JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. DE JONQUIÈRES

Note relative au § XX du mémoire qui précède. Deuxième mode de description de la courbe du quatrième ordre déterminée par quatorze points

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 267-272.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__267_0>

NOTE

RELATIVE AU § XX DU MÉMOIRE QUI PRÉCÈDE.

DEUXIÈME MODE DE DESCRIPTION DE LA COURBE DU QUATRIÈME ORDRE DÉTERMINÉE PAR QUATORZE POINTS;

Par M. E. DE JONQUIÈRES.

Je vais maintenant indiquer le moyen de déterminer les deux points x et y, dont il est question au § XX du Mémoire qui précède. Ces points doivent, comme je l'ai dit, être tels, que les deux faisceaux

$$\text{(A)} \qquad (abcdefg\,x)\,[1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7],$$

$$\text{(B)} \qquad y\,[1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7],$$

soient *anharmoniques*. Le faisceau (A) est un faisceau de courbes du troisième ordre, qui ont sept points communs connus *à priori*, et qu'on doit assujettir à passer par un même huitième point x; mais quand cette condition sera remplie, ces courbes auront aussi en commun un neuvième point z; ce sont donc, par le fait, trois points x, y et z que je vais déterminer.

Dans la circonstance présente, les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sont infiniment voisins des sept autres points donnés, ce qui veut dire que chacune des cubiques composantes, telles que ($abcdefgx$ 1), est tangente en a à une droite donnée Oa. Mais comme la solution est la même, avec plus de généralité, quand ces points sont quelconques, c'est ce dernier cas que j'examinerai ici, en faisant remarquer que le problème dont il s'agit n'est autre chose que celui de décrire la courbe du quatrième ordre qui est déterminée par quatorze points donnés.

Menons par le point a une droite quelconque L; les sept courbes du faisceau (A) couperont L, chacune en deux points autres que a; les sept segments seront en involution, parce que les sept courbes passent par les huit mêmes points [*], et ils correspondront anharmoniquement aux sept cubiques.

[*] CHASLES. — *Principe de correspondance anharmonique.*

Cela posé, imaginons que par les huit points a, b, c, d, e, f, g, 1, on fasse passer une série de cubiques U_1, U'_1, U''_1, etc.; elles marqueront aussi sur L une série de segments en involution, que je désigne par (u_1). Il est évident que le segment inconnu, intercepté par la cubique $(abcdefg\,x\,1)$ sur L, fait partie de la série (u_1). Pareillement, que par les huit points a, b, c, d, e, f, g, 2, on fasse passer une série de cubiques U_2, U'_2, U''_2, etc.; on aura sur L une deuxième série de segments en involution que j'appelle (u_2), et dont fait partie le segment inconnu qu'y détermine la cubique $(abcdefg\,2\,x)$. Enfin chacune des cinq autres séries de cubiques qu'on obtiendra en adjoignant aux sept points a, b, c, d, e, f, g l'un des cinq points restants 3, 4, 5, 6, 7, déterminera sur L une série de segments en involution. J'appelle ces cinq séries (u_3), (u_4), (u_5), (u_6), (u_7), et je remarque que chacune d'elles contient le segment inconnu que marque sur L la cubique inconnue du faisceau (A) qui passe par le même point 3, ou 4, ou etc., duquel cette série résulte. Les séries de segments (u_1), (u_2), (u_3), etc., sont faciles à déterminer. Il suffit, pour chacune d'elles, de deux courbes quelconques U_1, U'_1, puisque deux segments déterminent une involution, et ces deux segments eux-mêmes se construiront avec la ligne droite et le cercle, sans qu'on ait besoin de tracer les courbes U_1, U'_1.

D'après cela, la question est ramenée à celle-ci :

« Étant donné sept séries distinctes de segments en involution sur
» une droite et sept points quelconques dans le même plan, 1, 2, 3, 4,
» 5, 6, 7, on demande de trouver sept segments, appartenant aux sept
» séries respectivement, et un point tels, que les sept segments soient
» en involution entre eux, et qu'ils correspondent anharmoniquement
» aux sept droites qui joignent le point trouvé aux sept points don-
» nés. »

Il est clair que ce problème contient la solution de celui qui est proposé; car, dès qu'on connaîtra deux segments mm', nn' satisfaisant à la condition précédente, il suffira de chercher les deux points d'intersection des courbes du troisième ordre $(abcdefg\,1\,mm')$ et $(abcdefg\,2\,nn')$; ces deux points x et z seront les deux points inconnus du faisceau (A).

Le problème que je viens d'énoncer est déjà plus simple que l'autre; mais il faut le simplifier encore.

Pour cela, soit C un cercle quelconque tracé dans le plan de la figure, et P un point de ce cercle. Les segments de la série en involution (u_1) sont vus du point P sous des angles dont les côtés interceptent dans le cercle des cordes concourant toutes en un même point α (*Géom. supér.*, n° **700**), et correspondant anharmoniquement aux segments eux-mêmes; d'ailleurs la corde qui correspond au segment inconnu que marque sur L la cubique $(abcdefgxz\,1)$ passe aussi par ce pôle α. Chacune des autres séries (u_2), (u_3), etc., donne lieu pareillement à un pôle β, γ, etc. Ainsi on aura sept pôles α, β, γ, δ, ε, φ, η, et si l'on peut déterminer deux points ξ et y tels, que les deux faisceaux de droites

$$\xi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi, \eta),$$
$$y\,[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7],$$

soient homographiques, la question sera résolue. Car si l'on mène la droite $\xi\alpha$, et qu'on projette du point P sur L la corde qu'elle détermine dans le cercle C, cette projection sera précisément le premier segment cherché mm'; et la projection de la corde déterminée dans le cercle par le rayon $\xi\beta$ fera connaître le second segment nn', qui suffit avec mm' pour donner la solution de la question.

Cette question est donc ramenée à la suivante : .

« Étant donnés sur un plan deux systèmes de sept points a, b, c, d,
» e, f, g et a', b', c', d', e', f', g', trouver deux points P et P' tels, que
» les deux faisceaux de droites

$$P\,[a, b, c, d, e, f, g],$$
$$P'[a', b', c'\, d', e', f', g'],$$

» soient homographiques. »

La question est déterminée parce qu'elle comporte quatre conditions, savoir, que les quatre rapports anharmoniques

$$P(abcd), \qquad P(abce), \qquad P(abcf), \qquad P(abcg),$$

soient égaux respectivement aux quatre rapports

$$P'(a'b'c'd'),\ P'(a'b'c'e'),\ P'(a'b'c'f'),\ P'(a'b'c'g'),$$

et qu'il faut précisément quatre *éléments* pour déterminer deux points, par exemple leurs distances à deux axes fixes, telles que leurs coordonnées x et y.

Par conséquent, pour le cas où l'on n'aurait que deux systèmes de six points au lieu de sept, ce qui ne comporte que trois conditions, la question est indéterminée. On ne peut pas prendre arbitrairement un point P; toutefois une infinité satisferont à la question. Il s'agit de déterminer leur lieu géométrique.

Cette courbe passe par les six points a, b, c, d, e, f, et n'a pas de points doubles en ces points. Car si l'on suppose le point P en a par exemple, et qu'on détermine le point P' tel, que le faisceau P' $(b'c'd'e'f')$ soit homographique au faisceau P $(bcdef)$, lequel point a toujours une position et une seule; comme la direction de la droite Pa est indéterminée, on peut dire que le faisceau P $(abcdef)$ est homographique au faisceau P' $(a'b'c'd'e'f')$. Ce qui prouve que la courbe cherchée passe par le point P qui est ici le point a; et elle n'y passe qu'une fois, c'est-à-dire qu'elle n'a pas de point double en ce point, parce qu'il n'existe qu'une position correspondante du point P'.

Cela posé, je vais démontrer qu'une conique quelconque C, menée par les quatre points a, b, c, d ne peut rencontrer la courbe cherchée qu'en deux points, ce qui prouvera que cette courbe est du troisième ordre.

Soit C' la conique homographique passant par les quatre points a', b', c', d'. Deux points fixes O, O', pris sur ces deux coniques respectivement, donnent lieu à deux rapports anharmoniques égaux O$(abcd)$ et O' $(a'b'c'd')$. Qu'on prenne sur la seconde un point P' arbitrairement, il lui correspond sur la première un point P, et un seul, tel que le rapport anharmonique P $(abce)$ est égal à P' $(a'b'c'e')$; et réciproquement, un point P étant pris sur la première conique, il lui correspond sur la seconde un seul point P' tel, que les deux rapports anharmoniques soient égaux.

Donc les deux droites OP et O'P', tournant autour des deux points fixes O et O', se correspondent *anharmoniquement*. Que l'on considère actuellement le rapport anharmonique P' $(a'b'c'f')$; il correspondra au point P' un point P_1 sur la conique C, tel que le rapport anharmonique P_1 $(abcf)$ sera égal à P' $(a'b'c'f')$; et la droite OP_1 correspondra anharmoniquement à la droite O' P'.

Donc les deux droites OP et OP_1 se correspondent entre elles anharmoniquement; c'est-à-dire qu'elles forment deux faisceaux homographiques. Ces deux faisceaux ont deux *rayons doubles*, dont chacun détermine sur la conique C un point P auquel correspond sur C' un point P' tel, que les deux rapports anharmoniques

$$P'(a'b'c'e') \quad \text{et} \quad P'(a'b'c'f')$$

sont égaux respectivement aux deux $P(abce)$ et $P(abcf)$. Le point P appartient donc à la courbe cherchée. Le second rayon double des deux faisceaux homographiques détermine un second point de la courbe. Donc enfin cette courbe est du troisième ordre.

Soient U celle que décrit le point P, et U' celle que décrit son homologue P'.

Si l'on considère les deux systèmes de six points a, b, c, d, e, g et a', b', c', d', e', g', on aura pareillement deux courbes du troisième ordre V, V' comme lieux géométriques des points P et P' qui satisfont à la condition de rendre anharmoniques les deux faisceaux

$$P(abcdeg) \quad \text{et} \quad P'(a'b'c'd'e'g').$$

Donc enfin les points d'intersection des courbes U et V, et ceux des courbes U' et V' donnent les positions des points cherchés P et P'; et comme les courbes ont deux à deux cinq points communs connus *à priori*, elles se couperont mutuellement en quatre autres points qu'on déterminera par des intersections de coniques sans tracer aucune courbe du troisième ordre, comme on sait. Mais trois seulement de ces quatre points satisfont à la question, le quatrième y étant étranger [*].

[*] *Nouv. Annales de Math.*, t. XIV, p. 50. — Il est facile de reconnaître que les quatre points d'intersection P, Q, R, S des deux courbes U et V ne peuvent pas satisfaire tous les quatre à la question, et par conséquent qu'il y en a au moins un qui lui est étranger. Car s'ils satisfaisaient tous les quatre, une troisième courbe, construite avec les six points a, b, c, d, f, g, passerait aussi par ces quatre points. Cette courbe et les deux premières auraient donc huit points communs, savoir a, b, c, d et les quatre P, Q, R, S. Par conséquent les trois courbes passeraient par un même neuvième point. Ce point serait e à l'égard des deux premières courbes, f à l'égard de la première et de la troisième, et g à l'égard de la deuxieme et de la troisième. Résultat impossible. Donc, etc.

Par conséquent la question qu'il s'agissait de résoudre dans cette *Note* admet trois solutions; ce qu'il ne faut pas entendre dans ce sens qu'on peut faire passer plus d'une courbe du quatrième ordre par les quatorze points donnés. Cette courbe W est unique; mais si l'on prend sur elle sept points a, b, c, d, e, f, g et sept autres points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, il y a trois manières différentes d'en choisir un autre x tel, que les sept courbes du troisième ordre

$$(abcdefg\,x)\quad [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$$

interceptent dans la courbe W des cordes qui vont toutes concourir en un même point y de cette courbe.

Si, au contraire, on prenait ce point de concours parmi les quatorze qui sont donnés, et qu'on cherchât deux points x, y tels, que le faisceau de cubiques

$$(abcdefxy)\ [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$$

fût anharmonique au faisceau de droites

$$g\,[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7],$$

le problème n'aurait qu'une seule solution. Mais ce n'est pas ici le lieu de faire connaître ce troisième mode de description de la courbe du quatrième ordre. On le trouvera dans un autre *Mémoire*, avec des considérations assez étendues sur la description de celles de ces courbes qui doivent avoir des points doubles ou un point triple donnés, *à priori*, de position et d'espèce.

Vaisseau l'Arcole, mars 1857.