JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

TCHEBICHEF

Sur l'intégration des différentielles qui contiennent une racine carrée d'un polynôme du troisième ou du quatrième degré

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 1-42.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__1_0>

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

SUR

L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES

QUI CONTIENNENT

UNE RACINE CARRÉE D'UN POLYNOME DU TROISIÈME OU DU QUATRIÈME DEGRÉ ;

PAR M. TCHEBICHEF.

(Tiré des *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 6ᵉ série, Sciences mathématiques et physiques, tome VI.)

§ I.

Dans le Mémoire *sur l'intégration des différentielles irrationnelles*, publié en 1853 dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville, nous avons donné une méthode pour trouver la partie algébrique dans l'expression de l'intégrale $\int \frac{f_0 x}{F_0 x} \frac{dx}{\sqrt{\theta x}}$, en tant qu'elle est possible sous forme finie, et déterminer séparément tous les termes logarithmiques à l'aide de certaines conditions qu'ils doivent vérifier. A présent nous allons montrer comment on peut trouver, d'après ces conditions, les termes logarithmiques, dans le cas le plus simple et le plus intéressant, savoir : celui où la différentielle contient une racine carrée d'un polynôme du troisième ou du quatrième degré. Faute de méthode générale, on ne connaît que des cas très-particuliers, où une pareille différentielle s'intègre sous forme finie; dans plusieurs autres cas, pour lesquels cette intégration a aussi lieu, on n'y parvient qu'en essayant différentes transformations, et le plus souvent on renonce à l'idée de chercher l'intégrale après avoir fait beaucoup de tentatives sans succès. Or, d'après nos recherches citées plus haut, les méthodes particulières et les essais de différentes transformations qu'on emploie dans cette intégration seront remplacés par une méthode générale et directe dès qu'on sera parvenu à définir les termes logarithmiques dans la valeur de

$$\int \frac{f_0 x}{F_0 x} \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \lambda}},$$

d'après les conditions que nous avons trouvées pour leur détermination. C'est ce que nous allons faire ici, en donnant la méthode d'après laquelle la recherche de ces termes se réduit toujours à cette question résolue par Abel :

Trouver toutes les différentielles de la forme $\frac{\rho\, dx}{\sqrt{R}}$, *où* ρ *et* R *sont des fonctions entières de* x, *dont les intégrales puissent s'exprimer par une formule de la forme*

$$\log \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}}.$$

(*OEuvres complètes,* tome I, page 33.)

Cette intégration sera donc due à Abel, et par le principe fondamental, d'où nous sommes partis dans nos recherches sur l'intégration des différentielles irrationnelles, et par la méthode de résoudre la question citée, à laquelle se réduit finalement la détermination des termes logarithmiques dans la valeur de

$$\int \frac{f_0 x}{F_0 x} \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \lambda}}.$$

Ainsi nos recherches, comme nous nous plaisons à le croire, rempliront, sous un certain rapport, une lacune qui restait entre les Mémoires de ce grand géomètre, où il donne la forme générale des intégrales des différentielles algébriques, en tant qu'elles sont possibles sous forme finie, et ceux où il cherche leur valeur, en faisant une hypothèse particulière.

La réduction de nos équations, dont nous venons de parler, est indispensable aussi pour simplifier l'intégration des différentielles plus compliquées. Quant aux différentielles qui ne contiennent sous le signe du radical carré qu'une fonction du premier ou du second degré, cette réduction conduit immédiatement à trouver la partie logarithmique de leurs intégrales. Outre cela, cette réduction est remarquable par différents résultats relatifs à la nature des intégrales qu'on peut en tirer, et cela nous fournit un rapprochement très-intéressant de la construction des valeurs irrationnelles avec la règle et le compas, et l'intégration des différentielles sous forme finie. Ainsi l'on verra que la somme des nombres n^0, n', n'', ... étant impaire, l'intégrale

$$\left(n^0 x + \frac{n'\Delta(a')}{x-a'} + \frac{n''\Delta(a'')}{x-a''} + \ldots + C\right)\frac{dx}{\Delta(x)},$$

où nous avons fait, pour abréger,

$$\Delta(x) = \sqrt{x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \lambda},$$

ne peut être exprimée sous forme finie, si, d'après les quantités

$$a',\ a'', \ldots,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \lambda,$$

et à l'aide de la règle et du compas, on ne peut construire aucune des racines de l'équation

$$x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \lambda = 0.$$

Par exemple, on reconnaît que les intégrales

$$\int \frac{x + C}{\sqrt{x^4 + 2x^2 - 8x + 9}}\,dx,$$

$$\int \frac{n^0 x + \frac{3(2n' - n^0 - 1)}{x} + C}{\sqrt{x^4 + 2x^2 - 8x + 9}}\,dx,$$

$$\int \frac{n^0 x + \frac{2n'}{x-1} + \frac{3(2n'' - n^0 - n' - 1)}{x} + C}{\sqrt{x^4 + 2x^2 - 8x + 9}}\,dx,$$

. . . .

sont impossibles sous forme finie, parce que, à l'aide de la règle et du compas, on ne peut pas inscrire dans le cercle un polygone régulier de sept côtés, ce qui est nécessaire pour la construction des racines de l'équation

$$x^4 + 2x^2 - 8x + 9 = 0.$$

Il y a d'autres questions de l'analyse transcendante, où la même méthode de réduction peut être avantageusement employée, savoir quand on cherche à exprimer la somme des intégrales

$$\int^{x_1} \frac{f_0 x}{\alpha_i x + \beta_i} \frac{dx}{\sqrt{\theta x}} + \int^{x_{ll}} \frac{f_0 x}{\alpha_i x + \beta_i} \frac{dx}{\sqrt{\theta x}} + \ldots,$$

par une somme d'un nombre déterminé d'intégrales semblables, en y ajoutant une certaine fonction algébrique et logarithmique.

Enfin, cette même méthode, appliquée aux nombres, donne un procédé à l'aide duquel on trouvera la représentation d'un nombre donné par la forme $x^2 - ny^2$ toutes les fois que ce nombre peut être mis sous cette forme, et qu'on connaît la valeur de x pour laquelle la forme $x^2 - n$ est divisible par ce nombre. Dans le cas de $n = -1$, cela se réduit à la méthode ingénieuse que M. Hermite a employée pour démontrer que tous les nombres premiers de la forme $4k + 1$ sont toujours décomposables en une somme de deux carrés, et pour effectuer en même temps cette décomposition.

§ II.

Si dans les formules de notre Mémoire cité plus haut on fait

$$m = 2, \qquad \Delta = \sqrt[m]{\theta x} = \sqrt{\theta x},$$

on trouve que l'équation

$$x^m - 1 = 0,$$

dont l'une des racines primitives nous a servi pour composer des nombres complexes, se réduit à

$$x^2 - 1 = 0,$$

et comme la racine primitive de cette équation est égale à -1, les nombres complexes que nous avons désignés par

$$M_i^0,\ M_i',\ M_i'',\ldots$$

deviennent réels et rationnels. De plus, la forme générale des termes logarithmiques

$$A\log\left[\varphi(\Delta)\,.\,\varphi^{\alpha}(\alpha\Delta)\,.\,\varphi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta)\ldots\varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta)\right],$$

à cause de $m=2$, $\Delta=\sqrt{\theta x}$, devient

$$A\log\left[\varphi\left(\sqrt{\theta x}\right).\varphi^{-1}\left(-\sqrt{\theta x}\right)\right]=A\log\frac{\varphi(\sqrt{\theta x})}{\varphi(-\sqrt{\theta x})},$$

et comme φ est une fonction entière, on aura

$$\varphi\left(\sqrt{\theta x}\right)=X_0+X\sqrt{\theta x},\qquad \varphi\left(-\sqrt{\theta x}\right)=X_0-X\sqrt{\theta x},$$

où X_0, X sont des fonctions entières.

Donc, les termes logarithmiques, dans la valeur de l'intégrale $\int\frac{Fx}{fx}\frac{dx}{\sqrt{\theta x}}$, s'écriront ainsi :

$$A\log\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}.$$

En cherchant à déterminer ces termes, nous avons trouvé que le coefficient A sera égal à une valeur connue, divisée par un nombre entier inconnu, et si l'on désigne ce nombre par n_i, le degré de la fonction $\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$ sera exprimé par le produit $n_i.M_i^0$, où M_i^0 est une valeur connue. De plus, cette fonction, pour toutes les valeurs finies de x, sera en rapport fini avec la puissance $n_i^{\text{ième}}$ de la fonction

$$(x-x')^{M_i'}.(x-x'')^{M_i''}.(x-x''')^{M_i'''}\ldots\left[x-x^{(\lambda-1)}\right]^{M_i^{\lambda-1}}\left[x-x^{(\lambda-1)}\right],$$

où

$$M_i',\ M_i'',\ M_i''',\ldots,\ M_i^{\lambda-1},$$

dans le cas que nous examinons, sont réels et rationnels. En passant à la détermination des inconnus n_i, X_0, X, nous remarquons que n_i doit être susceptible de réduire les produits

$$n_i M_i^0,\ n_i M_i',\ n_i M_i'',\ n_i M_i''',\ n_i M_i^{\lambda-1}$$

à des nombres entiers; car le produit $n_i M_i^0$ désigne le degré de $\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}}$, qui ne peut être fractionnaire, X_0, X étant des fonctions entières; la même chose a lieu relativement aux produits

$$n_i M_i',\ n_i M_i'',\ n_i M_i''', \ldots,\ n_i M_i^{\lambda-1},$$

qui sont égaux aux exposants de $x - x'$, $x - x''$, $x - x'''$, ..., $x - x^{(\lambda-1)}$ dans les premiers termes du développement de $\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}}$ suivant les puissances croissantes de $x - x'$, $x - x''$, $x - x'''$, ..., $x - x^{(\lambda-1)}$. Donc, n_i doit être divisible par le plus petit dénominateur auquel les quantités

$$M_i^0,\ M_i',\ M_i'', \ldots,\ M_i^{\lambda-1}$$

peuvent être réduites, et par conséquent, si l'on désigne ce dénominateur par σ et le quotient $n_i : \sigma$ par $+\rho$ ou $-\rho$, on aura

$$n_i = \pm \rho\sigma,$$

où nous prendrons celui des deux signes qui appartient à la valeur de M_i^0. D'après cela, $n_i M_i^0$, le degré de $\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}}$, sera exprimé par $\pm \sigma M_i^0 \rho$, où $\pm\sigma M_i^0$ se réduira à un nombre entier et positif. En dénotant ce nombre par π et désignant d'après la notation d'Abel le degré de $\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}}$ par $\delta \frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}}$, nous aurons, relativement à ρ, cette équation

$$\delta \frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}} = \pi\rho.$$

Quant à la fonction qui, pour toutes les valeurs finies de x, reste dans un rapport fini avec la fonction $\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}}$, en vertu de $n_i = \pm \rho\sigma$, elle se réduit à

$$\left[(x-x')^{M'_i}.(x-x'')^{M''_i}.(x-x''')^{M'''_i}\ldots[x-x^{(\lambda-1)}]^{M_i^{\lambda-1}}.[x-x^{(\lambda+i)}]\right]^{\pm\rho\sigma},$$

et comme les produits $\sigma M'_i$, $\sigma M''_i, \ldots, \sigma M_i^{(\lambda-1)}$, d'après la propriété du nombre σ, se réduisent à des nombres entiers, la fonction

$$\left[(x-x')^{M'_i}.(x-x'')^{M''_i}.(x-x''')^{M'''_i}\ldots[x-x^{(\lambda-1)}]^{M_i^{\lambda-1}}.[x-x^{(\lambda+i)}]\right]^{\pm\sigma}.$$

ne peut être que rationnelle. Donc, si nous faisons, pour abréger,

$$\left[(x-x')^{M'_i}.(x-x'')^{M''_i}.(x-x''')^{M'''_i}\ldots[x-x^{(\lambda-1)}]^{M_i^{\lambda-1}}.(x-x_{(\lambda+i)})\right]^{\pm\sigma} = \frac{u}{v}.$$

où u, v sont des fonctions entières, et que nous convenions de désigner par la lettre T toutes les fonctions qui restent finies tant que x n'est pas infini, la propriété de la fonction $\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}}$ en question sera exprimée par cette équation

$$\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}} = T\left(\frac{u}{v}\right)^{\rho}.$$

C'est d'après cette équation, combinée avec la suivante :

$$\partial\,\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}} = \pi\rho,$$

que nous devons chercher le nombre ρ et les fonctions X_0 et X.

Ces équations seront le plus souvent très-compliquées à cause du degré élevé des fonctions u et v, et de la valeur considérable de π. Or nous allons montrer qu'on peut les réduire à la forme, où le degré de uv, plus le nombre π, sera au-dessous du degré de $\sqrt{\theta x}$.

§ III.

Il n'est pas difficile de s'assurer que, θ_1, θ_2 étant deux fonctions entières dont le produit est égal à θx, et p et q des fonctions entières quelconques, on peut mettre la fonction cherchée $\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$ sous la forme

$$\left(\frac{p\sqrt{\theta_1}+p\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-p\sqrt{\theta_2}}\right)^\rho \frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}},$$

en choisissant convenablement les fonctions entières P_0 et Q_0. En effet, le quotient

$$\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}} : \left(\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}\right)^\rho$$

se réduit à

$$\frac{(X_0+X\sqrt{\theta x})(p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2})^\rho}{(X_0-X\sqrt{\theta x})(p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2})^\rho} = \frac{(X_0+X\sqrt{\theta x})(p\theta_1-q\sqrt{\theta x})^\rho}{(X_0-X\sqrt{\theta x})(p\theta_1+q\sqrt{\theta x})^\rho},$$

expression qu'on peut mettre sous la forme $\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}$, en dénotant par P_0 la partie rationnelle du produit $(X_0+X\sqrt{\theta x})(p\theta_1-q\sqrt{\theta x})^\rho$, et par $Q_0\sqrt{\theta x}$ celle qui a pour facteur $\sqrt{\theta x}$.

Mais, si l'on substitue dans les équations

$$(1) \qquad \frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}} = T\left(\frac{u}{v}\right)^\rho, \qquad \delta\frac{X^0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}} = \pi\rho$$

le produit $\left(\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}\right)^\rho \frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}$ à la place de $\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$, elles se réduisent à celles-ci :

$$\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}} = T\left(\frac{u}{v}\cdot\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}\right)^\rho,$$
$$\delta\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}} = \left(\pi-\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}\right)\rho,$$

et si les fonctions p et q sont choisies de manière à ce qu'elles vérifient les équations

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}} = \mathrm{T}\,\frac{u}{v}\cdot\frac{v'}{u'}, \qquad \delta\,\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}} = \pi_1,$$

les équations qui déterminent les nouvelles inconnues P_0 et Q_0 deviennent

$$(2)\qquad \frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}} = \mathrm{T}\left(\frac{u'}{v'}\right)^\rho, \qquad \delta\,\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}} = (\pi-\pi_1)\rho.$$

Ces équations seront plus ou moins simples selon les valeurs de p et q, qu'on emploiera dans la réduction dont nous venons de parler. Or nous allons montrer que, dans les équations réduites (2), la somme du degré de $u'v'$ et de la valeur numérique de $\pi-\pi_1$ sera au-dessous du degré de $\sqrt{\theta x}$, si l'on prend pour p et q les fonctions qu'on trouve de la manière suivante :

1°. On cherche une fonction entière S pour laquelle les fractions $\frac{S\sqrt{\theta_1}+\sqrt{\theta_2}}{u}$, $\frac{S\sqrt{\theta_1}-\sqrt{\theta_2}}{v}$ ne deviennent pas infinies, tant que x reste fini.

2°. On développe $\dfrac{S-\frac{\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{\theta_1}}}{uv}$ en fraction continue, et parmi les fractions réduites on trouve une fraction dont le dénominateur est d'un degré moins élevé que $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$, mais qui est suivie d'une fraction dont le dénominateur est d'un degré plus élevé que $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$.

3°. En dénotant cette fraction par $\frac{M}{N}$, on prend

$$(3)\qquad q = N, \qquad p = SN - Muv.$$

En effet, d'après les équations (3) et la propriété de la fonction S, on voit que les expressions

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{u}, \qquad \frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{v}$$

ne deviennent infinies pour les valeurs finies de x. Donc, si l'on dénote par

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\ \beta,\ \beta_1,\ \beta_2,\ldots,$$

les valeurs de x qui rendent ces expressions égales à zéro, et par

$$f,\ f_1,\ f_2,\ldots,\ g,\ g_1,\ g_2,\ldots$$

les exposants de

$$x-\alpha,\quad x-\alpha_1,\quad x-\alpha_2,\ldots,$$
$$x-\beta,\quad x-\beta_1,\quad x-\beta_2,\ldots$$

dans leur développement suivant les puissances croissantes de ces différences, on aura

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{u} = \mathrm{T}_1(x-\alpha)^f(x-\alpha_1)^{f_1}(x-\alpha_2)^{f_2}\ldots,$$

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{v} = \mathrm{T}_2(x-\beta)^g(x-\beta_1)^{g_1}(x-\beta_2)^{g_2}\ldots,$$

où T_1, T_2 désignent des fonctions qui restent finies pour toutes les valeurs finies de x.

Mais, comme les exposants de $x-\alpha$, $x-\alpha_1$, $x-\alpha_2,\ldots$, $x-\beta$, $x-\beta_1$, $x-\beta_2,\ldots$ dans le développement de $\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{u}$, $\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{v}$ ne peuvent contenir d'autres fractions que $\frac{1}{2}$, ces équations se réduiront à cette forme

$$(4)\qquad \frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{u} = \mathrm{T}_1 v'\sqrt{w}, \qquad \frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{v} = \mathrm{T}_2 u'\sqrt{w'},$$

où u', v', w, w' sont des fonctions entières, dont les deux dernières ne contiennent que des facteurs simples. Par la multiplication de ces équations nous trouvons

$$\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv} = T_1 T_2 u' v' \sqrt{ww'},$$

et, par conséquent,

$$\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uvu'v'\sqrt{ww'}} = T_1 T_2.$$

Cette équation prouve évidemment que $T_1 T_2$ est une constante; car, d'après la propriété des fonctions T_1, T_2, leur produit ne devient ni zéro ni infini pour x fini, tandis que cette équation montre que le carré de $T_1 T_2$ est une fraction rationnelle $\frac{(p^2\theta_1 - q^2\theta_2)^2}{(uvu'v')^2 ww'}$ qui ne peut rester finie pour toutes les valeurs finies de x, à moins qu'elle ne se réduise à une constante. Donc

$$T_1 T_2 = C,$$

et, par conséquent, l'équation précédente devient

$$\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uvu'v'\sqrt{ww'}} = C. \tag{5}$$

Or cette égalité suppose que ww' est un carré parfait, et comme les fonctions w, w' n'ont que des facteurs simples, cela ne peut avoir lieu à moins qu'on n'ait

$$w = w'. \tag{6}$$

D'après cela, en divisant les équations (4) l'une par l'autre, on trouve

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}} = T\frac{u}{v}\cdot\frac{v'}{u'},$$

en mettant, pour abréger, T à la place de $\frac{T_1}{T_2}$.

Il nous reste maintenant à prouver que si l'on fait

$$\pi_1 = \partial\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}},$$

la somme de $\delta(u'v')$ avec la valeur numérique de $\pi - \pi_1$ sera au-dessous de $\delta\sqrt{\theta x}$. Or, selon que $\pi - \pi_1$ est positif ou négatif, cette somme sera égale à

$$\delta(u'v') + \pi - \pi_1 \qquad \text{ou à} \qquad \delta(u'v') - \pi + \pi_1.$$

Nous allons montrer que ces deux quantités sont effectivement plus petites que $\delta\sqrt{\theta x}$, tant que p et q sont déterminés comme nous l'avons dit.

Pour s'en assurer, nous remarquons que, d'après la substitution de δx^π et $\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}$ à la place de π et π_1, ces quantités deviennent

$$\delta(u'v') + \delta\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}x^\pi, \qquad \delta(u'v') + \delta\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}x^{-\pi}.$$

Mais, d'après l'équation (5), nous trouvons

$$\delta(u'v') \overline{\overline{<}}\, \delta\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv}.$$

Donc, les quantités précédentes sont égales ou inférieures à celles-ci :

$$\delta\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv} + \delta\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}x^\pi = 2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{\frac{\pi}{2}},$$

$$\delta\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv} + \delta\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}x^{-\pi} = 2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Mais la première de ces quantités, par la substitution des valeurs de p et q d'après (3), devient

$$2\delta\frac{(\mathrm{SN}-\mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1}-\mathrm{N}\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{\frac{\pi}{2}} = \delta\sqrt{\theta x} + 2\delta\left(\frac{\mathrm{S}-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv} - \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\right)\mathrm{N}\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^\pi}{\sqrt{\theta x}}},$$

quantité qui est au-dessous de $\delta\sqrt{\theta x}$, tant que $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$, dans la série des fractions réduites de $\frac{S - \sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$, est suivie par une fraction dont le dénominateur est d'un degré plus élevé que $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$. Quant à la seconde quantité, nous remarquons qu'elle peut être mise sous cette forme

$$2\delta\left[\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}} x^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{2q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}} x^{-\frac{\pi}{2}}\right],$$

et, par conséquent, qu'elle ne surpasse pas au moins l'une de ces deux valeurs

$$2\delta\left[\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}} x^{-\frac{\pi}{2}}\right] = 2\delta\left[\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}} x^{\frac{\pi}{2}}\right] - 2\pi,$$

$$2\delta\frac{q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}} x^{-\frac{\pi}{2}} = \delta\sqrt{\theta x} - 2\delta\cdot\frac{1}{q}\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}.$$

Mais comme nous venons de trouver que $2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}} x^{\frac{\pi}{2}}$ est plus petit que $\delta\sqrt{\theta x}$, et que nous avons pris $q = N$ d'un degré moins élevé que $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$, il s'ensuit que ces deux quantités sont au-dessous de $\delta\sqrt{\theta x}$. Ainsi l'on parvient à s'assurer que les valeurs de p et q, déterminées d'après la méthode énoncée, sont effectivement susceptibles par la substitution

$$\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}} = \left(\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}\right)^\rho \frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}},$$

de réduire les équations

$$\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}} = T\left(\frac{u}{v}\right)^\rho, \qquad \delta\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}} = \pi\rho,$$

à ces autres

$$\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = T\left(\frac{u'}{v'}\right)^\rho, \qquad \delta\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = (\pi - \pi_1)\rho,$$

où la somme du degré de $u'v'$, plus la valeur numérique de $\pi - \pi_1$, est au-dessous du degré de $\sqrt{\theta x}$.

Nous montrerons maintenant que cette réduction sera toujours possible, tant que les équations primitives elles-mêmes ne remplissent pas la condition

$$\delta(uv) + \pi < \delta\sqrt{\theta x}.$$

Il est facile de remarquer que la détermination de p et q, dont nous venons de parler, ne suppose que l'existence de deux fractions réduites de $\frac{S - \sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$ telles, que l'une ait pour dénominateur une fonction d'un degré moins élevé que $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$, tandis que la suivante a le dénominateur d'un degré plus élevé que $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$.

Or nous verrons que cela aura toujours lieu, tant que la condition $\delta(uv) + \pi < \delta\sqrt{\theta x}$ n'est pas remplie, et que l'on décompose convenablement la fonction θx en deux facteurs $\theta_1 . \theta_2$, savoir, de manière que $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$ soit d'un degré fractionnaire. En effet, dans ces suppositions, le degré de $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$ est au-dessus de zéro, et, par conséquent, si l'on commence la série des fractions réduites de $\frac{S - \sqrt{\frac{\theta_2}{\theta}}}{uv}$ par $\frac{0}{1}$, où le dénominateur est du degré zéro, on est sûr de trouver parmi elles au moins une fraction dont le dénominateur soit d'un degré moins élevé que $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^\pi}{\sqrt{\theta}}}$.

Mais alors, dans la série infinie des fractions réduites de $\dfrac{S-\sqrt{\dfrac{\theta_2}{\theta_1}}}{\sqrt{uv}}$, on trouvera nécessairement deux fractions consécutives telles, que l'une a pour dénominateur une fonction d'un degré moins élevé que $\sqrt{\dfrac{uv\theta_1.x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$, tandis que le dénominateur de l'autre est d'un degré plus élevé que $\sqrt{\dfrac{uv\theta_1.x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$, si toutefois aucune des fractions réduites de $\dfrac{S-\sqrt{\dfrac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$ n'a son dénominateur du même degré que $\sqrt{\dfrac{uv\theta_1.x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$. Or cela n'aura pas lieu, tant que cette fonction est d'un degré fractionnaire; car, pour θx de degré pair, toutes les fractions réduites de $\dfrac{S-\sqrt{\dfrac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}=\dfrac{S-\dfrac{\theta_2}{\sqrt{\theta x}}}{uv}$ ne contiennent que les puissances entières de x, et pour θx de degré impair, le degré de $\sqrt{\dfrac{uv\theta_1.x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$ a la forme $k\pm\frac{1}{4}$, tandis que les degrés fractionnaires de x, dans la fonction $\dfrac{S-\sqrt{\dfrac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$, sont de la forme $k+\frac{1}{2}$.

Nous remarquerons encore que, dans la série des fractions réduites de $\dfrac{S-\sqrt{\dfrac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}=\dfrac{S-\dfrac{\theta_2}{\sqrt{\theta x}}}{uv}$, on ne rencontrera des puissances fractionnaires de x qu'après la fraction $\frac{M}{N}$, qui sert pour trouver les fonctions p et q. En effet, les puissances fractionnaires de x ne peuvent y entrer que dans le cas où θx est de degré impair. Mais alors toutes les fonctions de la forme $\dfrac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$ sont évidemment du degré o, et par conséquent $\pi=0$. Or, π étant égal à zéro, d'après ce que nous venons de dire sur la détermination de p et q, le dénominateur N sera d'un degré moins élevé que $\sqrt{\frac{uv\,\theta_1}{\sqrt{\theta x}}}$, et avec un tel dénominateur la fraction réduite ne donne, en général, la fonction, d'où elle résulte par le développement en fraction continue, qu'avec une exactitude jusqu'aux quantités de l'ordre plus élevé que $\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{uv\,\theta_1}{\sqrt{\theta x}}}\right)^2} = \frac{\sqrt{\theta x}}{\theta_1}\,\frac{1}{uv} = \frac{1}{uv}\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}$. Mais la partie irrationnelle de $\frac{S - \sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$ est justement de cet ordre.

Donc, dans ce cas, cette partie n'a aucune influence sur la fraction $\frac{M}{N}$, de manière qu'on peut la supprimer dans la formule $\frac{S - \sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$, et chercher $\frac{M}{N}$ par le développement seulement de $\frac{S}{uv}$ en fraction continue.

§ IV.

Nous allons montrer maintenant le parti que l'on peut tirer de la réduction, qui vient d'être exposée, pour la solution des équations

$$\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}} = T\left(\frac{u}{v}\right)^\rho, \qquad \partial\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}} = \pi\rho,$$

dans le cas, où θx est du troisième ou du quatrième degré. Après avoir trouvé les fonctions p et q, comme nous l'avons dit, et si l'on fait

$$\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}} = \left(\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}\right)^\rho \frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}},$$

on parvient à ces équations

$$\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = T\left(\frac{u'}{v'}\right)^\rho, \qquad \partial\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = (\pi - \pi_1)\rho.$$

Pour trouver la fonction $\frac{u'}{v'}$, on divisera $p^2\theta_1 - q^2\theta_2$ par uv. D'après la méthode qui nous a servi pour trouver les fonctions p et q, il est clair que le quotient de cette division sera d'un degré moins élevé que $\sqrt{\theta x}$, et par conséquent, dans le cas de θx du troisième ou du quatrième degré, ce quotient sera, en général, représenté par $ax + b$. Mais, d'après les équations (5) et (6), ce quotient, à un facteur constant près, est égal à $u'v'w$. Donc, l'une des trois fonctions

$$u',\ v',\ w$$

sera égale à $ax + b$, et les autres se réduiront à des constantes, et par conséquent on sera conduit à l'un de ces trois cas :

$$\frac{u'}{v'} = \frac{1}{ax + b}, \quad \frac{u'}{v'} = ax + b, \quad \frac{u'}{v'} = \text{const.}$$

Mais en faisant $x = -\frac{b}{a}$ dans les équations (4), où d'après l'équation (6) $w' = w$, on voit que le premier cas aura lieu, si cette valeur de x rend

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{u} = 0,$$

le second, si l'on a

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{v} = 0,$$

et enfin le troisième, si pour $x = -\frac{b}{a}$ on trouve en même temps

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{u} = 0, \quad \frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{v} = 0.$$

Donc, si nous convenons de désigner par ε une valeur qui se réduit à

$$+1, \quad -1, \quad 0,$$

selon que pour $x = -\frac{b}{a}$ on trouve

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{u} = 0,$$

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{v} = 0,$$

ou, en même temps,

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{u} = 0, \qquad \frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{v} = 0,$$

la valeur de $\frac{u'}{v'}$ sera donnée par cette équation

$$\frac{u'}{v'} = \frac{1}{(ax+b)^\varepsilon}.$$

D'après cela, les équations qui déterminent P_0, Q_0 et ρ deviennent

$$(7) \qquad \frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = \frac{T}{(ax+b)^{\varepsilon\rho}}, \qquad \partial \frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = (\pi - \pi_1)\rho.$$

Dans le cas où a ne se réduit pas à zéro, on peut mettre ces équations sous une forme plus simple, en introduisant à la place de x une nouvelle variable z d'après l'équation

$$ax + b = \frac{a}{z}.$$

En effet, si l'on traite la valeur de $\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}}$ comme fonction de cette nouvelle variable, on parvient facilement à reconnaître que, d'après les équations précédentes, la fonction $\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}}$ en z sera déterminée par ces propriétés :

1°. Elle reste finie tant que z est fini et diffère de 0 ; car ces valeurs de z correspondent à celles de x différentes de $-\frac{b}{a}$ et finies.

2°. Pour $z = 0$, la limite du rapport $\dfrac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} : z^{(\pi_1 - \pi)\rho}$ reste finie; car ce rapport n'est lui-même que la limite de la valeur de $\dfrac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} : x^{(\pi - \pi_1)\rho}$ pour $x = \infty$.

3°. Pour $z = \infty$, le rapport $\dfrac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} : z^{\varepsilon\rho}$ reste fini; car ce rapport est égal à $\dfrac{T}{a^{\varepsilon\rho}}$, quand on fait $x = -\dfrac{b}{a}$.

Donc, en faisant $ax + b = \dfrac{a}{z}$, on peut remplacer les équations (7) par celles-ci :

$$\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta\left(\dfrac{a - bz}{az}\right)}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta\left(\dfrac{a - bz}{az}\right)}} = T z^{(\pi_1 - \pi)\rho}, \qquad \delta\,\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta\left(\dfrac{a - bz}{az}\right)}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta\left(\dfrac{a - bz}{az}\right)}} = \varepsilon\rho.$$

Mais il n'est pas difficile de s'assurer que a étant différent de zéro, on aura

$$\pi = \pi_1.$$

En effet, comme $\pi_1 = \delta\dfrac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}$, on peut mettre les différences $\pi - \pi_1$, $\pi_1 - \pi$ sous ces formes :

$$\delta\,\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}\,x^{\pi} = 2\,\delta\,\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}\,x^{\frac{\pi}{2}} - \delta\,\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv},$$

$$\delta\,\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}\,x^{-\pi} = 2\,\delta\,\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}\,x^{-\frac{\pi}{2}} - \delta\,\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv}.$$

Donc, si le coefficient a dans la valeur de $\dfrac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv} = ax + b$ n'est pas égal à zéro, les différences

$$\pi - \pi_1, \qquad \pi_1 - \pi$$

sont respectivement égales à

$$2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{\frac{\pi}{2}}-1,\qquad 2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{-\frac{\pi}{2}}-1.$$

Mais, d'après le § III, on a

$$2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{\frac{\pi}{2}}<\delta\sqrt{\theta x},\qquad 2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{-\frac{\pi}{2}}<\delta\sqrt{\theta x},$$

et comme θx n'est que du quatrième ou du troisième degré, cela prouve que les différences $\pi-\pi_1$, $\pi_1-\pi$ sont au-dessous de 1, ce qui ne peut être, à moins qu'on n'ait $\pi=\pi_1$. D'après cela, les équations qui déterminent P_0 et Q_0 en fonctions de z deviennent

$$\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}=T,\qquad \delta\,\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}=\varepsilon\rho,$$

formules que nous mettrons sous la forme

$$(8)\quad \frac{P_0z^2+Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0z^2-Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}=T,\qquad \delta\,\frac{P_0z^2+Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0z^2-Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}=\varepsilon\rho,$$

pour délivrer la fonction radicale des puissances négatives de z.

Or la première de ces équations ne diffère que par la forme de celle qu'Abel a traitée dans son Mémoire *sur l'intégration de la formule différentielle* $\frac{\rho\,dx}{\sqrt{R}}$, R *et* ρ *étant des fonctions entières*, et d'après les recherches ingénieuses de ce grand géomètre, nous savons que cette équation est impossible, sauf le cas de $P_0=0$ ou $Q_0=0$, si la fraction continue résultante de $\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}$ n'est pas périodique, et dans le cas contraire, si l'on a

$$\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)} = r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \cdot \, \cdot \, + \cfrac{1}{r_2 + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{2r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \cdot \, \cdot}}}}}}},$$

on vérifiera cette équation en prenant

$$\frac{P_0 z^2}{Q_0} = r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_3 + \cdot \, \cdot + \cfrac{1}{r_2 + \cfrac{1}{r_1}}}}.$$

Quant à l'équation

$$\delta \frac{P_0 z^2 + Q_0 \sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0 z^2 - Q_0 \sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}} = \varepsilon\rho,$$

on la vérifiera en choisissant convenablement ρ, savoir en prenant

$$\rho = \frac{1}{\varepsilon}\delta \frac{P_0 z^2 + Q_0 \sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0 z^2 - Q_0 \sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}} = \frac{1}{\varepsilon}\delta \frac{\frac{P_0 z^2}{Q_0} + \sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{\frac{P_0 z^2}{Q_0} - \sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}.$$

Donc si l'on fait, pour abréger,

$$\varphi(z) = r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \cdot \, \cdot + \cfrac{1}{r_2 + \cfrac{1}{r_1}}}},$$

la valeur cherchée de $\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}}$ en fonction de z sera

$$\frac{\varphi(z) + \sqrt{z^4\,\theta\left(\frac{a - bz}{az}\right)}}{\varphi(z) - \sqrt{z^4\,\theta\left(\frac{a - bz}{az}\right)}},$$

et, d'après l'équation $ax + b = \frac{a}{z}$, nous aurons en fonction de x

$$(9)\qquad \frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = \frac{\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 \varphi\left(\frac{a}{ax + b}\right) + \sqrt{\theta x}}{\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 \varphi\left(\frac{a}{ax + b}\right) - \sqrt{\theta x}}.$$

Quant au nombre ρ, on le trouvera d'après l'équation

$$\rho = \frac{1}{\varepsilon}\,\delta\,\frac{\varphi(z) + \sqrt{z^4\,\theta\left(\frac{a - bz}{az}\right)}}{\varphi(z) - \sqrt{z^5\,\theta\left(\frac{a - bz}{az}\right)}}.$$

Cette valeur de ρ nous montre que la solution des équations (8), que nous venons de trouver, ne peut être employée que dans le cas où ε ne se réduit pas à zéro; car, pour $\varepsilon = 0$, cette valeur de ρ devient infinie, tandis que ρ désigne chez nous un nombre fini. Mais, dans ce cas, on vérifiera évidemment nos équations par une valeur finie de ρ, en prenant une des solutions de l'équation

$$\frac{P_0 z^2 + Q_0\sqrt{z^4\,\theta\left(\frac{a - bz}{az}\right)}}{P_0 z^2 - Q_0\sqrt{z^4\,\theta\left(\frac{a - bz}{az}\right)}} = T,$$

que nous avons exclues, savoir $Q_0 = 0$ ou $P_0 = 0$, ce qui donne

$$\frac{P_0 z^2 + Q_0\sqrt{z^4\,\theta\left(\frac{a - bz}{az}\right)}}{P_0 z^2 - Q_0\sqrt{z^4\,\theta\left(\frac{a - bz}{az}\right)}} = \pm 1,\qquad \delta\,\frac{P_0 z^2 + Q_0\sqrt{z^4\,\theta\left(\frac{a - bz}{az}\right)}}{P_0 z^2 - Q_0\sqrt{z^4\,\theta\left(\frac{a - bz}{az}\right)}} = \varepsilon\rho = 0.$$

Dans ces solutions, pour $\varepsilon = 0$, le nombre ρ reste arbitraire, et l'on pourra prendre $\rho = 1$. Remarquons que ces solutions, qu'on pouvait aussi tirer de la formule (9) en prenant $\varphi(z)$ égale à o ou ∞, ne pourront être employées, à leur tour, que dans le cas de $\varepsilon = 0$; car autrement ρ serait égal à o, tandis que ce nombre doit être différent de zéro.

Ainsi l'on trouve la fonction $\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}}$ et le nombre ρ, si le quotient de la division de $p^2\theta_1 - q^2\theta_2$ par uv se réduit à $ax + b$ et que a ne soit pas égal à zéro. Mais s'il arrive que $a = 0$, les fonctions u', v', d'après ce que nous venons de dire relativement à leur détermination, se réduisent à des constantes, et, par conséquent, les équations qui déterminent P_0, Q_0 et ρ deviennent

$$\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = T, \qquad \partial\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = (\pi - \pi_1)\rho.$$

Or, comme ces équations sont de même nature que les équations (8) et que seulement ici P_0, Q_0, $\sqrt{\theta x}$, $\pi - \pi_1$ remplacent $P_0 z^2$, Q_0, $\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a - bz}{az}\right)}$, ε, nous concluons, d'après les formules précédentes, que la solution de ces équations sera donnée par ces formules

$$\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = \frac{\varphi_0(x) + \sqrt{\theta x}}{\varphi_0(x) - \sqrt{\theta x}}, \qquad \rho = \frac{1}{\pi - \pi_1}\,\partial\frac{\varphi_0(x) + \sqrt{\theta x}}{\varphi_0(x) - \sqrt{\theta x}},$$

où l'on prendra pour $\varphi_0(x)$ zéro ou l'infini si

$$\pi - \pi' = 0,$$

et dans le cas contraire, on développera $\sqrt{\theta x}$ en fraction continue

$$r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \cdots + \cfrac{1}{r_2 + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{2r + \cfrac{1}{r_1 + \cdots}}}}}}$$

et l'on prendra

$$\varphi_0(x) = r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \cdot_{\cdot_{\cdot + \cfrac{1}{r_2 + \cfrac{1}{r_1}}}}}}.$$

Nous remarquerons encore que si les équations primitives

$$\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}} = T\left(\frac{u}{v}\right)^{\rho}, \qquad \delta\,\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}} = \pi\rho$$

remplissent elles-mêmes la condition

$$\delta(uv) + \pi < \sqrt{\theta x},$$

on trouvera leur solution au moyen des formules que nous venons de donner pour résoudre les équations réduites

$$\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = T\left(\frac{u'}{v'}\right)^{\rho} \qquad \delta\,\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = (\pi - \pi_1)\rho.$$

Dans ce cas, on prendra π au lieu de $\pi - \pi_1$, et l'on trouvera a, b, ε en égalant

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{(ax+b)^{\varepsilon}}.$$

§ V.

D'après ce que nous venons de donner sur la solution des équations

$$(10) \qquad \frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}} = T\left(\frac{u}{v}\right)^{\rho}, \qquad \delta\,\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}} = \pi\rho,$$

on peut prouver qu'elles sont impossibles, si, θx étant du quatrième degré et $\frac{uvx^{\pi}}{\sqrt{\theta x}}$ de degré impair, l'équation $\theta x = 0$ n'est pas vérifiée en prenant pour x une valeur composée des racines de l'équation $uv = 0$ et des coefficients de θx, à l'aide des seuls radicaux carrés, et que, par conséquent, on ne peut pas exprimer en termes finis toutes les intégrales dont la détermination se réduit aux équations (10) de cette catégorie.

Pour le démontrer, nous remarquerons d'abord que, dans le cas où $\frac{uvw^\pi}{\sqrt{\theta x}}$ est de degré impair, on peut exécuter la réduction des équations (10), d'après le § III, en prenant cette décomposition de θx en deux facteurs θ_1, θ_2 :

$$\theta_1 = 1, \qquad \theta_2 = \theta x,$$

et si avec ces valeurs de θ_1, θ_2, et en supposant connues les racines de l'équation $uv = 0$, on fait la réduction des équations (10), et qu'on cherche leur solution, on ne rencontre que l'extraction des racines carrées et les différentes opérations rationnelles. Donc, dans toute cette analyse, on n'aura que des quantités qui ne peuvent vérifier l'équation $\theta x = 0$ dans le cas que nous examinons. Or nous allons prouver que tant que cela a lieu, on ne peut donner une solution des équations (10).

D'après le paragraphe précédent, dans la solution des équations (10), on ne peut se passer du développement de $\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}$ ou $\sqrt{\theta x}$ en fraction continue que dans le cas où l'on a

$$\varepsilon = 0 \quad \text{ou} \quad \pi - \pi_1 = 0, \quad a = 0.$$

Mais nous savons (*voyez* § IV) que la quantité ε ne se réduit à zéro que dans le cas où la valeur $x = -\frac{b}{a}$ vérifie ces deux équations

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{u} = 0, \qquad \frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{v} = 0;$$

et comme le produit

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{u} \cdot \frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{v}$$

est égal à

$$\frac{p^2\theta_1 - p^2\theta_2}{uv} = ax + b,$$

cela suppose que le développement de

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{u}, \qquad \frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{v},$$

suivant les puissances de $x + \frac{b}{a}$, contient des exposants fractionnaires, ce qui ne peut avoir lieu, à moins que θ_1 ou θ_2 ne contienne le facteur $x + \frac{b}{a}$, et, par conséquent, cela suppose que la valeur $x = -\frac{b}{a}$ vérifie l'équation $\theta_1\theta_2 = \theta x = 0$, ce qui ne peut être admis, comme nous l'avons remarqué.

Le cas de $a = 0$, $\pi - \pi_1 = 0$ ne peut avoir lieu; car nous avons trouvé, dans le paragraphe précédent,

$$\pi_1 - \pi = 2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{-\frac{\pi}{2}} - \delta\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv},$$

et comme

$$\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv} = ax + b,$$

$$\theta_1 = 1, \qquad \theta_2 = \theta x,$$

cela nous donne

$$\begin{aligned}\pi_1 - \pi &= 2\delta\frac{p + q\sqrt{\theta x}}{\sqrt{uv}}x^{-\frac{\pi}{2}} - \delta(ax + b)\\ &= 2\delta\frac{p + q\sqrt{\theta x}}{\sqrt[4]{\theta x}} - \delta\frac{uv.x^{\pi}}{\sqrt{\theta x}} - \delta(ax + b).\end{aligned}$$

Mais dans le cas que nous examinons, la fonction $\frac{uv\,x^{\pi}}{\sqrt{\theta x}}$ est de degré impair et la fonction $\frac{p + q\sqrt{\theta x}}{\sqrt[4]{\theta x}}$ d'un degré entier; donc, si $a = 0$, la différence $\pi_1 - \pi$ est de la forme $2k + 1$, et, par conséquent, ne peut se réduire à zéro.

Il nous reste maintenant à prouver qu'on ne parviendra pas non plus à la solution de nos équations par le développement de $\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}$ ou $\sqrt{\theta x}$ en fraction continue. Pour cela, nous allons montrer qu'en général si aucune des racines de l'équation bicarrée $R=0$ ne peut être exprimée à l'aide des seuls radicaux carrés, la fraction continue, résultante de $\sqrt{R}$, ne peut être périodique, de la forme

$$r+\cfrac{1}{r_1+\cfrac{1}{r_1+\cdots+\cfrac{1}{r_1+\cfrac{1}{r_2+\cfrac{1}{2r+\cfrac{1}{r_1+\cdots}}}}}}$$

En effet, si cela avait lieu, nous savons, par les recherches d'Abel, qu'on parviendrait par ce développement de $\sqrt{R}$ à la solution de l'équation

$$Y_0^2 - Y^2R = C,$$

où Y_0, Y sont des fonctions entières et C une constante; le tout, étant déterminé par le développement de $\sqrt{R}$, ne peut contenir que des quantités exprimables par les coefficients de R au moyen des seuls radicaux carrés. Or, une telle solution de l'équation

$$Y_0^2 - Y^2R = C$$

étant admise, supposons que

$$y_0^2 - y^2R = c,$$

soit celle parmi elles dans laquelle y diffère de zéro et soit en même temps du degré le moins élevé.

D'après l'équation précédente, nous trouvons

$$y_0^2 - c = y^2R,$$

et, par conséquent,

$$(y_0 + \sqrt{c})(y_0 - \sqrt{c}) = y^2 R.$$

Comme $y_0 - \sqrt{c}$, $y_0 + \sqrt{c}$ ne peuvent avoir de commun diviseur, cette équation ne peut être vérifiée à moins qu'on n'ait

$$(11)\quad y_0 + \sqrt{c} = y_1^2 R_1, \quad y_0 - \sqrt{c} = y_2^2 R_2, \quad y_1 y_2 = y, \quad R_1 R_2 = R,$$

et, par conséquent,

$$2\sqrt{c} = y_1^2 R_1 - y_2^2 R_2.$$

Or on ne peut pas supposer que l'une des fonctions R_1, R_2 se réduise à une constante; car en admettant, par exemple, que $R_1 = c_1$, on trouve, d'après (11),

$$R_2 = \frac{R}{c_1},$$

et, par conséquent, l'équation précédente devient

$$2\sqrt{c} = y_1^2 c_1 - y_2^2 \frac{R}{c_1},$$

ou

$$2 c_1 \sqrt{c} = (c_1 y_1)^2 - y_2^2 R,$$

ce qui donne, contre l'hypothèse, une solution de l'équation

$$Y_0^2 - Y^2 R = C,$$

où $Y = y_2$ est d'un degré moins élevé que y.

Mais les fonctions R_1, R_2 ne peuvent être non plus de degrés supérieurs à zéro; car autrement on parviendrait à décomposer la fonction bicarrée R en deux facteurs $R_1 . R_2$, et, par conséquent, à trouver au moins une racine de l'équation $R = 0$ au moyen des seuls radicaux carrés; car, d'après (11), pour trouver R_1 et R_2, on n'a qu'à chercher le commun diviseur des fonctions $y_0 + \sqrt{c}$ et R, $y_0 - \sqrt{c}$ et R.

§ VI.

En terminant notre Mémoire, nous allons faire le résumé des procédés qui, d'après ce que nous venons d'exposer, constituent, avec nos recherches citées plus haut, une méthode générale d'intégration des différentielles qui contiennent une racine carrée d'un polynôme du troisième ou du quatrième degré, en tant que cette intégration est possible sous forme finie.

Nous supposons que préalablement la partie rationnelle de ces différentielles a été séparée, et que le reste a été mis sous la forme $\frac{f_0 x}{F_0 x}\frac{dx}{\sqrt{\theta x}}$, où $f_0 x$, $F_0 x$ n'ont point de commun diviseur; nous supposons aussi que θx, qui n'est que du troisième ou du quatrième degré, n'a pas de facteurs multiples; car, autrement, l'intégration de $\frac{f_0 x}{F_0 x}\frac{dx}{\sqrt{\theta x}}$ deviendrait très-simple.

Pour trouver l'intégrale $\int \frac{f_0 x}{F_0 x}\frac{dx}{\sqrt{\theta x}}$ sous forme finie, en tant que cela est possible, on procédera de la manière suivante :

1°. On cherchera le plus grand commun diviseur entre les fonctions $F_0 x \theta x$ et $\frac{d(F_0 x \theta x)}{dx}$. Nous dénoterons ce diviseur par Q.

2°. On déterminera les degrés des fonctions $\frac{Q . f_0 x}{F_0 x . \theta x}$, $\frac{Q}{x\sqrt{\theta x}}$. Si ces fonctions sont de degrés inférieurs à -1, le terme algébrique dans l'expression de l'intégrale cherchée est zéro. Dans le cas contraire, on prendra n égal au plus petit nombre entier supérieur aux degrés de ces fonctions, et l'on cherchera les coefficients du polynôme

$$P = B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \ldots + B_2 x^2 + B_1 x + B_0,$$

d'après cette condition : *la fonction*

$$f_0 x - \frac{F_0 x \theta x}{Q}\frac{dP}{dx} - \left(\frac{F_0 x \frac{d\theta x}{dx}}{2Q} - \frac{F_0 x \, \theta x \cdot \frac{dQ}{dx}}{Q^2}\right) P,$$

étant divisée par Q, donne zéro pour reste et pour quotient une fonction d'un degré qui n'est pas plus élevé que celui de $\frac{F_0 x \sqrt{\theta x}}{x Q}$.

Si cette condition ne peut être remplie, on conclura tout de suite que l'intégrale cherchée est impossible sous forme finie. Dans le cas contraire, on trouvera les coefficients du polynôme P, et l'on conclura que la partie algébrique dans l'intégrale cherchée a pour valeur $\frac{P}{Q}\sqrt{\theta x}$.

3°. On mettra la fonction $\frac{f_0 x}{F_0 x} - \sqrt{\theta x}\,\frac{d\,\frac{P}{Q}\sqrt{\theta x}}{dx}$ sous la forme $\frac{fx}{Fx}$, où fx, Fx sont des fonctions entières qui n'ont point de commun diviseur; on cherchera les racines de l'équation $Fx = 0$, et l'on calculera des quantités $K^0, K', K'', K''', \ldots, K^{(l)}$ d'après les équations

$$K^0 = \lim\left[\frac{xfx}{Fx\sqrt{\theta x}}\right]_{x=\infty}, \qquad K' = \frac{f(x')}{F'(x')\sqrt{\theta(x')}},$$

$$K'' = \frac{f(x'')}{F'(x'')\sqrt{\theta(x'')}}, \ldots, \qquad K^{(l)} = \frac{f(x^l)}{F'(x^l)\sqrt{\theta(x^l)}}:$$

où $x', x'', \ldots, x^{(l)}$ désignent les racines de l'équation

$$Fx = 0.$$

4°. On cherchera les nombres entiers $M^0, M', M'', \ldots, M^{(l)}$ qui rendent

$$M^0 K^0 + M' K' + M'' K'' + \ldots + M^{(l)} K^{(l)} = 0.$$

Soit λ le nombre de toutes les équations de cette forme qui ne sont pas identiques entre elles par rapport à

$$K^0, K', K'', \ldots, K^{(l)},$$

et

$$K^0 = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i^0 K^{(\lambda+i)}, \qquad K' = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i' K^{(\lambda+i)},$$

$$K'' = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i'' K^{(\lambda+i)}, \ldots, \quad K^{(\lambda-1)} = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i^{(\lambda-1)} K^{(\lambda+i)}$$

les valeurs de λ quantités de la série

$$K^0,\ K',\ K'',\ldots,\ K^{(l)},$$

en fonctions des autres, qu'on tire de ces équations.

D'après cela on conclura que la partie logarithmique de l'intégrale cherchée est composée de ces $l-\lambda+1$ termes

$$\frac{K^{(\lambda)}}{n_0}\log W_0 + \frac{K^{(\lambda+1)}}{n_1}\log W_1 + \ldots + \frac{K^{(l)}}{n_{l-\lambda}}\log W_{l-\lambda},$$

où $n_0, n_1,\ldots, n_{l-\lambda}$ désignent des nombres entiers et $W_0, W_1,\ldots, W_{l-\lambda}$ des fonctions de la forme $\dfrac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$.

5°. Pour trouver un terme quelconque $\dfrac{K^{(\lambda+i)}}{n_i}\log W_i$, on cherchera le plus petit dénominateur auquel les quantités $M_i^0, M_i', M_i'',\ldots, M_i^{(\lambda-1)}$ peuvent être réduites. En dénotant ce dénominateur par σ, on fera

$$\pi = \pm M_i^0\sigma,$$

en prenant celui des deux signes $\pm$ qui appartient à M_i^0, et l'on mettra l'expression

$$\left[(x-x')^{M_i'}(x-x'')^{M_i''}\ldots(x-x^{(\lambda-1)})^{M_i^{(\lambda-1)}}(x-x^{(\lambda-1)})\right]^{\pm\sigma}$$

sous la forme d'une fraction simple $\frac{u}{v}$.

6°. On décomposera θx en deux facteurs $\theta_1.\theta_2$, de manière que $\sqrt{\dfrac{uv\theta_1.x^{\pi}}{\sqrt{\theta x}}}$ ne soit pas d'un degré entier, on trouvera une fonction entière S pour laquelle les fractions

$$\frac{S\sqrt{\theta_1}+\sqrt{\theta_2}}{u},\qquad \frac{S\sqrt{\theta_1}-\sqrt{\theta_2}}{v}$$

ne deviennent pas infinies, tant que x reste fini, et en développant l'expression $\dfrac{S - \sqrt{\dfrac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$ en fraction continue, on cherchera parmi les fractions réduites de $\dfrac{S - \sqrt{\dfrac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$ celle dont le dénominateur est du degré le plus proche de celui de $\sqrt{\dfrac{uv\theta_1 . x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$, mais moins élevé que celui de cette fonction.

En dénotant cette fraction par $\frac{M}{N}$, on cherchera le quotient de la division de

$$(NS - Muv)^2\theta_1 - N^2\theta_2$$

par uv. Ce quotient sera toujours d'un degré au-dessous du second.

7°. Si ce quotient est une fonction du premier degré $ax + b$, on prendra

$$\frac{K^{(\lambda+l)}}{n_i}\log W_i = \frac{K^{(\lambda+l)}}{\pm\sigma}\log\frac{(NS - Muv)\sqrt{\theta_1} + N\sqrt{\theta_2}}{(NS - Muv)\sqrt{\theta_1} - N\sqrt{\theta_2}},$$

dans le cas où les deux fonctions

$$\frac{(NS - Muv)\sqrt{\theta_1} + N\sqrt{\theta_2}}{u}, \quad \frac{(NS - Muv)\sqrt{\theta_1} - N\sqrt{\theta_2}}{v}$$

se réduisent à zéro pour $x = -\frac{b}{a}$.

Dans le cas contraire, on aura

$$\frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i}\log W_i$$

$$= \frac{\varepsilon K^{(\lambda+l)}}{\pm\rho\sigma}\log\left\{\left[\frac{(NS - Muv)\sqrt{\theta_1} + N\sqrt{\theta_2}}{(NS - Muv)\sqrt{\theta_1} - N\sqrt{\theta_2}}\right]^{\frac{\rho}{\varepsilon}}\frac{\left(\frac{ax+b}{a}\right)^2\varphi\left(\frac{a}{ax+b}\right) + \sqrt{\theta x}}{\left(\frac{ax+b}{a}\right)^2\varphi\left(\frac{a}{ax+b}\right) - \sqrt{\theta x}}\right\},$$

où $\varphi(z)$ est une fonction égale à

$$r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \cdots + \cfrac{1}{r_2 + \cfrac{1}{r_1}}}},$$

la fraction continue résultante de $\sqrt{z^4\,\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}$ étant périodique et de la forme

$$r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \cdots + \cfrac{1}{r_2 + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{2r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \cdots}}}}}}},$$

ρ le degré de $\dfrac{\varphi(z) + \sqrt{z^4\,\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{\varphi(x) - \sqrt{z^4\,\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}$, $\varepsilon = +1$ ou -1, selon que $x = -\frac{b}{a}$ vérifie l'équation

$$\frac{(\mathrm{NS} - \mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1} + \mathrm{N}\sqrt{\theta_2}}{u} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{(\mathrm{NS} - \mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1} - \mathrm{N}\sqrt{\theta_2}}{v} = 0.$$

8°. Si ce quotient se réduit à une constante, on prendra

$$\frac{\mathrm{K}^{(\lambda+i)}}{n_i}\log \mathrm{W}_i = \frac{\mathrm{K}^{(\lambda+i)}}{\pm\sigma}\log\frac{(\mathrm{NS} - \mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1} + \mathrm{N}\sqrt{\theta_2}}{(\mathrm{NS} - \mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1} - \mathrm{N}\sqrt{\theta_2}}$$

dans le cas où $\dfrac{(\mathrm{NS} - \mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1} - \mathrm{N}\sqrt{\theta_2}}{(\mathrm{NS} - \mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1} + \mathrm{N}\sqrt{\theta_2}}\,x^\pi$ est du degré zéro. Dans le cas contraire, en désignant par ε le degré de $\frac{(\mathrm{NS}-\mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1}-\mathrm{N}\sqrt{\theta_2}}{(\mathrm{NS}-\mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1}+\mathrm{N}\sqrt{\theta_2}}x^\pi$, on aura

$$\frac{\mathrm{K}^{(\lambda+i)}}{n_i}\log \mathrm{W}_i = \frac{\varepsilon \mathrm{K}^{(\lambda+i)}}{\pm \rho\sigma}\log\left\{\left[\frac{(\mathrm{NS}-\mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1}+\mathrm{N}\sqrt{\theta_2}}{(\mathrm{NS}-\mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1}-\mathrm{N}\sqrt{\theta_2}}\right]^{\frac{\rho}{\varepsilon}}\cdot\frac{\varphi_0(x)+\sqrt{\theta x}}{\varphi_0(x)-\sqrt{\theta x}}\right\},$$

où

$$\varphi_0(x) = r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \cdots + \cfrac{1}{r_2 + \cfrac{1}{r_1}}}},$$

la fraction continue résultante de $\sqrt{\theta x}$ étant périodique et de la forme

$$r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \cdots + \cfrac{1}{r_2 + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{2r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \cdots}}}}}}},$$

ρ le degré de $\frac{\varphi_0 x + \sqrt{\theta x}}{\varphi_0 x - \sqrt{\theta x}}$.

9°. Ce que nous venons de dire sur la détermination du terme $\frac{\mathrm{K}^{(\lambda+i)}}{n_i}\log \mathrm{W}_i$ ne sera applicable que dans le cas où le degré de la fonction uvx^π surpasse 1. S'il arrive que le degré de uvx^π n'est pas au-dessus de 1, le terme $\frac{\mathrm{K}^{(\lambda+i)}}{n_i}\log \mathrm{W}_i$ sera aussi déterminé par les formules que nous venons d'exposer, seulement on fera

$$\frac{(\mathrm{NS}-\mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1}+\mathrm{N}\sqrt{\theta_2}}{(\mathrm{NS}-\mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1}-\mathrm{N}\sqrt{\theta_2}}=1,$$

on trouvera a, b, ε en égalant $\frac{u}{v}=\frac{1}{(ax+b)^\varepsilon}$, et l'on prendra $\varepsilon=\pi$ dans le cas de $a=0$.

10°. Après avoir trouvé tous les termes logarithmiques, on différentiera leur somme. Si cette différentielle ne se réduit pas à $\frac{fx}{\mathrm{F}x}\frac{dx}{\sqrt{\theta x}}$, l'intégrale cherchée est impossible sous forme finie; dans le cas contraire, sa valeur sera précisément donnée par la somme

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}\sqrt{\theta x}+\frac{\mathrm{K}^{(\lambda)}}{n_0}\log \mathrm{W}_0+\frac{\mathrm{K}^{(\lambda+1)}}{n_1}\log \mathrm{W}_1+\ldots+\frac{\mathrm{K}^{(l)}}{n_{l-\lambda}}\log \mathrm{W}_{l-\lambda}.$$

S'il s'agit, par exemple, de trouver l'intégrale

$$\int\frac{2x^6+4x^5+7x^4-3x^3-x^2-8x-8}{(2x^2-1)^2\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}}\,dx,$$

on cherchera le plus grand commun diviseur entre les fonctions

$$(2x^2-1)^2(x^4+4x^3+2x^2+1),\qquad \frac{d[(2x^2-1)^2(x^4+4x^3+2x^2+1)]}{dx}.$$

Comme ce diviseur est $2x^2-1$, et que les fonctions

$$\frac{(2x^2-1)(2x^6+4x^5+7x^4-3x^3-x^2-8x-8)}{(2x^2-1)^2(x^4+4x^3+2x^2+1)},\qquad \frac{2x^2-1}{x\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}}$$

sont de degrés au-dessous de 1, on cherchera les coefficients de la fonction du premier degré $\mathrm{P}=\mathrm{B}_1x+\mathrm{B}_0$. Pour cela, on divisera

$$2x^6+4x^5+7x^4-3x^3-x^2-8x-8-\frac{(2x^2-1)^2}{2x^2-1}(x^4+4x^3+2x^2+1)\mathrm{B}_1$$

$$-\left[\frac{1}{2}\frac{(2x^2-1)^2(4x^3+12x^2+4x)}{2x^2-1}-\frac{(2x^2-1)^2(x^4+4x^3+2x^2+1).4x}{(2x^2-1)^2}\right](\mathrm{B}_1x+\mathrm{B}_0)$$

par $2x^2 - 1$. Comme cette division donne le reste

$$\left(4B_1 + 9B_0 - \frac{17}{2}\right)x + \frac{9}{2}B_1 + 4B_0 - \frac{13}{2},$$

et qu'on trouve en outre dans le quotient le terme

$$(1 - B_1)x^4,$$

qui est d'un degré plus élevé que $\frac{(2x^2-1)^2\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}}{x(2x^2-1)}$, on égalera tout cela à zéro, ce qui donne les équations

$$4B_1 + 9B_0 - \frac{17}{2} = 0, \qquad \frac{9}{2}B_1 + 4B_0 - \frac{13}{2} = 0, \qquad 1 - B_1 = 0,$$

et de là

$$B_1 = 1, \qquad B_0 = \frac{1}{2}, \qquad P = x + \frac{1}{2}.$$

Donc, le terme algébrique, dans l'expression de l'intégrale cherchée, a cette valeur

$$\frac{x+\frac{1}{2}}{2x^2-1}\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}.$$

En réduisant l'expression

$$\frac{2x^6+4x^5+7x^4-3x^2-x^2-8x-8}{(2x^2-1)^2}$$

$$-\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}\,\frac{d\,\frac{x+\frac{1}{2}}{2x^2-1}\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}}{dx}.$$

à la forme la plus simple, on parvient à

$$\frac{6x^2+5x+7}{2x^2-1};$$

et comme les racines de l'équation $2x^2 - 1 = 0$ sont $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on calculera les quantités K^0, K', K'' d'après les formules

$$K^0 = \lim \left[\frac{x(6x^2+5x+7)}{(2x^2-1)\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}}\right]_{x=\infty},$$

$$K' = \frac{6x'^2+5x'+7}{4x'\sqrt{x'^4+4x'^3+2x'^2+1}},$$

$$K'' = \frac{6x''^2+5x''+7}{4x''\sqrt{x''^4+4x''^3+2x''^2+1}},$$

en prenant $x' = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x'' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui donne

$$K^0 = 0, \quad K' = -\frac{5}{2}, \quad K'' = \frac{5}{2},$$

et, par conséquent, on aura

$$M^0K^0 + M'K' + M''K'' = 0, \tag{12}$$

si l'on prend

$$M^0 = 1, \quad M' = 0, \quad M'' = 0,$$

ou

$$M^0 = 1, \quad M' = 1, \quad M'' = 1.$$

Quant aux autres valeurs de M^0, M', M'' qui satisfont à l'équation (12), elles ne conduisent, par rapport à K^0, K', K'', qu'à des équations identiques à celles qu'on trouve en prenant les valeurs mentionnées de M^0, M', M'', savoir :

$$1.K^0 + 0.K' + 0.K'' = 0, \quad 0.K^0 + 1.K' + 1.K'' = 0,$$

et ces équations nous donnent

$$K^0 = 0.K'', \quad K' = -K''.$$

D'après cela, on conclut que la partie logarithmique de l'intégrale cherchée ne contient qu'un seul terme

$$\frac{5}{2}\frac{}{n_1}\log W_1.$$

Les coefficients de l'expression de K^0 et K' en fonction de K'' n'étant pas fractionnaires, et le coefficient de K'' dans la valeur de K^0 étant zéro, on prendra

$$\sigma = 1, \quad \pi = 0;$$

on mettra le produit

$$\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} \cdot \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

sous la forme d'une fraction

$$\frac{x - \frac{1}{\sqrt{2}}}{x + \frac{1}{\sqrt{2}}},$$

et, après avoir décomposé $x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 1$ en deux facteurs $(x+1)(x^3 + 3x^2 - x + 1)$, on cherchera une fonction entière S pour laquelle les fractions

$$\frac{S\sqrt{x+1} + \sqrt{x^3 + 3x^2 - x + 1}}{x - \frac{1}{\sqrt{2}}}, \qquad \frac{S\sqrt{x+1} - \sqrt{x^3 + 3x^2 - x + 1}}{x + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

ne deviennent pas infinies tant que x reste fini, ou, ce qui revient au même, une fonction S qui, pour $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, se réduise respectivement à

$$\frac{-\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1}}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} + 1}} = -\frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}};$$

et à

$$\frac{\sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1}}{\sqrt{-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1}} = \frac{3 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

D'après cela on trouve

$$S = 1 - 3x.$$

En cherchant la fraction réduite de $\dfrac{1 - 3x - \sqrt{\dfrac{x^3 + 3x^2 - x + 1}{x + 1}}}{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$, dont le dénominateur est du degré le plus proche possible de celui de

$$\sqrt{\frac{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(x + 1)x^0}{\sqrt{x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 1}}},$$

mais moins élevé que

$$\sqrt{\frac{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(x + 1)x^0}{\sqrt{x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 1}}},$$

on prendra pour cette fraction $\frac{0}{1}$, et comme

$$\left[1.(1 - 3x) - 0.\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]^2 (x + 1)$$
$$- 1^2.(x^3 + 3x^2 - x + 1) = 8x^3 - 4x,$$

divisé par

$$\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = x^2 - \frac{1}{2},$$

donne pour quotient $8x$, et que $x = 0$ rend nulle la dernière de deux expressions

$$\frac{(1-3x)\sqrt{x+1}+\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

$$\frac{(1-3x)\sqrt{x+1}-\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}{x+\frac{1}{\sqrt{2}}};$$

le terme logarithmique, d'après le 7°, sera donné par la formule

$$\frac{-1\cdot\frac{5}{2}}{1\cdot\rho}\log\left\{\begin{array}{c}\left[\dfrac{(1-3x)\sqrt{x+1}+\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}{(1-3x)\sqrt{x+1}-\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}\right]^{\frac{\rho}{-1}}\\ \times\dfrac{x^2\varphi\left(\frac{1}{x}\right)+\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}}{x^2\varphi\left(\frac{1}{x}\right)-\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}}\end{array}\right\},$$

où ρ désigne le degré de $\dfrac{\varphi(z)+\sqrt{z^4\left[\left(\frac{1}{z}\right)^4+4\left(\frac{1}{z}\right)^3+2\left(\frac{1}{z}\right)^2+1\right]}}{\varphi(z)-\sqrt{z^4\left[\left(\frac{1}{z}\right)^4+4\left(\frac{1}{z}\right)^3+2\left(\frac{1}{z}\right)^2+1\right]}}$.

Pour trouver la fonction $\varphi(z)$, on développera le radical

$$\sqrt{z^4\left[\left(\frac{1}{z}\right)^4+4\left(\frac{1}{z}\right)^3+2\left(\frac{1}{z}\right)^2+1\right]}=\sqrt{z^4+2z^2+4z+1}$$

en fraction continue. Comme on trouve

$$\sqrt{z^4+2z^2+4z+1}=z^2+1+\cfrac{1}{\frac{1}{2}z+\cfrac{1}{2z-2+\cfrac{1}{\frac{1}{2}z+\cfrac{1}{2(z^2+1)+\ldots}}}},$$

on prendra

$$\varphi(z) = z^2 + 1 + \cfrac{1}{\frac{1}{2}z + \cfrac{1}{2z - 2 + \cfrac{1}{\frac{1}{2}z}}},$$

ce qui donne

$$\varphi(z) = \frac{z^5 - z^4 + 3z^3 + z^2 + 2}{z^3 - z^2 + 2z},$$

et par conséquent ρ, degré de $\dfrac{\varphi(z) + \sqrt{z^4\left[\left(\frac{1}{z}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{z}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{z}\right)^2 + 1\right]}}{\varphi(z) - \sqrt{z^4\left[\left(\frac{1}{z}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{z}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{z}\right)^2 + 1\right]}}$,

est égal à 10.

Ainsi en faisant, pour abréger,

$$\Delta = \sqrt{x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 1},$$

le terme logarithmique cherché aura cette valeur

$$-\frac{5}{2.10}\log\left\{\begin{array}{l}\left[\dfrac{(1-3x)\sqrt{x+1} + \sqrt{x^3+3x^2-x+1}}{(1-3x)\sqrt{x+1} - \sqrt{x^3+3x^2-x+1}}\right]^{-10} \\ \times\dfrac{x^2\left[\left(\frac{1}{x}\right)^5 - \left(\frac{1}{x}\right)^4 + 3\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2\right] + \left[\left(\frac{1}{x}\right)^3 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{x}\right)\right]\Delta}{x^2\left[\left(\frac{1}{x}\right)^5 - \left(\frac{1}{x}\right)^4 + 3\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2\right] - \left[\left(\frac{1}{x}\right)^3 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{x}\right)\right]\Delta}\end{array}\right\},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{1}{4}\log\left\{\begin{array}{l}\left[\dfrac{(1-3x)\sqrt{x+1} + \sqrt{x^3+3x^2-x+1}}{(1-3x)\sqrt{x+1} - \sqrt{x^3+3x^2-x+1}}\right]^{10} \\ \times\dfrac{2x^5 + x^3 + 3x^2 - x + 1 - (2x^2 - x + 1)\Delta}{2x^5 + x^3 + 3x^2 - x + 1 + (2x^2 - x + 1)\Delta}\end{array}\right\}.$$

Donc, si l'intégrale cherchée peut être exprimée sous forme finie, elle doit être égale à

$$\frac{x+\frac{1}{2}}{2x^2-1}\Delta+\frac{1}{4}\log\left\{\begin{array}{l}\left[\dfrac{(1-3x)\sqrt{x+1}+\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}{(1-3x)\sqrt{x+1}-\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}\right]^{10}\\ \times\dfrac{2x^5+x^3+3x^2-x+1-(2x^2-x+1)\Delta}{2x^5+x^3+3x^2-x+1+(2x^2-x+1)\Delta}\end{array}\right\};$$

où

$$\Delta=\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}.$$

Effectivement, on trouve par la différentiation que c'est bien la valeur de l'intégrale

$$\int\frac{2x^6+4x^5+7x^4-3x^3-x^2-8x-8}{(2x^3-1)^2\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}}\,dx,$$

sur laquelle nous avons opéré.