamma = -1,$$

les trois que voici

$$a(\alpha^2 - 1) + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 = 0,$$
$$a\alpha\beta + 2b\alpha\delta + c\gamma\delta = 0,$$
$$a\beta^2 + 2b\beta\delta + c(\delta^2 - 1) = 0,$$

dont la seconde a été simplifiée par la substitution de $\alpha\delta + 1$ à la place de $\beta\gamma$. En faisant la somme des deux premières après les avoir multipliées respectivement par $-\delta$ et γ, et ensuite la somme des deux dernières multipliées par β et $-\alpha$, on obtient ces nouvelles équations

$$a[\alpha(\beta\gamma - \alpha\delta) + \delta] = a(\alpha + \delta) = 0,$$
$$c[\delta(\beta\gamma - \alpha\delta) + \alpha] = c(\alpha + \delta) = 0.$$

Il résulte de là que si a et c ne s'évanouissent pas à la fois, on a

$$\alpha + \delta = 0.$$

Mais cette dernière équation a également lieu dans le cas excepté; en effet, comme dans ce cas b est différent de zéro, on a en même temps

$$\alpha\gamma = 0, \quad \alpha\delta = 0, \quad \beta\delta = 0,$$

équations qui ne sont compatibles avec l'équation

$$\alpha\delta - \beta\gamma = -1,$$

qu'autant qu'on suppose simultanément

$$\alpha = 0, \quad \delta = 0.$$

Il est donc prouvé que notre substitution impropre est toujours de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & -\alpha \end{pmatrix}$$

où

$$\alpha^2 + \beta\gamma = 1.$$

Arrêtons-nous un instant au cas particulier où le troisième coefficient γ de cette substitution s'évanouit. Nos équations donnent alors

$$\alpha = -\delta = \pm 1, \quad 2b = \pm a\beta.$$

On voit que, dans ce cas, la forme donnée f jouit déjà de la propriété exigée. On conclut de là que si γ n'est pas zéro, tout se réduit à obtenir une forme équivalente à la forme f, et qui soit transformable en elle-même par une substitution impropre dont le troisième coefficient s'évanouisse.

Soit, à cet effet,

$$\begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \nu, & \rho \end{pmatrix}$$

la substitution propre la plus générale, ou, autrement dit, soient λ, μ, ν, ρ quatre entiers assujettis à la seule condition

$$\lambda\rho - \mu\nu = 1.$$

Appelons φ la forme en laquelle se change f lorsqu'on lui applique cette substitution. La substitution inverse

$$\begin{pmatrix} \rho, & -\mu \\ -\nu, & \lambda \end{pmatrix},$$

qui est également propre, changera φ en f.

Cela posé, composons les trois substitutions

$$\begin{pmatrix} \rho, & -\mu \\ -\nu, & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \nu, & \rho \end{pmatrix}$$

dans l'ordre où nous venons de les écrire; ces substitutions changeant, la première φ en f, la seconde f en f, la troisième f en φ, la substitution composée, qui est d'ailleurs évidemment impropre, changera la forme φ en elle-même. La question est donc réduite à rendre égal à zéro le troisième coefficient de notre substitution composée.

Pour obtenir ce coefficient, commençons par composer les deux premières substitutions, et bornons-nous à écrire le troisième et le quatrième coefficient de la substitution qui résulte de cette première composition. Ces coefficients étant

$$\gamma\lambda - \alpha\nu, \quad -\alpha\lambda - \beta\nu,$$

il en résulte, pour le coefficient qu'il s'agit d'obtenir, l'expression

$$(\gamma\lambda - \alpha\nu)\lambda - (\alpha\lambda + \beta\nu)\nu = \gamma\lambda^2 - 2\alpha\lambda\nu - \beta\nu^2.$$

Comme γ, par hypothèse, n'est pas zéro, nous pouvons, avant d'égaler notre expression à zéro, la multiplier par γ : nous aurons ainsi

$$\gamma(\gamma\lambda^2 - 2\alpha\lambda\nu - \beta\nu^2) = (\gamma\lambda - \alpha\nu)^2 - (\alpha^2 + \beta\gamma)\nu^2 = (\gamma\lambda - \alpha\nu)^2 - \nu^2 = 0,$$

par conséquent,

$$[\gamma\lambda - (\alpha + 1)\nu][\gamma\lambda - (\alpha - 1)\nu] = 0,$$

et l'on voit que si, après avoir réduit le rapport $\frac{\alpha \pm 1}{\gamma}$ (où le signe ambigu est à volonté) à sa plus simple expression $\frac{\lambda}{\nu}$, on déduit des entiers

λ, ν deux entiers μ, ρ qui satisfassent à l'équation

$$\lambda\rho - \mu\nu = 1,$$

la substitution $\begin{pmatrix}\lambda, & \mu \\ \nu, & \rho\end{pmatrix}$ appliquée à la forme f changera cette forme en une autre équivalente φ jouissant de la propriété exigée.

Toul, le 15 août 1857.