JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

O. SCHLOMILCH

Réduction d'une intégrale multiple

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 206-212.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__206_0>

RÉDUCTION
D'UNE INTÉGRALE MULTIPLE;

Par M. O. SCHLOMILCH.

L'intégrale multiple dont nous ferons voir la réduction est celle-ci

$$\int\int\int \ldots f(x^2+y^2+z^2+\ldots)\,\varphi(\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots,$$

étendue à toutes les valeurs positives et négatives de $x, y, z,\ldots$, qui vérifient l'une ou l'autre des inégalités

$$0 < x^2+y^2+z^2+\ldots < 1,$$
$$\sigma_1 < \alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots < \sigma_2,$$

ou même simultanément les deux inégalités énoncées.

Examinons d'abord le cas le plus simple, c'est-à-dire l'intégrale double

$$S = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(k^2+u^2+v^2)\,\varphi(\varkappa+\lambda u+\mu v)\,du\,dv;$$

en prenant $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$, nous aurons

$$S = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f(k^2+r^2)\,\varphi(\varkappa+\lambda r\cos\theta+\mu r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

Ici l'on peut faire usage de la formule connue

$$\int_0^{2\pi}\psi(a\cos\theta+b\sin\theta)\,d\theta = 2\int_0^{\pi}\psi(\sqrt{a^2+b^2}.\cos\theta)\,d\theta.$$

et l'on aura

$$S = 2\int_0^{\infty}\int_0^{\pi} fk(^2+r^2)\,\varphi(\varkappa+\sqrt{\lambda^2+\mu^2}.\,r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

Par retour aux variables primitives u et v, on parvient alors à la formule

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(k^2+u^2+v^2)\,\varphi\,(\varkappa+\lambda u+\mu v)\,du\,dv\\ &= 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(k^2+u^2+v^2)\,\varphi\,(\varkappa+\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\,.\,u)\,du\,dv.\end{aligned}\right.$$

Cette transformation est avantageuse parce que la fonction φ, dans le second membre, ne renferme qu'une seule des variables u et v.

Quant à l'intégrale triple

$$T=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x^2+y^2+z^2)\,\varphi\,(\alpha x+\beta y+\gamma z)\,dx\,dy\,dz,$$

on trouve à l'aide de la formule (1), en prenant $k=x$, $u=y$, $v=z$, $\varkappa=\alpha x$, $\lambda=\beta$, $\mu=\gamma$,

$$T=2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(x^2+y^2+z^2)\,\varphi\,(\alpha x+\sqrt{\beta^2+\gamma^2}\,.\,y)\,dx\,dy\,dz.$$

Ici la formule (1) est de nouveau applicable; elle donne

$$T=4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(x^2+y^2+z^2)\,\varphi\,(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\,.\,x)\,dx\,dy\,dz.$$

On voit sur-le-champ que ce procédé si simple peut servir à la transformation d'une intégrale multiple du même genre, et que le résultat sera

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots f(x^2+y^2+z^2+\ldots)\,\varphi(\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots\\ &\quad= 2^{n-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\cdots f(x^2+y^2+z^2+\ldots)\,\varphi\,(\rho x)\,dx\,dy\,dz\ldots,\end{aligned}\right.$$

où l'on a désigné par n le nombre des variables x, y, z,..., et par ρ la quantité

$$(3)\qquad \rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots}.$$

L'intégrale prise par rapport à y, z,..., est facile à réduire à l'aide de la formule connue [*]

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \mathrm{F}(\xi^2+\eta^2+\ldots)\,d\xi\,d\eta\ldots = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{2^{m-1}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int_0^\infty y^{m-1}\,\mathrm{F}(y^2)\,dy,$$

(m le nombre des variables ξ, η,...); c'est de cette manière que l'on parvient à la formule remarquable

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \ldots f(x^2+y^2+z^2+\ldots)\,\varphi(\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots \\ &\qquad = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty f(x^2+y^2)\,\varphi(\rho x)\,y^{n-2}\,dx\,dy. \end{aligned}\right.$$

Maintenant remplaçons la fonction $f(t)$ par une autre qui coïncide avec $f(t)$ si $t<1$, et qui se réduise à zéro dans le cas contraire. Alors les intégrations au premier membre s'étendent à toutes les valeurs positives et négatives de x, y, z,..., qui vérifient l'inégalité

$$0 < x^2+y^2+z^2+\ldots < 1;$$

quant aux deux intégrations dans le second membre, elles se rappor-

---

[*] Cette formule découle comme on sait d'un théorème de M. Liouville, savoir

$$\int\int\ldots x^{p-1}y^{q-1}\ldots \mathrm{F}(x+y+\ldots)\,dx\,dy\ldots = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)\ldots}{\Gamma(p+q+\ldots)}\int_0^h t^{p+q+\ldots-1}\,\mathrm{F}(t)\,dt,$$
$$h > x+y+\ldots > 0.$$

Nous remarquerons à cette occasion qu'il y a encore une formule plus générale que nous avons démontrée ailleurs; c'est la suivante :

$$\int\int\ldots \frac{x^{p-1}y^{q-1}\ldots \mathrm{F}(x+y+\ldots)}{(1+\alpha x+\beta y+\ldots)^{p+q+\ldots}}\,dx\,dy\ldots = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+\ldots)}\int_0^h \frac{t^{p+q+\ldots-1}\,\mathrm{F}(t)\,dt}{(1+\alpha t)^p(1+\beta t)^q\ldots},$$
$$h > x+y+\ldots > 0.$$

Cette formule offre l'avantage de contenir les constantes arbitraires (α, β,...) que l'on peut varier par différentiation ou par intégration.

tent à toutes les valeurs positives et négatives de x et à toutes les valeurs positives de y qui satisfont à la condition

$$0 < x^2 + y^2 < 1.$$

De là on tire sur-le-champ la formule

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\iiint \ldots f(x^2+y^2+z^2+\ldots)\,\varphi\,(\alpha x+\beta y+\gamma z\ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots \\ &\quad = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-1}^{+1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2+y^2)\,\varphi\,(\rho x)\,y^{n-2}\,dx\,dy, \\ &\text{Condition :}\quad 0 > x^2+y^2+z^2+\ldots < 1. \end{aligned}\right.$$

Supposons de plus que dans la formule (1), la fonction $\varphi(s)$ soit telle que l'on ait

$$\varphi(s) = 0$$

pour toutes les valeurs de s non comprises dans l'intervalle de $s = \sigma_1$ à $s = \sigma_2$; alors nous aurons

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\iiint \ldots f(x^2+y^2+z^2+\ldots)\,\varphi\,(\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots \\ &\quad = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{\frac{\sigma_1}{\rho}}^{\frac{\sigma_2}{\rho}}\int_0^{\infty} f(x^2+y^2)\,\varphi\,(\rho x)\,y^{n-2}\,dx\,dy, \\ &\text{Condition :}\quad \sigma_1 < \alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots < \sigma_2. \end{aligned}\right.$$

Enfin si l'on veut étendre les intégrations à toutes les valeurs positives et négatives de x, y, z,. ., qui vérifient simultanément les deux conditions énoncées, alors il faut aussi que l'on ait, au second membre,

$$-1 < x < +1, \quad 0 < y < \sqrt{1-x^2},$$

et en même temps

$$\frac{\sigma_1}{\rho} < x < \frac{\sigma_2}{\rho}, \quad 0 < y < \infty.$$

De là on tire aisément une formule que l'on peut présenter de la manière suivante :

$$
(7)\left\{\begin{aligned}
&\iiint\cdots f(x^2+y^2+z^2+\ldots)\,\varphi(\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots\\
&\quad=\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2+y^2)\,\varphi(\rho x)\,y^{n-2}\,dx\,dy,\\
&\quad\text{Conditions :}\quad 0<x^2+y^2+z^2+\ldots<1,\\
&\qquad\qquad\text{et}\quad \sigma_1<\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots<\sigma_2;
\end{aligned}\right.
$$

les valeurs de x_1 et x_2 sont

$$
\begin{aligned}
&\text{si}\quad -1<\frac{\sigma_1}{\rho}<\frac{\sigma_2}{\rho}<+1, && x_1=\frac{\sigma_1}{\rho}\quad\text{et}\quad x^2=\frac{\sigma_2}{\rho},\\
&\text{si}\quad -1>\frac{\sigma_1}{\rho}<\frac{\sigma_2}{\rho}<+1, && x_1=-1\quad\text{et}\quad x_2=\frac{\sigma_2}{\rho},\\
&\text{si}\quad -1>\frac{\sigma_1}{\rho}<\frac{\sigma_2}{\rho}>+1, && x_1=\frac{\sigma_1}{\rho}\quad\text{et}\quad x_2=+1,\\
&\text{si}\quad -1>\frac{\sigma_1}{\rho}<\frac{\sigma_2}{\rho}>+1, && x_1=-1\quad\text{et}\quad x_2=+1.
\end{aligned}
$$

Les formules (5), (6) et (7) deviennent un peu plus générales quand on remplace $x, y, z,\ldots$, par $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c},\ldots$, et $\alpha, \beta, \gamma,\ldots$, par $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma,\ldots$, ce qui donne

$$\rho=\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2+\ldots}.$$

Dans le cas très-simple

$$f(t)=1,\quad \varphi(s)=1,\quad n=3,\quad \sigma_1=\mu<1,\quad \sigma_2=1,$$

l'intégrale

$$V=\iiint dx\,dy\,dz,$$

$$\mu<\alpha x+\beta y+\gamma z<1,\quad 0<\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1,$$

donne le volume de la partie d'un ellipsoïde comprise entre les deux plans parallèles dont les équations sont

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \mu,$$

et

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 1;$$

on trouve à l'aide de la formule (7) que ce volume est égal à

$$2\pi abc \int_{\frac{\mu}{\rho}}^{\frac{1}{\rho}} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dx\,dy = \pi abc\left(\frac{1-\mu}{\rho} - \frac{1}{3}\,\frac{1-\mu^3}{\rho^3}\right),$$

$$\rho = \sqrt{a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2}.$$

Ce résultat se vérifie aisément par les méthodes ordinaires.

Prenons maintenant dans la formule (5)

$$n = 3, \quad f(t) = 1,$$

et

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\cos\omega, \quad z = r\sin\theta\sin\omega;$$

alors nous trouvons

$$\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha r\cos\theta + \beta r\sin\theta\cos\omega + \gamma r\sin\theta\sin\omega)\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\omega$$
$$= \pi \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)\varphi(\rho x)\,dx, \qquad \left(\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}\right).$$

De cette formule on peut déduire un théorème de Poisson ; en effet, si l'on pose

$$\int_0^1 x^2 \varphi(\rho x)\,dx = \psi(\rho),$$

ou

$$\int_0^\mu t^2 \varphi(t)\,dt = \mu^3 \psi(\mu),$$

on trouve d'abord par différentiation

$$\varphi(\mu) = 3\psi(\mu) + \mu\psi'(\mu),$$

et d'après cela :

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta\cos\omega+\gamma\sin\theta\sin\omega)\sin\theta\,d\theta\,d\omega$$

$$=\pi\int_{-1}^{+1}(1-x^2)[3\psi(\rho x)+\rho x\,\psi'(\rho x)]\,dx=2\pi\int_{-1}^{+1}\psi(\rho x)\,dx,$$

ce qui est le théorème mentionné.